

روشهای جبر

جلد اول

پرویز شهبازی

پرویز شهبازی

روشهای جبر

جلد اول



مؤسسه انتشارات امیرکبیر

تهران، ۱۳۶۵



وقتی که در اوایل سال ۱۳۴۷ برای نخستین بار کتاب روشهای جبر منتشر شد، گمان نمی رفت تا این حد مورد استقبال دانش آموزان قرار گیرد. روشهای جبر به این هدف چاپ شد که «در خور صفحه‌های محدود خود، علاقه‌مندان را از سردرگمی نجات دهد و این مطلب را روشن کند که هیچ راه حل یا روش استدلالی در ریاضی جنبه «استثنایی» و «تصادفی» ندارد و می توان برای همه آنها استندهای منطقی جستجو کرد».

و ضمناً «خواننده‌ای برای کتاب در نظر گرفته شده بود که برنامه ریاضی دبیرستانی را فرا گرفته باشد و آمادگی درک مطالب در سطح بالاتر و عمیق تر را داشته باشد».

ولی در عمل روشن شد که من نتوانسته بودم قدرت ذهنی و علاقه‌مندی دانش آموزان را به درستی ارزیابی کنم. معلوم شد قدرت فکری و شایستگی جوانان ما خیلی بیش از آنست که تصور می رفت.

کتاب روشهای جبر به سرعت جای خود را باز کرد و به صورت کتاب «بالینی» هر دانش آموز رشته ریاضی در آمد و روشهای حل و نوع مسأله‌های آن (که کم و بیش تازگی داشت) توانست حتی در کار کلاسها اثر بگذارد، زیرا دانش آموزان مستعد ما کار بحثهای آنها به کلاسهای درس کشانده بودند. حقیقت اینست که برنامه‌های ریاضی دبیرستانی ما، اگر تنها به آنها اکتفا شود، نمی تواند به خلاقیت ذهنی دانش آموز کمک کند، رابطه‌ها و دستورهای کلیشه شده در کتابها و برنامه‌ها تنها می تواند کششی به طرف تقویت حافظه داشته باشد و از هر گونه تلاش عمیق فکری جلو گیری کند.

تنها چیزی که می تواند این مشکل را حل کند، وجود کتابهای کمک درسی است. منتهی در این مورد هم کتابهای سطحی فسراوان است، از

یکطرف وجود کتابهای حل مسأله، که اکثر به صورت ابزاری از مسأله‌های عادی و احتمالاً غیر عادی در آمده است، قدرت فکر کردن را از دانش‌آموز می‌گیرد و چون هیچ هدف مشخصی را دنبال نمی‌کنند و تنها به قصد ساده کردن کار دانش‌آموز تهیه شده‌اند، نقص آموزش ریاضی دبیرستانی ما را تشدید می‌کنند و درحقیقت به صورت عامل مؤثر هدایت دانش‌آموز به سمت کم عمقی درآمده‌اند.

از طرف دیگر بعضی از کتابهای خوب کمک درسی به وسیله افراد غیر متخصص ترجمه شده است و در نتیجه خواننده را در میان اصطلاحات نا آشنا و احتمالاً جمله‌های غلط و نارسا، گیج و سردرگم می‌کند.

به همین مناسبت کسانی که در امر آموزش ریاضی تجربه دارند و روشهای درست هدایت آدمی را به طرف تفکر علمی می‌شناسند، مسئولیتی بزرگ در قبال جوانان ما پیدا می‌کنند، اینها باید در درجه اول کتابهای خوب و حساب شده‌ای را انتخاب و ترجمه کنند و در درجه دوم نتیجه‌هایی را که از تجربه طولانی خود در دوران آموزش ریاضی بدست آورده‌اند، در دسترس دیگران قرار دهند.

تجربه نشان داده است که اکثر دانش‌آموزان از کتاب خوب استقبال می‌کنند و خارج از حساب نمره و امتحان نسبت به مطالب اصیل علاقه نشان می‌دهند. البته تردیدی نیست که علاقه‌مندی معلم در شناساندن کتابهای خوب و پرهیز دادن از کتابهای بازاری می‌تواند سهم بزرگی در این زمینه داشته باشد.



در چاپ چهارم روشهای جبر تغییراتی داده شده است، بدون آنکه به استخوان‌بندی اصلی کتاب لطمه‌ای وارد آید:

۱. بخشهای مربوط به مشتق، تابع اولیه، ماکزیمم و مینیمم و حد از جلد اول برداشته شده و برای جلد دوم در نظر گرفته شده است، بنابراین در جلد اول تنها به ریاضیات مقدماتی (ریاضیات باکمیت‌های ثابت) پرداخته شده است، اگر چه در بعضی موارد برای کامل بودن مطلب از روشهای مربوط به ریاضیات باکمیت‌های متغیر استفاده شده است.

۲. در جلد دوم، روشهای هندسه تحلیلی و بطور کلی مفاهیم مقدماتی مربوط به کمیت‌های متغیر (از قبیل حد، پیوستگی، مشتق‌گیری و غیره) مورد بررسی قرار گرفته است.

۳. چه درجده اول وچه درجده دوم تا حد امکان از مطالب عادی کتابهای درسی سخن نرفته است و در عین حال کوشش شده است از حد برنامۀ دبیرستانی هم خارج نشود. مطالب کتاب مربوط به نقاطی است که یا بهمناسبت عدم پیوستگی اجباری برنامه‌های دبیرستانی قابل طرح در کتابهای درسی نبوده است و یا اینکه در کتابهای درسی بطور سطحی از آنها گذشته‌اند. شادی بی‌اندازه من از آنجاست که این کتاب، با همه کمیهای آن در گذشته توانسته است نقش جدی در ساختمان فکری دانش‌آموزان علاقه‌مند به ریاضی داشته باشد و آرزوی من اینست که باز هم مثل گذشته مورد انتقاد همکاران و دانش‌آموزان در جهت به‌تر شدن کتاب قرار گیرم.

اول تیر - ۱۳۵۲

پرویز شهریاری

مطالب کتاب

۱. جبر از صفحه ۵ تا صفحه ۳۵
اطلاعات کلی (۷)، نگاهی به تاریخ (۱۰)، وضع کنونی جبر (۲۶).
۲. تجزیه عبارتهای جبری از صفحه ۳۹ تا صفحه ۴۳
روش ضریبهای نامعین (۳۳)، استفاده از روش حل معادلهها (۳۴)، استفاده از خاصیت دوری بودن عبارت (۳۵)، استفاده از جذر عبارتهای جبری (۳۸)، تمرینها (۴۱).
۳. بیان تابع از صفحه ۴۵ تا صفحه ۵۵
تابع $f(x)$ (۴۷)، مجموع ضریبهای يك چندجمله‌ای (۴۹)، تمرینها (۵۰).
۴. قابلیت تقسیم از صفحه ۵۷ تا صفحه ۷۶
مقسوم علیه آشکار و مقسوم علیه مخفی (۵۹)، بزرگترین مقسوم علیه مشترك بین دو عبارت جبری (۵۹)، قابلیت تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax + b$ (۶۱)، قابلیت تقسیم بر $ax^n + b$ (۶۲)، قابلیت تقسیم بر $[p(x)]^n$ (۶۴)، استفاده از ریشه‌های موهومی (۶۷)، تمرینها (۷۱).
۵. عبارتهای گنگ از صفحه ۷۷ تا صفحه ۱۰۱
وجود عددهای گنگ (۷۹)، یادآوری يك قرارداد برای تبدیلهای جبری (۸۱)، گویا کردن مخرج یا صورت کسرها (۸۵)، تبدیل رادیکالهای مرکب (۹۱)، تمرینها (۹۵).
۶. معادله‌ها و دستگاههای جبری از صفحه ۱۰۳ تا صفحه ۱۸۰

حل معادله به صورت $(x+a)^4 + (x+b)^4 = c$ (۱۰۵)، حل معادله به صورت $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = m$ (۱۰۷)، حل معادله به صورت $(ax+b)^4 + (cx+d)^4 = (\alpha x + \beta)^4$ (۱۱۱)، تبدیل نقش مجهول و پارامتر به یکدیگر (۱۱۲)، استفاده از بعضی رابطه‌های مثلثاتی (۱۱۵)، جستجوی ریشه‌های گویا (۱۱۹)، راه حل‌هایی برای معادله‌های درجه سوم و درجه چهارم (۱۲۵)، استفاده از وجود رابطه‌های بین بعضی از ریشه‌ها (۱۲۸)، نکته‌ای درباره معادله‌های گنگ (۱۳۰)، گویا کردن معادله به صورت $\sqrt[n]{u} \pm \sqrt[n]{v} = a$ (۱۳۱)، يك نکته دیگر (۱۳۲)، معادله‌های معکوسه (۱۳۴)، معادله‌هایی که باروش معادله‌های معکوسه حل می‌شوند (۱۴۰)، معادله‌های شامل قدر مطلق (۱۴۲)، معادله‌های شامل «تابع قسمت صحیح» (۱۴۵)، محاسبه مجموع توانهای متشابه ریشه‌ها (۱۴۷)، تشکیل معادله‌ها (۱۵۰)، ریشه‌های مشترک معادله‌ها (۱۵۳)، استفاده از رابطه‌های بین ریشه‌ها و ضریبها در حل دستگاهها (۱۵۸)، دستگاههای متجانس نسبت به مجهولها (۱۶۲)، دستگاههای خطی همگن (۱۶۴)، تمرینها (۱۶۷).

۷. معادله‌های سیال از صفحه ۱۸۱ تا صفحه ۲۴۴
معادله‌های سیال درجه اول (۱۸۳)، معادله‌هایی که جواب صحیح ندارند (۱۸۴)، معادله‌هایی که جواب مثبت ندارند (۱۸۵)، رابطه کلی جوابهای معادله سیال (۱۸۵)، روش جستجو (۱۸۸)، حالت خاص معادله سیال (۱۸۹)، راه حل کلی معادله سیال (۱۹۰)، ساده کردن حل معادله (۱۹۳)، جوابهای

مثبت (۱۹۶)، حل معادله‌های به صورت $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (۲۰۱)، حل معادله‌های به صورت $a^2x^2 \pm b^2y^2 + cx + dy + e = 0$ (۲۰۶)، معادله‌هایی که جواب ندارند (۲۰۹)، استفاده از تجزیه ناقص (۲۱۰)، حل معادله $x^2 + y^2 = z^2$ (۲۱۳)، معادله سیال درجه سوم (۲۱۶)، تمرینها (۲۱۹).

۸. استقراء ریاضی از صفحه ۲۲۵ تا صفحه ۲۴۳
استقراء ناقص (۲۲۷)، استقراء کامل یا استقراء ریاضی (۲۳۰)، اشتباه نکنید (۲۳۵)، روشهای دیگر استقراء ریاضی (۲۳۶)، تمرینها (۲۳۸).

۹. کسرهای مسلسل از صفحه ۲۴۵ تا صفحه ۲۷۰
تعریف (۲۴۷)، تبدیل کسر معمولی به کسر مسلسل (۲۴۸)، کسرهای متقارب (۲۵۰)، قانون تشکیل کسرهای متقارب (۲۵۱)، چند قضیه (۲۵۴)،

نتیجه‌ها (۲۵۷)، مقدار تقریبی يك كسر (۲۶۰)، گرفتن جذر (۲۶۱)، جستجوی جوابهای معادله سیال (۲۶۳)، محاسبهٔ لگاریتم (۲۶۵)، تمرینها (۲۶۶).

۱۰. تقارن در جبر از صفحه ۲۷۱ تا صفحه ۲۸۵
تعریف (۲۷۳)، مجموع توانهای متشابه (۲۷۳)، حل دستگاهها (۲۷۵)،
حل معادله‌های گنگ (۲۷۹) تجزیهٔ عبارتهای جبری (۲۸۰)، تمرینها (۲۸۳).

۱۱. محاسبهٔ بعضی مجموعه‌ها از صفحه ۲۸۷ تا صفحه ۳۰۶
محاسبهٔ مجموع توانهای متشابه عددهای صحیح متوالی (۲۸۹)، مجموعه‌هایی
که جملهٔ عمومی آنها به صورت $f(n+\alpha) - f(n)$ باشد (۲۹۶)، استفاده
از مشتق و تابع اولیه (۳۰۱)، تمرینها (۳۰۲).

۱۲. نامعادله‌ها و نامساویها از صفحه ۳۰۷ تا صفحه ۳۴۱
حل نامعادله‌های مضاعف (۳۰۹)، نامعادله‌های شامل پارامتر (۳۱۲)، دستگاه
نامعادله‌ها (۳۱۴)، نامعادله‌های گنگ (۳۱۷)، بحث کلی در بارهٔ نامعادله‌ها
(۳۲۲)، دونکته (۳۲۵)، نامساویهای مربوط به واسطه‌ها (۳۲۷)، تمرینها
(۳۳۴).

۱۳. تمرینهایی از تصاعدها و لگاریتم از صفحه ۳۴۳ تا صفحه ۳۵۱
تصاعدها (۳۴۵)، لگاریتم (۳۴۸).

۱۴. مجموعه‌ها از صفحه ۳۵۳ تا صفحه ۳۷۳
مجموعه (۳۵۵)، عضو مجموعه (۳۵۵)، مجموعه‌های معین (۳۵۶)، زیر
مجموعهٔ يك مجموعهٔ مفروض (۳۵۶)، تساوی مجموعه‌ها (۳۵۷)، نمایش
هندسی مجموعه‌ها (۳۵۸)، حاصلجمع منطقی (اجتماع) مجموعه‌ها (۳۵۹)،
حاصلضرب منطقی (اشتراک) مجموعه‌ها (۳۶۱)، تفاضل مجموعه‌ها (۳۶۳)،
نگاشت مجموعه‌ها (۳۶۴)، مجموعه‌های مرتب (۳۶۸)، مجموعه‌های کاملاً
مرتب (۳۷۰)، تمرینها (۳۷۰).

حل مسأله‌ها از صفحه ۳۷۵ تا آخر

۱

جبر

وقتی که در دوره دبیرستان با جبر کار می‌کنیم، کمتر پیش می‌آید که به محتوی، ماهیت و روش آن، و وجه تمایزی که با دیگر شاخه‌های ریاضیات دارد بپردازیم. ولی حالا که کم و بیش با مفهومیها و مساله‌های جبری آشنا شده‌ایم، لازم است بدانیم که این شاخه ریاضیات چه موقعیتی دارد و وضع کنونی آن از چه قرار است. ضمناً اینهم لازم است که لاقلاً بطور خلاصه از تاریخچه جبر با اطلاع باشیم و بدانیم که روشها و محتوی آن با گذشت زمان دستخوش چه دگرگونیهایی شده است. از این راه است که هم مفهوم واقعی آنچه را که می‌خوانیم برایمان روشن‌تر می‌شود و هم دورنمای پیشرفت آینده آن از نظرمان دور نمی‌ماند.

آنچه را که در این فصل می‌بینید همین قصد را دنبال می‌کند و بطور کامل از آخرین چاپ فرهنگ بزرگ روسی ترجمه شده است.

۱. اطلاعات کلی

جبر یکی از رشته‌های متنوع ریاضیات است که از لحاظ قدمت می‌توان آنرا در ردیف حساب و هندسه قرار داد. نوع مسأله‌ها و روش خاص جبر، که بتدریج و از دوره‌های باستانی به وجود آمده و قوام گرفته است، آنرا از سایر رشته‌های ریاضیات جدا می‌کند. جبر تحت تأثیر نیازهای فعالیت‌های اجتماعی و به علت جستجوی روش‌های عمومی برای حل مسأله‌های حساب به وجود آمد. این روشها معمولاً منجر به تشکیل و حل معادله‌های جبری می‌شود.

مسأله‌های مربوط به حل و بحث معادله‌ها اثر فوق‌العاده‌ای در تکامل مفاهیم اولیه عدد داشته است. بررسی کلی دستگاه‌های مختلف عددی: اعداد منفی، گنگ و مختلط هم در حوزه جبر قرار می‌گیرد. ضمناً در جبر از علامت‌های حرفی (که از خصوصیت‌های مشخصه آنست) استفاده می‌شود که به کمک آنها می‌توان خواص عمل‌های روی عددها را به صورت خلاصه و به نحوی که برای تنظیم محاسبه‌های مربوط به عبارتهای حرفی ساده باشد، ضبط کرد. محاسبه حرفی تبدیلهای اتحادی این امکان را می‌دهد که بتوانیم طبق قانون معینی (که ناشی از خاصیت عملیاست) نتیجه عمل را بشکل دیگری بنویسیم و همین مطلب ابزار جبر کلاسیک را تشکیل می‌دهد. به این ترتیب جبر با خطوط

زیر از حساب متمایز می‌شود: جبر با بکار گرفتن تبدیلهای حرفی خواص عمومی دستگاههای عددی و روشهای عمومی حل مسأله‌ها به کمک معادله را مطالعه می‌کند؛ در حالی که حساب به بررسی روشهای محاسبه روی عددهای مفروض و مشخص می‌پردازد و در مراحل بالاتر (در نظریه اعداد) خواص انحصاری و نادر عددها را مورد مطالعه قرار می‌دهد. پیشرفت جبر، روشهای آن و علامتی بودن آن تأثیر فوق‌العاده‌ای در تکامل یکی از جدیدترین رشته‌های ریاضیات، یعنی آنالیز ریاضی، داشته است. یادداشت ساده‌ترین مفاهیم اصلی آنالیز همچون کمیتهای متغیر و توابع، بدون وجود نشانه‌های حرفی ممکن نبود؛ در آنالیز و بخصوص در حساب دیفرانسیل و حساب انتگرال بطور وسیعی از ابزار جبر کلاسیک استفاده می‌شود. در هر جایی که سر و کار با عملهای مربوط به جمعها و ضربهای متشابه عددها داشته باشیم می‌توان ابزار جبر کلاسیک را بکار برد. این عملها نه تنها در مورد عددها، بلکه در مورد اشیائی با طبیعتهای بکلی متفاوت هم می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند. مشهورترین نمونه اینگونه کار برد وسیع از روشهای جبر را می‌توان در جبر برداری پیدا کرد. بردارها را می‌توان با هم جمع کرد، در عددی ضرب کرد و به دو طریق مختلف در هم ضرب نمود. این عملها درباره بردارها در بسیاری خواص شبیه خواص جمع و ضرب درباره عددهاست ولی در بعضی موارد هم بایکدیگر متفاوتند. مثلاً حاصل ضرب برداری دو بردار A و B از قانون جابجایی پیروی نمی‌کند، یعنی بردار $C = [A, B]$ ممکن است مساوی بردار $D = [B, A]$ نباشد، در

محاسبه برداری این قانون وجود دارد که $[A, B] = -[B, A]$.
 به دنبال جبر برداری، جبر تانسوری به وجود آمد که یکی از
 اساسی ترین وسایل کمکی فیزیک معاصر است. در مرزهای جبر کلاسیک،
 جبر ماتریسها و بسیاری دستگاههای دیگر جبری پیدا شد .

به این ترتیب جبر به مفهوم امروزی و وسیع خود می تواند به
 عنوان دانشی که درباره دستگاههای اشیاء با طبیعتهای مختلف بحث
 می کند، تعریف شود. در این دستگاهها عملیاتی انجام می شود که
 خاصیتهایی مخصوص بخود دارند و کم و بیش با جمع و ضرب عددها
 شبیهند. اینگونه عملها جبری نامیده می شود. جبر دستگاههایی را تنظیم
 می کند که در آنها عملهای جبری و خاصیتهای خاص این عملها تعریف
 شده است؛ مسألههایی را که بطور طبیعی از این دستگاهها ناشی
 می شود مورد بررسی قرار می دهد؛ معادلههایی که در دستگاه اشیاء جدید
 مفهوم جدیدی کسب می کنند حل و بحث می کنند (جواب این معادلهها
 ممکن است بردار، ماتریس و یا چیز دیگری باشد). این دید جدید
 در جبر، که بطور کامل در قرن بیستم پیدا شد، امکان توسعه بعدی
 کاربرد روشهای جبری را در صنعت، در ریاضیات جدید، و بخصوص در
 فیزیک فراهم کرد. علاوه بر آن، جبر به مفهوم جدید خود، رابطه
 خود جبر را با سایر رشتههای ریاضیات محکم کرد و اثر جبر را بر
 تکامل آینده این رشتهها قوت بخشید .

۲. نگاهی به تاریخ

پیشرفت اولیه . جبر به دنبال حساب به وجود آمد . مجموعه قانونهای عملی که بتدریج برای حل مسأله‌های روزانه معیشتی جمع شده بود، حساب را تشکیل می‌داد. این قانونهای حساب منجر به عملهای جمع، تفریق، ضرب و تقسیم می‌شد که ابتدا تنها روی عددهای صحیح و سپس بتدریج وبا پیشرفتی کند، روی عددهای کسری هم انجام می‌گرفت. اختلاف اساسی جبر با حساب در اینست که در جبر مقدار مجهول وارد شده است؛ که عملهای روی آن، طبق شرایطی که مسأله داده است، معادله‌ای بدست می‌دهد که از آن خود مجهول بدست می‌آید. به‌چنین تفسیری از مسأله‌های حساب حتی در مصر قدیم در پاپیروس آهمس (۱۷۰۰ - ۲۰۰۰ سال قبل از میلاد) هم اشاره شده است، در آنجا مقدار مجهول را «کوچا» می‌نامد و آنرا با علامت مربوطه هیر و گلیفی نشان می‌دهد . مصریهای قدیم مسأله‌های بفرنجتری را هم حل می‌کردند (مثلا تصاعد های حسابی و هندسی). چه تنظیم مسأله‌ها و چه حل آنها با بیان توضیحی و تنها به صورت مثالهای عددی مشخص داده می‌شد. در همه این نمونه‌ها، نه در شکل بلکه در معنا، وجود روشهای کلی در حل مشابه معادله‌های درجه اول و گاهی درجه دوم احساس می‌شود. اولین علامتهای ریاضی هم در نوشته‌های مصر قدیم وجود دارد (مثلا علامت مخصوص برای کسر).

در ابتدای قرن بیستم توانستند بسیاری از متنهای مربوط به ریاضیات و سایر زمینههای فرهنگ باستانی ملتهای قدیم بابل را (که به خط میخی بود) بخوانند. این حادثه، وجود دنیای شکفت انگیزی از فرهنگ ریاضی را، که مربوط به تا ۴۰۰۰ سال قبل از میلاد بود، در مقابل ما قرار داد. بابلیها به کمک جدولهای مخصوص مفصلی که داشتند، می توانستند انواع مسأله ها را حل کنند؛ بعضی از این مسئله ها معادل حل معادله های درجه دوم و حتی یکنوع معادله درجه سوم است. بین دانشمندانی که به بررسی تاریخ ریاضیات مشغولند این بحث در گرفت که ریاضیات بابلی را تا چه اندازه می توان جبر به حساب آورد. ولی نباید فراموش کرد که ریاضیات قدیم بصورت يك علم واحد بود و تقسیم آن خیلی بعد انجام گرفت.

در یونان باستان هندسه، کاملاً و بطور مشخص جدا شده بود. هندسه دانهای یونان باستان برای نخستین بار بررسی آگاهانه را پایه گذاشتند، به نحوی که هر قدم آن براستدلال منطقی استوار بود. نیروی این روش چنان بزرگ بود که مطالب مربوط به حساب و یا جبر هم به زبان هندسه بیان می شد: کمیت را به عنوان طول و یا حاصلضرب دو مقدار را به عنوان مساحت مستطیل مورد بررسی قرار می دادند و غیره. در زبان ریاضی امروز هم مثلاً اصطلاح «مربع» برای ضرب يك مقدار در خودش هنوز باقی مانده است، یگانگی دانش که از ویژگیهای اصلی فرهنگ باستانی است در مورد ریاضیات یونان باستان صادق نیست؛ هندسه را رشته ای منطقی به حساب می آوردند که برای درك فلسفی

لازم است، درحالی که، بنا به اعتقاد افلاطون فیلسوف ذهن گرا، همه رشته‌های محاسبه‌ای یعنی مطالب مربوط به حساب و جبر زمینه شایسته‌ای برای علم نداشتند. بدون تردید، این رشته‌ها هم (براساس سنتهای بابلی و مصری) پیشرفت خود را ادامه داده است، منتهی تنها رساله دیوفانت به نام «حساب» (اسکندریه- حدود قرن سوم میلادی) به‌ما رسیده است که در آن بطور مستقیم با معادله‌های درجه اول و درجه دوم کار شده است؛ در این رساله می‌توان مفهوم عددهای منفی را هم بصورت جنینی پیدا کرد.

میراث دانش یونان باستان به دانشمندان شرق میانه، آسیای مرکزی، بین‌النهرین و افریقای شمالی رسید که زبان علمی بین المللی برای آنها عربی بود (همانطور که زبان علمی دانشمندان غرب در قرون وسطی زبان لاتینی بود)، به همین مناسبت این دوره را در تاریخ ریاضیات گاهی «عربی» گفته‌اند. در واقع یکی از مراکز بزرگ علمی و فرهنگی این زمان (قرنهای نهم تا پانزدهم) آسیای مرکزی بود. بین نمونه‌های فراوان دانشمندان این دوره می‌توان از محمد بن موسی خوارزمی ریاضی-دان و منجم قرن نهم و بیرونی دانشمند بزرگ که رصدخانه الخ بیك را در سمرقند در قرن پانزدهم به وجود آورد، نام برد. دانشمندان قرون وسطی در شرق، ریاضیات یونان و هند را با اصلاحات جدی و بکر در اروپا منتشر کردند، ضمناً بسیاری از آنها در زمینه جبر کار کردند. خود کلمه «جبر» عربی است و برای نخستین بار خوارزمی این نام را روی یکی از نوشته‌های خود گذاشت (الجبر به معنای یکی

از روشهای تبدیل معادله‌هاست). از زمان خوارزمی می‌توان جبر را یکی از رشته‌های جداگانه ریاضیات به حساب آورد.

ریاضی‌دانهای قرون وسطی در شرق، همه عملها را با بیان جمله‌ای (ونه بیان علامتی) شرح می‌دادند. پیشرفت بعدی جبر تنها وقتی ممکن شد که توانستند برای عملها، علامتهای ساده و کلی در نظر بگیرند. این پیشرفت به‌کندی و در راهی پریپیچ و خم انجام گرفت. قبلاً از علامت کسر در مصر قدیم صحبت کردیم. دیوفانت از علامت i (حرف اول کلمه $i808$ به معنای مساوی) به عنوان علامت تساوی استفاده می‌کرد، هندیها هم علامتهای اختصاری مشابهی داشتند (قرنهای پنجم تا هفتم میلادی)، ولی بعد این علامتها دوباره از بین رفتند. پیشرفت بعدی جبر در ایتالیا و با پیروی از ریاضی‌دانهای قرن دوازدهم میلادی در شرق ممکن شد. لئونارد پیزانسکی (قرن سیزدهم میلادی) - مشهورترین ریاضیدان این دوره - مسأله‌های جبری را مورد مطالعه قرار داد. بتدریج روشهای جبری در عملهای محاسبه‌ای رخنه کرد و در ابتدا بسختی به رقابت با روشهای مربوط به حساب پرداخت. دانشمندان ایتالیایی، ضمن اینکه خود را با عمل سازگاری کردند، دوباره ساده نویسی را به وجود آوردند، مثلاً بجای کلمه‌های «به اضافه» و «منهای» از حرفهای لاتینی m و p با خط کوتاهی بالای آن استفاده می‌کردند. در نوشته‌های ریاضی اواخر قرن پانزدهم علامتهای «+» و «-»، که امروز مورد قبول است، ظاهر شده است، ضمناً دلیلهایی وجود دارد که این علامتها از مدتها قبل از این کاربرد، در کارهای تجارتي برای نشان دادن اضافه یا کسری

وزن بکار می‌رفته است .

سایر علامتها سرعت به‌وجود آمدند (علامت توان، ریشه، پرانتز و غیره) . در اواسط قرن هفدهم دستگاه علامتهای جبر امروزی بطور کامل معین شده بود ، بنحوی که نه تنها برای نشان دادن مقدار مجهول، بلکه بطور کلی برای هر مقدار که در مسأله وارد می‌شد ، از حرفها استفاده می‌کردند . قبل از این اصلاح، که بطور قطع بوسیلهٔ ف . ویت (اواخر قرن شانزدهم) تثبیت شد ، در جبر و حساب قانونها و استدلالهای کلی وجود نداشت و روی نمونه‌های خاص عددی بحث می‌شد و تقریباً ممکن نبود بعضی قضیه‌های کلی بیان کرد . حتی کتابهای درسی مقدمه‌ای این زمان فوق‌العاده مشکل بود ، زیرا بجای يك قاعدهٔ کلی ، از دهها قاعدهٔ خاص استفاده می‌کردند . ویت برای نخستین بار شروع به نوشتن مسأله‌ها به صورت کلی کرد ، او مقدارهای مجهول را با حرفهای صدادار $A, E, I, \dots$ و مقدارهای معلوم را با حرفهای بی‌صدای $B, C, D, \dots$ نشان می‌داد . ویت از علامتهایی که در این زمان برای عملهای ریاضی وجود داشت برای مربوط کردن این حرفها بیکدیگر استفاده می‌کرد . به این ترتیب برای نخستین بار دستورهای حرفی به‌وجود آمد که برای جبر امروزی از خصوصیتهای اصلی بشمار می‌رود . از زمان رنه دکارت (قرن هفدهم میلادی) به بعد اغلب حرفهای آخر الفبا (x, y, z) را برای مجهول بکار می‌بردند .

بوجود آمدن علامتگذاری رمزی و انجام عمل روی حرفها ، که جانشین هر عدد مشخص دلخواه شده‌اند ، اهمیت فوق‌العاده و استثنایی

دارد . بدون این وسیله - یعنی زبان دستورها - پیشرفت درخشان ریاضیات عالی ، که از قرن هفدهم شروع شد ، به وجود آمدن آنالیز ریاضی ، بیان ریاضی قانونهای مکانیک و فیزیک و غیره غیر قابل تصور است .

محتوی جبر در زمان دیوفانت شامل معادله‌های درجه اول و درجه دوم بود . ریاضی‌دانهای یونان باستان ظاهراً از راههای هندسی به معادله درجه دوم می‌رسیدند ، زیرا مسأله‌هایی که به این معادله منجر می‌شوند بطور طبیعی ضمن تعیین مساحتها و ساختمان دایره طبق مفروضات مختلف ، به وجود می‌آیند . ولی در یک مورد اساسی ، تعیین جواب معادله بین ریاضی‌دانهای باستان و امروز اختلاف وجود دارد : آنها از عددهای منفی استفاده نمی‌کردند . بهمین مناسبت از نظر ریاضی‌دانهای باستان حتی معادله درجه اول هم همیشه جواب نداشت . برای بررسی معادله درجه دوم حالت‌های خاص مختلفی را (که به علامت ضریبها بستگی داشت) در نظر می‌گرفتند . ریاضی‌دانهای هندی (در قرن دهم میلادی) قدم اساسی را در مورد بکار گرفتن عددهای منفی برداشتند ، ولی دانشمندان شرق در قرون وسطی این راه را دنبال نکردند . عادت به عددهای منفی بتدریج به وجود آمد؛ به این منظور بخصوص محاسبه‌های بازرگانی کمک زیادی کرد ، در این نوع محاسبه‌ها عدد منفی معنایی روشن دارد : زیان ، هزینه ، کسری و غیره . عددهای منفی بطور قطعی در قرن هفدهم و بعد از آنکه دکارت تعبیر هندسی آنها را برای ساختمان هندسه تحلیلی مورد استفاده قرار داد ، مورد قبول قرار گرفت .

به وجود آمدن هندسه تحلیلی در عین حال پیروزی جبر هم بود. اگر قبلاً یونانیهای باستان مسأله‌های جبری را به شکل هندسی در می‌آوردند، حالا دیگر برعکس، وسیله بیان جبری چنان ساده‌وروشن است که مسأله‌های هندسی را به زبان رابطه‌های جبری تبدیل می‌کنند. از بحث تفصیلی مربوط به توسعه تدریجی حوزه عددها، پیدایش عددهای منفی، گنگ، موهومی و غیره می‌گذریم؛ ولی باید متذکر شویم که لزوم پیدایش این عددها در جبر هم بشدت احساس می‌شود، مثلاً عددهای گنگ مربوط به ریشه دوم ضمن حل معادله‌های درجه دوم بوجود آمدند. البته ریاضی‌دانهای یونان و آسیای میانه نمی‌توانستند از کنار ریشه گرفتن رد شوند و روشهای جالبی برای محاسبه تقریبی آنها ابداع کرده بودند؛ ولی اعتقاد به عدد گنگ به عنوان يك عدد، خیلی بعدتر پیدا شد. پیدایش عددهای مختلط یا «موهومی» هم به دوره بعد مربوط می‌شود (قرن هجدهم میلادی).

به این ترتیب، اگر از جنبه عددهای موهومی بگذریم، جبر قرن هجدهم تقریباً شامل همان مطالبی بود که تا امروز در برنامه دبیرستانی آموخته می‌شود. این جبر عملهای جمع و ضرب، و عملهای عکس آنها یعنی تفریق و تقسیم و همچنین بتوان رساندن «حالت خاص ضرب» و عکس آن یعنی ریشه گرفتن را در بر می‌گیرد. این عملها روی عددها و یا حرفها انجام می‌گیرند که می‌توانند مثبت یا منفی، گویا یا گنگ باشند. این عملها در حل مسأله‌هایی بکار می‌رفت که در واقع منجر به معادله‌های درجه اول و درجه دوم می‌شد. امروز هر فرد

باسوادی این مقدار جبر را می‌داند. این همان جبر «مقدماتی» است که در صنعت، فیزیک و سایر رشته‌های علمی و عملی بکار می‌رود. ولی محتوی علم جبر و کاربرد آن به‌هیچ‌وجه به اینجا محدود نمی‌شود، تنها قدم‌های اولیه به سختی و کندی برداشته شد. از قرن شانزدهم و بخصوص از قرن هجدهم، تکامل سریع جبر شروع می‌شود و در قرن بیستم شکفتگی جدیدی پیدا کرد.

بیان جبر مقدماتی (به صورتی که در ابتدای قرن هجدهم معین شده بود) به زبان شکل، برای نخستین بار در اثر معروف ل. ف. ماگنیتسکی بنام «حساب» داده شده است که در سال ۱۷۰۳ چاپ شد.

جبر در قرن‌های هجدهم و نوزدهم. انتهای قرن هفدهم و ابتدای قرن هجدهم، نقطه عطفی در تاریخ ریاضیات و علوم طبیعت بشمار می‌رود: در این زمان آنالیز بی‌نهایت کوچکها (حساب دیفرانسیل و انتگرال) به وجود آمد و به سرعت منتشر شد، این نقطه عطف بخاطر پیشرفت چشمگیری که مورد نیاز صنعت و علوم طبیعت بود و بر پایه تکامل قبلی جبر به وجود آمد. بخصوص علامتهای حرفی و عمل روی آنها حتی در قرن‌های شانزدهم و هفدهم موجب شده بود که به کمیتهای ریاضی همچون متغیرها بنگرند، چیزی که برای آنالیز بی‌نهایت کوچکها از خصوصیات اصلی است، زیرا در اینجا تغییر متصل یک کمیت معمولاً به تغییر متصل کمیت دیگری مربوط می‌شود که تابع آن نامیده می‌شود. در قرن‌های هفدهم و هجدهم، جبر و آنالیز کاملاً در ارتباط با

یکدیگرپیش رفتند. تصور تابعی در جبر نفوذ کرد، دراینجهت نیوتون آنرا غنی تر کرد. از طرف دیگر جبر، رابطه ها و تبدیلهای پرنس خود را به آنالیز داد که در مرحله اول محاسبه انتگرالی و نظریه معادله های دیفرانسیلی نقش بسیار بزرگی به عهده دارد. مهمترین واقعه در جبر این دوره، ظهور دوره جبر لئوناردو بود که در آن زمان در آکادمی علوم پترزبورگ کار می کرد. این دوره ابتدا به زبان روسی (۶۹-۱۷۶۸)، سپس به کرات به زبانهای دیگر چاپ شد. تفاوت جبر آنالیز در قرنهای هجدهم و نوزدهم به این ترتیب مشخص شد که جبر با موضوع خاص خود که منفصل و محدود است، سر و کار دارد. این خصوصیت جبر را نیکلای ایوانویچ لباچوسکی در نیمه اول قرن نوزدهم در کتاب خود بنام «جبر یا محاسبه محدودها» مشخص کرد؛ (۱۸۳۴). جبر با عملهای اصلی (جمع و ضرب) سروکار دارد و این عملها را به تعداد محدودی انجام می دهد.

ساده ترین نتیجه ضرب عبارتست از يك جمله مثل $5a^2bx^2y$. مجموع تعداد محدودی از اینگونه جمله ها را (به شرط اینکه باتوانهای صحیح باشند) چند جمله ای گویند. اگر توجه خود را به یکی از حرفها و مثلاً x ، معطوف کنیم، می توان چند جمله ای را به صورت $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ نوشت، که در آن ضریبهای $a_0, \dots, a_1, a_n$ بستگی به x ندارند. این يك چند جمله ای از درجه n است (و یا به زبان دیگر تابع گویا و صحیح). جبر قرنهای هجدهم و نوزدهم، قبل از هر چیز، جبر چند جمله ایهاست.

به این ترتیب حجم مطالب جبر به مراتب محدودتر از حجم مطالب آنالیز می‌شود، ولی با وجود این، عملها و مطالب ساده‌ای که موضوع جبر را تشکیل می‌دهند، عمیق‌تر و مفصل‌تر مورد مطالعه قرار می‌گیرد؛ بخصوص به مناسبت ساده‌تر بودن، آموزش آنها اهمیت فوق‌العاده‌ای برای مجموعه ریاضیات دارد. در این میان جبر و آنالیز وجوه مشترك خود را حفظ کردند؛ و این وجوه مشترك را می‌توان بسادگی معین کرد. مثلاً آنالیز، علامتها را از جبر گرفته است، بدون این علامتها پیدایش آنالیز ممکن نبود. در موارد زیادی مطالعه چند جمله‌ایها به عنوان ساده‌ترین نوع تابع، راه را برای نظریه کلی توابع باز کرد. از این به بعد در مطالعه تاریخی ریاضیات، تمایل بطرف بررسی توابع و چند جمله‌ایهای بفرنجتر و یا رشته چند جمله‌ایها (که ساده‌ترین آنها رشته تیلور است) وجود دارد. از طرف دیگر جبر گاهی از فکر اتصال هم استفاده می‌کند، ولی تصور تعداد نامحدود اشیاء، به صورت جدید و خاص خود، بر جبر دوران اخیر مسلط می‌شود.

اگر يك چند جمله‌ای را مساوی صفر (و یا بطور کلی مساوی يك عدد معین) قرار دهیم، يك معادله جبری بدست می‌آید. از نظر تاریخی نخستین مسأله جبر عبارت از حل معادله بود، یعنی پیدا کردن ریشه‌های آن؛ ریشه‌های معادله عبارتند از مقدارهایی از مجهول x ، که به ازای آنها چند جمله‌ای مساوی صفر شود. از زمان دورتری جوابهای معادله درجه دوم $x^2 + px + q = 0$ به صورت زیر معلوم بود:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

حل جبری معادله‌های درجه سوم و درجه چهارم در قرن شانزدهم میلادی پیدا شد، برای معادله به صورت $x^2 + px + q = 0$ (که هر معادله درجه سوم را می‌توان به آن تبدیل کرد) رابطه زیر داده شده است:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

این رابطه را که به رابطه کاردان معروف است (اگر چه این سؤال وجود دارد که آیا خود کاردان این رابطه را بدست آورد یا از سایرین اقتباس کرد) نمی‌توان حل کامل معادله به حساب آورد. روش حل معادله جبری درجه چهارم را ل. فراری پیدا کرد. بعد از آن تلاش پیگیرانه‌ای برای جستجوی رابطه‌هایی که بتوانند معادله‌های درجه‌های بالاتر را به طریق مشابهی حل کنند، شروع شد؛ یعنی می‌خواستند جوابها را به کمک ریشه گرفتن (حل به کمک رادیکالها) پیدا کنند. این تلاشها حدود سه قرن ادامه داشت، تا اینکه در ابتدای قرن نوزدهم ن. آبل و ا. گالوا ثابت کردند که معادله‌های بالاتر از درجه چهارم در حالت کلی به کمک رادیکالها قابل حل نیستند؛ معلوم شد که معادله‌های درجه n وجود دارد که اگر n بزرگتر یا مساوی ۵ باشد، به کمک رادیکالها قابل حل نیستند. از این قبیل مثلاً می‌توان معادله $x^5 - 2x - 2 = 0$ را نام برد. این کشف اهمیت فوق‌العاده‌ای داشت، زیرا معلوم شد که ریشه‌های معادله‌های جبری بفرجتر از آن هستند

که بوسیلهٔ رادیکالها قابل بیان باشند. گالوا تنها به جنبهٔ منفی کار اکتفا نکرد و شروع به طرح نظریهٔ عمیق‌تر معادلات کرد و بهر معادله‌ای گروه تبدیل ریشه‌های آنرا مربوط کرد. حل معادله به کمک رادیکالها به معنای تبدیل معادلهٔ اولیه به صورت معادلهٔ $y^m = a$ است (که خود آن بیان می‌کند که $y = \sqrt[m]{a}$). معلوم شد که تبدیل به‌چنین معادله‌ای در حالت کلی ممکن نیست، ولی سؤالی پیش آمد: کدام معادله‌های ساده‌تر می‌توانند منجر به حل معادله‌های معینی شوند؟ مثلاً از طریق ریشه‌های چه معادله‌هایی، ریشه‌های معادلهٔ مفروض به صورت گویا، یعنی به کمک چهار عمل جمع، تفریق، ضرب و تقسیم، بیان می‌شود. تکامل نظریهٔ گالوا بطرف این مفهوم وسیع‌تر تا زمان ما ادامه دارد.

از جهت عملی، برای محاسبهٔ ریشه‌های معادله‌ای که ضریب‌های آن داده شده است، نیازی به داشتن رابطه‌های کلی حل برای معادله‌های از درجه‌های بالاتر نیست، زیرا حتی در مورد معادله‌های درجهٔ سوم و چهارم هم رابطه‌های جواب در عمل خیلی کم مورد استفاده قرار می‌گیرند. حل عددی معادله‌ها راه دیگری پیدا کرد و از روشهای محاسبهٔ تقریبی کمک گرفت، بخصوص از اینجهت که در عمل (مثلاً در نجوم و صنعت) خود ضریبها هم معمولاً از طریق اندازه‌گیری بدست می‌آیند و به‌همین مناسبت تقریبی هستند.

محاسبهٔ تقریبی ریشه‌های معادله یکی از مسائل مهم ریاضیات محاسبه‌ای است و تا امروز روشهای بسیار زیادی برای انجام آن پیدا

شده است که بخصوص با استفاده از ماشینهای حساب امروزی قدرت بیشتری گرفته است. ولی ریاضیات تنها به شرح روشهای محاسبه نمی-پردازد. حتی در عمل و از نظر کاربرد ریاضیات هم جهت دیگر کار کم اهمیت نیست، این جهت راه صرفاً نظری و بدون محاسبه و دادن جواب در مقابل سؤالاتی طرح شده است. در حوزه نظریه معادله‌های جبری یکی از این سؤالات درباره تعداد ریشه‌ها و خصوصیت‌های آنهاست. جواب این سؤال مربوط به این است که ما با چگونه عددهایی سر و کار داریم. اگر حوزه عددهای مثبت و منفی را در نظر بگیریم، معادله درجه اول همیشه يك جواب دارد و این جواب هم منحصر بفرد است. ولی معادله درجه دوم ممکن است بین عددهای مثبت یا منفی، یعنی عددهای حقیقی، جوابی نداشته باشد، مثلاً معادله $x^2 + 2 = 0$ به ازای هیچ عدد مثبت یا منفی x صادق نیست، زیرا سمت چپ تساوی همیشه مثبت است و نمی‌تواند مساوی صفر شود. نمایش جواب به صورت $x = \sqrt{-2}$ ، تا زمانی که ریشه دوم عددهای منفی را تعریف نکنیم، معنایی نخواهد داشت. همینگونه مسائل بود که ریاضی‌دانها را به فکر عددهای موهومی انداخت. اگرچه قبلاً هم گاهی از آنها استفاده می‌شد، ولی ورود عددهای موهومی به علم بطور قطعی در قرن نوزدهم انجام گرفت. این عددها بوسیله بسیار مهمی نه تنها در جبر، بلکه در همه رشته‌های ریاضیات و پهنه کاربرد آنها تبدیل شدند. حالا که دیگر وجود عددهای موهومی عادی شده است، جنبه اسرار آمیز و «موهومی» خود را از دست داده‌اند و به همین مناسبت دیگر اغلب بجای موهومی، آنها

را عدد‌های مختلط می‌نامند .

اگر وجود عدد‌های مختلط را قبول کنیم ، معلوم می‌شود که هر معادله درجه n دارای ریشه است ، ضمناً این حکم برای معادله‌هایی هم که ضریب‌های موهومی دارند صحیح است. این قضیه مهم، که نام قضیه اصلی جبر را بخود گرفته است ، برای نخستین بار در قرن هفدهم و بوسیله آ. ژیرار ریاضی‌دان فرانسوی طرح شد، ولی اثبات دقیق آن در قرن هجدهم و بوسیله ک. گاوس انجام گرفت ؛ از این زمان به بعد دهها اثبات مختلف دیگر هم داده شده است . همه این استدلالها، باکم و بیش تفاوت ، بابکار گرفتن مفهوم پیوستگی انجام گرفت و بنابراین اثبات قضیه اساسی جبر در خارج از مرزهای خود جبر ممکن شد و یکبار دیگر پیوستگی علوم ریاضی را به یکدیگر ثابت کرد.

اگر x_i یکی از ریشه‌های معادله جبری زیر باشد :

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

سادگی می‌توان ثابت کرد که چند جمله‌ای سمت چپ تساوی بر $x - x_i$ قابل قسمت است. از قضیه اساسی جبر به سهولت نتیجه می‌شود که هر چند جمله‌ای درجه n به n عامل درجه اول تجزیه می‌شود ، یعنی اتحاد زیر برقرار است :

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = a_0 (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

ضمناً چند جمله‌ای تنها به یک طریق می‌تواند به ضرب عواملی از

این نوع تجزیه شود .

بنابراین معادله درجه n دارای n ریشه است . در حالت‌های خاص ،

ممکن است بعضی از عوامل با هم مساوی باشند، یعنی بعضی از ریشه‌ها چند بار تکرار شده باشند (ریشه‌های تکراری)؛ یعنی تعداد ریشه‌های متمایز ممکن است کمتر از n باشد. اغلب محاسبه خود ریشه‌ها به اندازه کشف چگونگی خواص این ریشه‌ها اهمیت ندارد. مثل قاعده‌ای که دکارت به نام «قانون علامتها» پیدا کرد: تعداد ریشه‌های مثبت معادله بیشتر از تعداد تغییرهای متوالی علامت در ضریبهای آن نیست (و اگر کمتر از آن باشد، به تعداد زوج کمتر است)؛ مثلاً در معادله $x^5 - 4x - 2 = 0$ تنها یک تغییر علامت در ضریبهای متوالی وجود دارد (ضریب جمله اول مثبت و بقیه ضریبها منفی است)، بنابراین این بدون حل معادله می‌توان نتیجه گرفت که تنها یک ریشه مثبت دارد؛ سؤال کلی مربوط به تعداد ریشه‌های حقیقی معادله در یک فاصله مفروض با قانون شتورم جواب داده شد. این مطلب هم بسیار مهم است که برای معادله با ضریبهای حقیقی، تعداد ریشه‌های مختلط زوج است؛ اگر معادله‌ای ریشه $a + bi$ را قبول کند، $a - bi$ هم ریشه دیگری از این معادله است. در عمل گاهی مسأله‌های بخرنجتری از این نوع مطرح می‌شود؛ مثلاً در مکانیک ثابت می‌شود که حرکت وقتی پایدار است که یک معادله جبری چنان ریشه‌هایی داشته باشد (حتی ریشه‌های مختلط) که قسمت حقیقی آنها منفی باشند و بنابراین این مسأله منجر به جستجوی شرطهایی می‌شود که برای آنها، ریشه‌های معادله دارای خاصیت مورد نظر باشند.

بسیاری از سؤالهای نظری و عملی منجر به یک معادله نمی‌شود،

بلکه يك دستگاه معادله‌ها با چند مجهول بدست می‌آید؛ حالت دستگاه معادله‌های خطی در این مورد اهمیت خاص دارد، یعنی دستگاه m معادله درجه اول با n مجهول:

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

در اینجا $x_1, \dots, x_n$ مجهولها هستند و ضریبها چنانند که علامتهای زیر آنها شماره معادله و شماره مجهول را معین می‌کند. اهمیت دستگاه معادله‌های درجه اول تنها مربوط به سادگی آنها نیست. در عمل (و مثلاً برای جستجوی اصلاحی در محاسبه‌های نجومی، برای تخمین اشتباه در محاسبه‌های تقریبی و غیره) اغلب با مقادیرهای کوچکی سروکار داریم که از توانهای بزرگ آنها می‌توان صرف‌نظر کرد (به مناسبت اینکه بسیار کوچکند)، به نحوی که معادله‌های مربوط به این مقادیرها از نخستین تقریب منجر به معادله‌های خطی می‌شوند. اهمیت این مطلب هم کم نیست که حل دستگاه معادله‌های خطی نقش اساسی در حل عددی مساله‌های تجربی مختلفی دارد. حتی لایب‌نیتس (۱۷۰۰) هم به این مطلب توجه کرد که از ضریبهای a_{ik} دستگاه معادله‌های خطی جدولی تشکیل می‌شود و ثابت کرد که از این ضریبها (در حالت $m=n$) يك دترمینان بوجود می‌آید که به کمک آن می‌توان درباره دستگاه معادله‌های خطی بحث کرد. بعدها این جدولها، یا ماتریسها، موضوع مستقلی برای مطالعه شدند، زیرا معلوم شد که نقش آنها به

بررسی دستگاههای خطی محدود نمی‌شود. نظریهٔ دستگاه معادله‌های خطی و نظریهٔ ماتریسها در زمان ماکسب اهمیت زیادی کرده‌اند و یکی از رشته‌های اساسی علم، یعنی جبر خطی، را تشکیل می‌دهند.

۲. وضع کنونی جبر

عرصهٔ فعالیت ریاضیات در طول زمان گسترش یافته و زمینهٔ این گسترش رو به افزایش است. اگر در قرن هجدهم میلادی، ریاضیات اساس کار مکانیک و نجوم بود، در قرن نوزدهم برای شاخه‌های مختلف فیزیک لازم شد و امروز روشهای ریاضیات حتی در رشته‌هایی از دانش بشری که بکلی دور از ریاضیات بنظر می‌رسند، مثل زیست‌شناسی، زبان‌شناسی، جامعه‌شناسی و غیره نفوذ کرده است. هر نوع کار برد تازه‌ای که برای ریاضیات پیدا می‌شود، فصلهای جدیدی را در خود ریاضیات به وجود می‌آورد. این وضع تعداد بسیار زیادی شاخه‌های مختلف در ریاضیات پدید آورده است که اختلافشان در میدان مطالب مورد بررسی آنهاست (نظریهٔ توابع متغیرهای مختلط، نظریهٔ احتمالات، نظریهٔ معادله‌های فیزیک ریاضی و غیره)؛ و جدیدتر: نظریهٔ انفورماتسیون، نظریهٔ اداره خودکار و غیره). با وجود همهٔ این تجزیه و تفرق، ریاضیات به صورت یک علم واحد باقی ماند. این یگانگی در نتیجهٔ تکامل و تکمیل یک رشته افکار و نقطه نظرهای کلی و متحدکننده حفظ شده است. این تمایل به یگانگی در ماهیت علوم ریاضی نهفته است که با روش انتزاعی سروکار دارد و علاوه بر آن اغلب باعث می‌شود که در

بررسی همهٔ انواع مساله‌های متفاوتی که در رشته‌های مختلف دانش بشری پیش می‌آید، تنها از يك نوع وسیلهٔ ریاضی استفاده کنیم.

جبر امروزی به معنای مطالعه عملیاتی روی اشیاء دلخواه ریاضی فهمیده می‌شود؛ جبر یکی از شاخه‌های ریاضیات است که مفاهیم و روشهای کلی را برای همهٔ ریاضیات منظم می‌کند. این نقش جبر را توپولوژی هم دارد، که در آن خواص کاملاً کلی‌تر ابعاد متصل مورد مطالعه قرار می‌گیرد. جبر و توپولوژی، با وجود اینکه موضوعهای مختلفی برای مطالعه دارند، چنان بهم مربوطند که به سختی می‌توان بین آنها خط فاصل کشید. برای جبر امروزی این خصوصیت در مرکز توجه است که خاصیت عملها را مورد توجه قرار می‌دهد، نه اشیایی را که این عملها روی آنها انجام می‌گیرد. سعی می‌کنیم این مطلب را روی نمونهٔ ساده‌ای روشن کنیم. دستور $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ را همه می‌دانند. این نتیجه به کمک رشته تساویهای زیر بدست آمده است:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) = (a+b)a + (a+b)b = \\ &= (a^2 + ba) + (ab + b^2) = a^2 + (ba + ab) + b^2 = \\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

برای استدلال، دوبار از قانون بخشی استفاده کرده‌ایم:

$$c(a+b) = ca + cb \quad (\text{نقش } c \text{ را } a+b \text{ بازی می‌کند}),$$

$$(a+b)c = ac + bc \quad (\text{نقش } c \text{ را } a \text{ و } b \text{ به عهده دارند}); \quad \text{از قانون}$$

شرکت‌پذیری استفاده کرده‌ایم و به کمک آن برای جمع، جمله‌ها را گروه-

بندی کرده‌ایم و بالاخره از قانون جابجائی $ab=ba$ استفاده کرده‌ایم. اینکه اشیا یی که به وسیله a و b نشان داده‌ایم چی هستند، مهم نیست؛ مهم این است که آنها به دستگاه اشیا یی تعلق دارند که در مورد آنها دو عمل جمع و ضرب تعریف شده است و این عملها خاصیتها یی دارند که مربوط به عملها هستند و نه اشیا. به این ترتیب، برای حالتی هم که a و b بردارهای در صفحه یا فضا باشند، باز هم این دستور صحیح است: جمع ابتدا به صورت جمع برداری است و سپس به صورت جمع عددها، ضرب هم به صورت ضرب داخلی بردارهاست. بجای a و b می‌توان ماتریسهای خاصی را قرار داد (یعنی ماتریسهایی که در مورد آنها $ab=ba$ باشد، خاصیتی که در مورد ماتریسها ممکن است وجود نداشته باشد)، یا عوامل دیفرانسیل دو متغیر مستقل را وغیره.

خاصیت عملهای که روی اشیا ریاضی در شرایط متفاوت انجام می‌شود، گاهی بکلی متفاوت و گاهی با وجود اشیا مختلف، یکسان است. با کنار گذاشتن طبیعت اشیا، و تثبیت خاصیتهای تعریفی عملها روی این اشیا، به مفهومهای مجموعه‌ها و دستگاههای جبری می‌رسیم. نیاز پیشرفت علوم، یک رشته دستگاههای جبری را وارد زندگی کرده است: گروهها، فضاها ی خطی، حوزها، حلقه‌ها و غیره. موضوع جبر امروزی عبارتست از بررسی دستگاههای جبری، همچنین بررسی خاصیتهای دستگاههای جبری بطور کلی، بر اساس مفهومهای کاملاً کلی (جبر $\mathfrak{A}$ ، مدلها). علاوه بر این، روشهای جبر در سایر رشته‌های ریاضیات و هم خارج از ریاضیات آموخته می‌شود (توپولوژی، آنالیز تابعی، نظریه عددها،

هندسهٔ جبری، ریاضیات محاسبه‌ای، فیزیک نظری، بلورشناسی و غیره).

مهمترین دستگاه جبری، که دارای یک عمل است، عبارتست از گروه‌ها. عمل در گروه شرکت‌پذیر است (یعنی $(a*b)*c = a*(b*c)$) برای هر a, b, c از گروه صحیح است؛ علامت ستاره $*$ نشانهٔ عملی است که در وضعهای مختلف نامهای مختلف بخود خواهد گرفت) و برگشت‌ناپذیری دارد، یعنی برای هر a و b از گروه، x و y منحصر بفردی پیدا می‌شود که $a*x = b$ و $y*a = b$ باشد. به عنوان نمونه هایی از گروه می‌توان از مجموعهٔ همهٔ عددهای صحیح نسبت به جمع، یا مجموعهٔ همهٔ عددهای گویا (صحیح و کسری) و مثبت نسبت به ضرب نام برد. در این نمونه‌ها، عمل (برای نمونهٔ اول جمع و برای نمونهٔ دوم ضرب) دارای خاصیت جابجایی است. این گونه گروه‌ها را آبلی گویند. مجموعهٔ حرکت‌هایی که یک شکل یا جسم مفروض را بر خودش منطبق کند، یک گروه تشکیل می‌دهد به شرطی که انجام دو حرکت متوالی را به عنوان عمل آن در نظر بگیریم. این گروه‌ها (گروه‌های تقارن شکل) ممکن است غیر آبلی باشند، حرکت‌هایی که شبکهٔ اتمی بلور را بر خودش منطبق می‌کند، به گروه فئودوروف مشهور است که در بلورشناسی و از آن راه در فیزیک اجسام صلب نقشی اساسی دارد. گروه ممکن است محدود باشد (گروه تقارنهای مکعب) یا نامحدود (گروه عددهای صحیح نسبت به جمع)، منفصل باشد (همان مثال) و یا پیوسته (گروه دورانی کره). نظریهٔ گروه‌ها محتوی نظریهٔ ریاضی را وسعت

بخشید و غنی تر کرد و خود نیز موارد کاربرد فراوانی بدست آورد.

جبر خطی هم اهمیت کمتری ندارد. این جبر، فضاهای خطی را مورد مطالعه قرار می دهد. جبر خطی به يك دستگاه جبری گفته می شود که با دو عمل جمع و ضرب روی عددها (حقیقی یا مختلط) سر و کار دارد. نسبت به جمع، اشیاء (به نام بردارها) تشکیل گروه آبلی می دهد و عمل ضرب در شرطهای زیر صدق می کند:

$$a(x+y) = ax + ay \quad \text{و} \quad (a+b)x = ax + bx$$

$$1 \cdot x = x \quad \text{و} \quad a(bx) = ab(x)$$

در اینجا a و b نشانه عددها و x و y نشانه بردارها هستند.

مجموعه بردارها (به مفهوم معمولی) در صفحه و در فضا تشکیل فضاهای خطی را به مفهوم تعریفی که کردیم، می دهند. مسأله هایی که در مقابل ریاضی دانها قرار گرفته است، مطالعه فضاهای خطی چند بعدی و حتی بی نهایت بعدی را مطرح کرده است. فضاهای اخیر (که عناصر آنها اغلب عبارتند از تابعها) موضوع مطالعه آنالیز تابعی را تشکیل می دهند. فکر و روش جبر خطی در بسیاری از شاخه های ریاضیات مثل هندسه تحلیلی و نظریه دستگاه معادله های خطی مورد استفاده قرار می گیرد. نظریه ماتریسها و دترمینانها ابزار محاسبه ای جبر خطی را تشکیل می دهند.

۲

تجزیه عبارتهای جبری

تجزیه يك عبارت جبری به صورت ضرب عوامل اول ، از مباحث اساسی جبر است. و اهمیت آن ناشی از آن است که در همه زمینه‌های ریاضیات محاسبه‌ای مورد استعمال دارد؛ برای حل معادله‌ها، ساده کردن کسرها، بیرون آوردن عبارتی از زیر رادیکال و... همه جا به تجزیه احتیاج داریم. در عین حال تجزیه یکی از مشکل‌ترین مباحث جبر است و نمی‌توان راه حل عمومی برای آن ذکر کرد. در این بخش صرف نظر از روشهای عادی (عامل مشترک گرفتن و یا استفاده از اتحادها) به بعضی از راههای ناآشنای تجزیه می‌پردازیم.

۱. روش ضریبهای نامعین

فرض کنید که می‌خواهیم عبارت $x^4 + 2x^2 + 5$ را به صورت ضرب دو عامل درجه دوم حقیقی تجزیه کنیم. عوامل تجزیه را $x^2 + \alpha x + \beta$ و $x^2 + ax + b$ فرض می‌کنیم، در این صورت باید داشته باشیم:

$$x^4 + 2x^2 + 5 \equiv (x^2 + ax + b)(x^2 + \alpha x + \beta)$$

اتحاد وقتی برقرار است که ضریبهای x^p در طرفین تساوی برابر باشند، داریم:

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^2 + 5 &\equiv \\ &\equiv x^4 + (a + \alpha)x^3 + (b + \beta + a\alpha)x^2 + (a\beta + b\alpha)x + b\beta \end{aligned}$$

از آنجا باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} a + \alpha = 0 \\ b + \beta + a\alpha = 2 \\ a\beta + b\alpha = 0 \\ b\beta = 5 \end{cases} \quad (1)$$

دستگاه چهارمعادله چهار مجهولی (۱) از درجه دوم است و بنابراین در حالت کلی منجر به حل يك معادله درجه چهارم می‌شود، ولی در حالت‌های خاص (مثل حالت فوق) که ضریبها مناسب باشند، می‌توان ضریبهای نامعین a ، b ، α و β را محاسبه کرد.

از معادله اول دستگاه داریم: $a = -\alpha$ که اگر در معادله سوم دستگاه قرار دهیم به صورت $\alpha(b - \beta) = 0$ در می‌آید.

اگر $\alpha = 0$ باشد از تساوی $a = -\alpha$ بدست می‌آید $a = 0$ و از معادلات دوم و چهارم دستگاه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} b + \beta = 2 \\ b \cdot \beta = 5 \end{cases}$$

و b و β ریشه‌های معادله درجه دوم زیر هستند :

$$t^2 - 2t + 5 = 0$$

که دارای مبین منفی و ریشه‌های موهومی است .

اگر $\alpha \neq 0$ باشد ، ناچار $b = \beta$ می‌شود . در نتیجه معادله چهارم

به صورت $\beta^2 = 5$ در می‌آید . در حالت $\beta = -\sqrt{5}$ ، از معادله دوم

دستگاه نتیجه می‌شود : $\alpha^2 = -2(\sqrt{5} + 1)$ و بنابراین مقادیر α و سپس

a موهومی خواهد شد .

به این ترتیب داریم : $b = \beta = \sqrt{5}$ و از معادله دوم دستگاه ،

$$\alpha = \pm \sqrt{2(\sqrt{5} - 1)}$$

$$a = \mp \sqrt{2(\sqrt{5} - 1)} \quad \text{و بالاخره :}$$

در نتیجه تجزیه عبارت درجه چهارم مورد نظر چنین می‌شود :

$$x^4 + 2x^2 + 5 =$$

$$= (x^2 + x\sqrt{2(\sqrt{5} - 1)} + \sqrt{5})(x^2 - x\sqrt{2(\sqrt{5} - 1)} + \sqrt{5})$$

توضیح: روش ضریبهای نامعین، ضمناً همه انواع ممکنه تجزیه يك عبارت

را بدست می‌دهد (اگر مقید به ضریبهای حقیقی نباشیم). مثلاً انواع دیگر تجزیه

عبارت فوق چنین می‌شود :

$$x^4 + 2x^2 + 5 = (x^2 + 1 + 2\sqrt{-1})(x^2 + 1 - 2\sqrt{-1}) =$$

$$= (x^2 + x\sqrt{-2(\sqrt{5} + 1)} - \sqrt{5}) \times$$

$$\times (x^2 - x\sqrt{-2(\sqrt{5} + 1)} - \sqrt{5})$$

۲. استفاده از روش حل معادله‌ها

فرض کنید تجزیه این عبارت مورد نظر باشد :

$$A = 4(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

این عبارت ، يك عبارت معکوسه درجه چهارم است . برای تجزیه آن

از همان روش حل معادله معکوسه استفاده می‌کنیم . ابتدا از x^2 فاکتور می‌گیریم :

$$A = 4x^2 \left(x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) =$$

$$= 4x^2 \left[\left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + \left(x + \frac{1}{x} \right) + 1 \right]$$

اگر $x + \frac{1}{x} = t$ فرض کنیم ، $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$ می شود و

$$A = 4y^2(t^2 + t - 1) \quad \text{بنابراین داریم :}$$

عبارت داخل پرانتز نسبت به t از درجه دوم و قابل تجزیه است .

ریشه های این عبارت $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ است و بنابراین خواهیم داشت :

$$A = 4x^2 \left(t + \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right) \left(t - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)$$

دوباره بجای t مقدارش $x + \frac{1}{x}$ را قرار می دهیم :

$$A = 4x^2 \left(x + \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right) \left(x + \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)$$

و با توجه به اینکه $4x^2 = 2x \times 2x$ می باشد ، هریک از پرانتزها را در $2x$ ضرب می کنیم ، نتیجه تجزیه عبارت، به صورت زیر در می آید :

$$A = [2x^2 + (\sqrt{5}+1)x + 2][2x^2 - (\sqrt{5}-1)x + 2]$$

۳. استفاده از خاصیت دوری بودن عبارت

تعریف. تبدیل دوری (Périodique) يك عبارت جبری نسبت به n حرف a و b و c و $\dots$ و l و k عبارتست از تبدیل آن به عبارت دیگری که از عبارت اول ، با تبدیل a به b و b به c و $\dots$ و l به k و k به a بدست آمده باشد .

مثلا عبارت $a^2 + b$ در تبدیل دوری نسبت به a و b به عبارت $b^2 + a$ تبدیل می شود (در عبارت $a^2 + b$ ، a را به b و b را به a تبدیل نمودیم). واضح است که اگر $b^2 + a$ را دوباره تبدیل دوری کنیم به همان عبارت اصلی خواهیم رسید .

و یا اگر بخواهیم تبدیلهای دوری عبارت $x^2 + 3xy + 4z^2$ را نسبت به چهار حرف x و y و z و t بدست آوریم، داریم:

$$x^2 + 3xy + 4z^2 \quad \text{عبارت اصلی:}$$

$$۱) \quad y^2 + 3yz + 4t^2 \quad \text{تبدیل اول:}$$

$$۲) \quad z^2 + 3zt + 4x^2 \quad \text{تبدیل دوم:}$$

$$۳) \quad t^2 + 3tx + 4y^2 \quad \text{تبدیل سوم:}$$

و اگر عبارت (۳) را تبدیل دوری کنیم، همان عبارت اصلی بدست می آید. عبارتهای دوری، عبارتی را نسبت به n حرف a و b و c و ... و k و l دوری گوئیم که در اولین تبدیل دوری نسبت به این حروف به خودش تبدیل شود.

عبارت ab نسبت به a و b و عبارت $(x-y)(y-z)(z-x)$ نسبت به x و y و z عبارتهای دوری هستند، زیرا در اولین تبدیل دوری، هریک از آنها به خودشان تبدیل می شوند.

اگر عبارتی نسبت به n حرف غیر دوری باشد، دارای $n-1$ تبدیل دوری خواهد بود.

خاصیت اصلی. خاصیت اصلی يك عبارت دوری در اینست که آنرا به هر شکلی بنویسیم باز هم يك عبارت دوری خواهد بود. هرگز با عملیاتی از قبیل ساده کردن، باز کردن پرانتزها، تجزیه کردن، تبدیل اتحادی و غیره نمی توان يك عبارت دوری را به يك عبارت غیر دوری و یا برعکس تبدیل کرد.

چند مثال:

۱. آیا تساوی زیر اتحاد است؟

$$(a+b-c)^3 + (ab+2c)^3 = (ab-2c)^3 + (a+b+c)^3 + 3a^2bc$$

حل: سمت چپ تساوی نسبت به دو حرف a و b يك عبارت دوری است (یعنی با تبدیل a و b به یکدیگر تغییر نمی کند). درحالی که عبارت سمت راست تساوی نسبت به همین دو حرف a و b غیر دوری است (زیرا جمله $3a^2bc$ با تبدیل a و b به یکدیگر تغییر می کند) و بنابراین نمی تواند يك اتحاد باشد.

توضیح: واضح است که اگر هر دو طرف يك تساوی نسبت به چند حرف دوری باشد، به معنای این نیست که تساوی حتماً يك اتحاد است. در این صورت برای تحقیق در اتحاد بودن آن باید راه دیگری انتخاب کرد.

۲. عبارت زیر را تجزیه کنید :

$$A = (x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3$$

حل: عبارت A نسبت به سه حرف x و y و z دوری است، بنابراین بعد از تجزیه هم باید به صورت يك عبارت دوری نسبت به همین مجهولها درآید. از طرف دیگر روشن است که عبارت A به ازای $x=y$ برابر صفر می شود، بنابراین شامل فاکتور $x-y$ می باشد؛ ولی چون عبارت A دوری است، ناچار باید تمام تبدیلهای دوری $x-y$ یعنی $y-z$ و $z-x$ جزو عوامل تجزیه آن باشد، در نتیجه می توانیم بنویسیم:

$$(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = \lambda(x-y)(y-z)(z-x)$$

عبارت سمت چپ تساوی نسبت به x از درجه دوم است (x^2 و $-x^3$) حذف می شوند، بنابراین باید سمت راست تساوی هم نسبت به x از درجه دوم باشد و چون حاصل ضرب $(x-y)(y-z)(z-x)$ نسبت به x از درجه دوم است، λ نمی تواند شامل x باشد و با توجه به اینکه عبارت نسبت به x و y و z دوری است، λ شامل y و z هم نخواهد بود، پس λ مقداری است ثابت. برای محاسبه λ می توان ضریبهای x^2 را در طرفین تساوی مساوی قرار داد، ضریب x^2 در سمت چپ تساوی $3(z-y)$ و در سمت راست تساوی $-\lambda(y-z)$ است یعنی $\lambda=3$ داریم:

$$(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = 3(x-y)(y-z)(z-x)$$

توضیح: برای محاسبه مقدار ثابت λ می توانستیم از خاصیت دیگر اتحاد استفاده کنیم (اتحاد به ازای هر مقدار دلخواه مجهولها برقرار است) و مثلاً در طرفین تساوی قرار دهیم:

$$x=0 : y=1 : z=2$$

در این صورت بدست می آمد:

$$-1-1+8=\lambda(-1)(-1)\times 2 ;$$

$$2\lambda=6 \Rightarrow \lambda=3$$

۳. ثابت کنید که شرط لازم و کافی برای صحت تساوی :

$$\frac{1}{x^n} + \frac{1}{y^n} + \frac{1}{z^n} = \frac{1}{x^n + y^n + z^n} \quad (۱)$$

اینست که n عددی فرد باشد و داشته باشیم :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x+y+z} \quad (۲)$$

حل : تساوی (۲) را چنین می نویسیم :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{x+y+z} = 0$$

سمت چپ این تساوی نسبت بهریک از حروف x ، y و z از درجه دوم است، از طرف دیگر بهسادگی دیده می شود که به ازاء $x = -y$ برقرار است و بنابراین ، با توجه به دوری بودن عبارت نسبت به این حروف ، به صورت زیر در می آید :

$$\lambda(x+y)(y+z)(z+x) = 0 \quad (۲)$$

همچنین تساوی (۱) هم به این صورت در می آید :

$$\lambda'(x^n + y^n)(y^n + z^n)(z^n + x^n) = 0 \quad (۱)'$$

λ و λ' مقداری ثابت و مخالف صفرند ، بنابراین شرط صفر بودن $\lambda(x+y)(y+z)(z+x)$ اینست که یکی از عاملهای $x+y$ ، $y+z$ و یا $z+x$ صفر باشد که در این صورت، با توجه به فرد بودن n ، یکی از عاملهای $x^n + y^n$ ، $y^n + z^n$ یا $z^n + x^n$ صفر خواهد شد و تساوی (۱)' و در نتیجه (۱) برقرار است .

و برعکس، با استدلال مشابه، از تساوی (۱)' هم می توان به تساوی (۲) رسید.

۴. استفاده از جذر عبارت های جبری

مقدمه : از عبارت های جبری می توان با روشی مشابه حساب عددی جذر

گرفت ، در این مورد باید به دو نکته توجه داشت :

اولا برای اینکه عبارتی قابل جذر گرفتن باشد ، باید نسبت به مجهول

خود (و اگر شامل چند مجهول باشد ، نسبت به همه مجهولها) از درجه زوج باشد .

ثانیاً اگر ضریب بزرگترین درجه مجذور کامل نباشد ، به معنای آن نیست که عبارت مفروض مجذور کامل نیست .

طریقه جذر گرفتن : فرض کنید که می خواهیم جذر عبارت زیر را بدست آوریم :

$$9a^6 - 12a^5 + 10a^4 - 34a^3 + 21a^2 - 10a + 25$$

صورت عمل چنین است :

$\begin{array}{r} \sqrt{9a^6 - 12a^5 + 10a^4 - 34a^3 + 21a^2 - 10a + 25} \\ - 9a^6 \\ \hline -12a^5 + 10a^4 \\ + 12a^5 - 34a^3 \\ \hline 6a^4 - 34a^3 + 21a^2 \\ - 6a^4 + 34a^3 - a^2 \\ \hline -30a^3 + 20a^2 - 10a + 25 \\ + 30a^3 - 20a^2 + 10a - 25 \\ \hline R = 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3a^3 - 2a^2 + a - 5 \\ 6a^3 - 2a^2 \\ \hline -2a^2 \\ 6a^3 - 4a^2 + a \\ \hline +a \\ 6a^3 - 4a^2 + 2a - 5 \\ \hline -5 \end{array}$
--	--

شرح عمل : ابتدا جذر کامل $9a^6$ یعنی $3a^3$ را می نویسیم و مجذور آنرا از $9a^6$ کم می کنیم . سپس دو جمله یعنی $-12a^5 + 10a^4$ را پایین می آوریم و اولین جمله آن ، یعنی $-12a^5$ را بر دو برابر $3a^3$ (یعنی $6a^3$) تقسیم می کنیم ، خارج قسمت یعنی $-2a^2$ را در سمت راست $6a^3$ می نویسیم ، سپس حاصل ضرب $6a^3 - 2a^2$ را در $6a^3$ بدست آورده ، از $-12a^5 + 10a^4$ کم می کنیم . ضمناً $-2a^2$ را در سمت راست $3a^3$ (در بالا) هم می نویسیم . حالا دوباره دو جمله پایین می آوریم و پهلوی باقیمانده قبلی می نویسیم و اولین جمله عبارت حاصل را بر همان $6a^3$ (دو برابر $3a^3$) تقسیم می کنیم و در سمت راست $6a^3 - 4a^2$ (دو برابر $3a^3 - 2a^2$ یا حاصل جمع $6a^3 - 2a^2$ با $-2a^2$) می نویسیم و مانند سابق عمل را ادامه می دهیم . جذر عبارت $3a^3 - 2a^2 + a - 5$ می شود .

توضیح : جذر يك عبارت جبری را با روش ضریبهای نامعین هم می توان بدست آورد :

$$\begin{aligned} 9a^6 - 12a^5 + 10a^4 - 34a^3 + 21a^2 - 10a + 25 &= \\ &= (3a^3 + \alpha a^2 + \beta a + \gamma)^2 \end{aligned}$$

ضریب a^5 در سمت راست تساوی 6α و در سمت چپ $12 -$ است ،
بنابراین :

$$6\alpha = -12 \Rightarrow \alpha = -2$$

ضریب a^4 در سمت راست تساوی $\alpha^2 + 6\beta$ و در سمت چپ تساوی
۱۰ می باشد :

$$\alpha^2 + 6\beta = 10 \Rightarrow 4 + 6\beta = 10 \Rightarrow \beta = 1$$

ضریب a^3 در سمت راست تساوی $6\gamma + 2\alpha\beta$ و در سمت چپ تساوی
 -34 است یعنی :

$$6\gamma + 2\alpha\beta = -34 \Rightarrow 6\gamma - 4 = -34 \Rightarrow \gamma = -5$$

بنابراین عبارت جذر به صورت $3a^3 - 2a^2 + a - 5$ در می آید .
البته در این روش باید پس از محاسبه ضریبهای نامعین ، ضریبهای a^2 ،
 a و مقدار ثابت را در دوطرف تساوی آزمایش کرد تا صحت عمل جذر
اثبات شود .

چند مثال :

۱. عبارت زیر را به صورت ضرب عاملها تجزیه کنید :

$$P = m^4 + 2m^3 - m^2 - 2m - 8$$

حل : اگر از عبارت P جذر بگیریم چنین می شود :

$\begin{array}{r} m^4 + 2m^3 - m^2 - 2m - 8 \\ -m^4 \\ \hline 2m^3 - m^2 \\ -2m^3 - m^2 \\ \hline -2m^2 - 2m - 8 \\ +2m^2 + 2m - 1 \\ \hline R = -9 \end{array}$	$\begin{array}{r} m^2 + m - 1 \\ 2m^2 + m \\ +m \\ \hline 2m^2 + 2m - 1 \\ -1 \end{array}$
--	--

می بینیم که عبارت مفروض مجذور کامل نیست و باقیمانده ای مساوی

-9 دارد ، بنابراین P را می توان چنین نوشت :

$$P = (m^2 + m - 1)^2 - 9$$

و دیگر ادامه کار روشن است ، با توجه به اتحاد :

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

خواهیم داشت :

$$P = (m^2 + m - 4)(m^2 + m + 2) =$$

$$= \frac{1}{4} (2m + 1 + \sqrt{17})(2m + 1 - \sqrt{17})(m^2 + m + 2)$$

عبارت $m^2 + m + 2$ قابل تجزیه به عاملهای حقیقی درجه اول نیست.

۴. عبارت درجه چهارم زیر را به ضرب دو عامل درجه دوم حقیقی

تجزیه کنید :

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2$$

حل : اگر از عبارات $f(x)$ جذر بگیریم ، حاصل جذر برابر $x^2 + x + 1$ و باقیمانده جذر برابر ۱ خواهد شد و بنابراین داریم :

$$f(x) = (x^2 + x + 1)^2 + 1$$

به این ترتیب ریشههای معادله $f(x) = 0$ موهومی است. این ریشهها

را بدست می آوریم :

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + x + 1 = \pm \sqrt{-1}$$

$$۱) \quad x^2 + x + 1 = \sqrt{-1} \Rightarrow$$

$$x_1 = \sqrt{-1} ; x_2 = -(1 + \sqrt{-1})$$

$$۲) \quad x^2 + x + 1 = -\sqrt{-1} \Rightarrow$$

$$x_3 = -\sqrt{-1} ; x_4 = -(1 - \sqrt{-1})$$

اگر برای سهولت کار $\sqrt{-1} = i$ فرض کنیم ، خواهیم داشت :

$$f(x) = (x - i)(x + 1 + i)(x + i)(x + 1 - i) =$$

$$= [(x - i)(x + i)][(x + i + 1)(x - i + 1)] =$$

$$= (x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2)$$

تمرینها

این عبارتها را به صورت ضرب عاملهای اول تجزیه کنید :

$$xy(x+y) + yz(y-z) - xz(x+z) \quad ۰۱$$

$$[(x^2 + y^2)(a^2 + b^2) + 4abxy]^2 - \quad ۰۲$$

$$- 4[xy(a^2 + b^2) + ab(x^2 + y^2)]^2$$

$$2a^2b + 4ab^2 - a^2c + ac^2 - 2b^2c + 2bc^2 - 2abc \quad ۰۳$$

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 \quad ۰۴$$

$y(x-yz)^r + \lambda xyz + x(y-yz)^r - yz(x+y)^r$	۰۵
$2x^r + x^r + 4x^r + x + 2$	۰۶
$4(x^r + xy + y^r)^r - 2\sqrt{x^r y^r}(x+y)^r$	۰۷
$(a+b+c)^r - a^r - b^r - c^r$	۰۸
$(ab+bc+ca)(a+b+c) - abc$	۰۹
$(a-b)^\Delta + (b-c)^\Delta + (c-a)^\Delta$	۰۱۰
$x^\Delta + x^r + x^r + x^r + x + 1$	۰۱۱
$x^r - x^r + 7$	۰۱۲
$x^r + 4x - 1$	۰۱۳
$(1+x+x^r+\dots+x^n)^r - x^n$	۰۱۴
$2x^r + x^r + 2x^r + x + 2$	۰۱۵
$x^r + 2x^\Delta + 2x^r + 24x^r + 22x^r + 22x + 21$	۰۱۶
$x^r + 6x^r + 18$	۰۱۷
$(x^r + y^r + z^r)^r - 2(x^r + y^r + z^r)$	۰۱۸
$x^r + y^r + z^r - 2xyz$	۰۱۹
$(a^r - bc)^r + (b^r - ca)^r + (c^r - ab)^r -$ $- 2(a^r - bc)(b^r - ca)(c^r - ab)$	۰۲۰
$(x+y+z)^\Delta - x^\Delta - y^\Delta - z^\Delta$	۰۲۱
$(a^{\Delta n} + a^n + 1)$ n عددی است صحیح و مثبت	۰۲۲
$(x+1)(x+2)(x+5)(x+7) + 15$	۰۲۳
$a^r(x-y) - x^r(a-y) + y^r(a-x)$	۰۲۴
$a^r b^r(b-a) + b^r c^r(c-b) + c^r a^r(a-c)$	۰۲۵
$\lambda x^r(y+z) - y^r(z+2x) - z^r(2x-y)$	۰۲۶
$x^r y + xy^r + x^r z + xz^r + y^r z + yz^r + 2xyz$	۰۲۷
$x^r y + xy^r + x^r z + xz^r + y^r z + yz^r + 3xyz$	۰۲۸
$x^r + 5x^r + 2x - 9$	۰۲۹
$x^r + 9x^r + 11x - 21$	۰۳۰
$x^r(x^r - 7)^r - 29x$	۰۳۱
$(x^r + y^r)^r + (z^r - x^r)^r - (y^r + z^r)^r$	۰۳۲

$$x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) \quad .33$$

$$x^2(z-y^2) + y^2(x-z^2) + z^2(y-x^2) + xyz(xyz-1) \quad .34$$

$$x^4 + 2x^2 \cos \alpha + 1 \quad .35$$

۰.۳۶ (۱) ثابت کنید اگر a عددی صحیح باشد، عدد $1 - (2a+1)^2$ بر ۸ قابل قسمت است.

(۲) ثابت کنید اگر a عددی صحیح باشد، عدد $a^2 - a$ بر ۶ قابل قسمت است.

(۳) ثابت کنید عددهای به صورت $a^2 + 5a$ ، $a^2 + 11a$ ، $a^2 - 19a$ بر ۶ قابل قسمت اند.

۰.۳۷ (۱) ثابت کنید تفاضل مربعات دو عدد زوج متوالی بر ۴ قابل قسمت است.

(۲) ثابت کنید تفاضل مربعات دو عدد فرد متوالی بر ۸ قابل قسمت است.

(۳) ثابت کنید تفاضل مربعات دو عددی که بر ۲ و ۳ قابل قسمت نیستند مضربی از ۲۴ است.

۰.۳۸ ثابت کنید وقتی n عددی صحیح و فرد باشد، عدد

$$n^4 + 7(2n^2 + 7)$$

بر ۶۴ قابل قسمت است.

۰.۳۹ ثابت کنید که اگر $5x + 2y$ بر ۱۷ قابل قسمت باشد، $9x + 7y$ هم بر ۱۷ قابل قسمت است.

۰.۴۰ با شرطهای $a^2 + 2(ab - ac - bc) = 0$ ، $b \neq c$ ، $a + b \neq c$ ثابت کنید:

$$\frac{a^2 + (a-c)^2}{b^2 + (b-c)^2} = \frac{a-c}{b-c}$$

۳

بیان تابع

ریاضیات در مراحل مختلف خود از موارد مشخص و محسوس به طرف مسائل مجرد و از احکام جزئی و اختصاصی به طرف احکام کلی و عام، بسوی کمال رفته است و این تمایل به طرف تجرید و انتزاع یکی از قوای محرکه اصلی پیشرفت ریاضیات بوده است.

وقتی که بجای ۵ درخت و ۵ انگشت و ۵ ساختمان و... مفهوم کلی ۵ درك شد، نخستین انتزاع انجام گرفت و سپس وقتی که بجای اعداد مشخص ۵ و ۲۲ و ۴- و غیره از حرف a یا x استفاده شد، دومین انتزاع به وجود آمد. در این حالت عبارتی مثل $x^2 + x - 1$ بسته به مقدار x تغییر می کند و به همین مناسبت حاصل آنرا تابعی از x نامیدند، در حالی که عبارت $a^2 - 5$ تابعی از a است و غیره.

در مرحله بعدی انتزاع، برای همه انواع تابعهای x یا تابعهای a ، شکل نمایشی در نظر گرفته شد، به صورت $f(x)$ یا $\varphi(a)$ و غیره.

در این بخش از بیان نمایشی تابع به صورت $f(x)$ (در موارد يك متغیره) و $(x, y, \dots)$ (در حالت چند متغیره) گفتگو می شود و روشهای مطالعه اینگونه تابعها و تبدیلهای آنها مورد مطالعه قرار می گیرد.

تابع $f(x)$

تعریف . متغیر y را تابع يك متغیره f نسبت به متغیر x گویند ، وقتی که به ازای هر مقدار دلخواه از فاصله معینی از x ، تنها يك مقدار حقیقی برای y بدست آید و در این صورت آنرا به صورت $y=f(x)$ نشان می دهند . فاصله تغییرات x را وقتی که به صورت $a < x < b$ باشد با علامت (a, b) و وقتی که به صورت $a \leq x \leq b$ باشد با علامت $[a, b]$ و وقتی که به صورت $a < x < b$ باشد با علامت $[a, b]$ نشان می دهند .

وقتی که در تابع $y=f(x)$ از $f(a)$ صحبت می کنیم ، به معنی مقداری از y است که به ازای $x=a$ بدست آمده باشد .

اغلب لازم است که در يك تابع نقش x را به متغیر دیگری محول کنیم

و مثلاً وقتی از $f\left(-\frac{1}{x}\right)$ صحبت می کنیم به معنای این است که می خواهیم

نقش x را به $-\frac{1}{x}$ واگذاریم (و البته به معنای این نیست که x با $-\frac{1}{x}$ برابر است) .

اگر در تابع چند متغیره مثل $f(x, y)$ بنویسیم $f(a, y)$ به معنای آنست که نقش x را به a داده ایم (و در موردی که a عدد است یعنی $f(x, y)$) را به ازای $x=a$ بر حسب y بدست آورده ایم) . و یا $f(a, \beta)$ به معنای آنست که نقش x و y را به ترتیب به a و β وا گذاشته ایم (و در حالت عددی a و β یعنی تابع را به ازای $x=a$ و $y=\beta$ محاسبه کرده ایم) .

وقتی که مثلاً $f(x) = x^2 + x - 1$ باشد می توان $a^2 + a - 1$ را با $f(a)$ نشان داد ، در حالی که مثلاً حق نداریم وقتی $f(x) = x^2 + x - 1$ است ، عبارت $2a^2 - 3a$ را با $f(a)$ نشان دهیم ، بلکه آنرا با علامت دیگری مثل $\varphi(a)$ یا $g(a)$ و غیره نشان خواهیم داد .

چند مثال:

۱. اگر $f(x) = x^2 - 2x$ باشد، مطلوبست $f(2x+1)$

حل. داریم:

$$f(2x+1) = (2x+1)^2 - 2(2x+1) = 4x^2 - 1$$

۲. اگر $f(x) = x + \frac{1}{x}$ باشد، مطلوبست $ff(x)$

حل.

$$ff(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)} = \left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x + \frac{1}{x}} = \frac{x^2 + 2x^2 + 1}{x(x^2 + 1)}$$

۳. اگر $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ باشد، ثابت کنید:

$$fff(x) \cdot f(x) = -1$$

حل. داریم:

$$ff(x) = \frac{f(x) - 1}{f(x) + 1} = \frac{\frac{x-1}{x+1} - 1}{\frac{x-1}{x+1} + 1} = -\frac{1}{x}$$

$$fff(x) = f\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{-\frac{1}{x} - 1}{-\frac{1}{x} + 1} = -\frac{x+1}{x-1}$$

و از آنجا:

$$fff(x) \cdot f(x) = -\frac{x+1}{x-1} \times \frac{x-1}{x+1} = -1$$

۴. مطلوبست $f(x)$ ، بشرطی که داشته باشیم:

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2 \quad (1)$$

حل. $\frac{x}{x+1}$ را مساوی t فرض می‌کنیم:

$$\frac{x}{x+1} = t \Rightarrow x = \frac{t}{1-t}$$

و به این ترتیب رابطه (۱) به صورت زیر در می آید :

$$f(t) = \frac{t^2}{(1-t)^2} \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{(1+x)^2}$$

۵. عبارت $x^3 - 3x + 4$ را بر حسب توانهای $x+2$ منظم کنید :

حل . راه اول (روش ضریبهای نامعین) : می نویسیم :

$$x^3 - 3x + 4 \equiv (x+2)^3 + \alpha(x+2)^2 + \beta(x+2) + \gamma$$

که اگر ضریبهای توانهای مساوی را در دو طرف اتحاد مساوی قرار دهیم، به دستگاه زیر می رسیم :

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ 4\alpha + \beta + 12 = -3 \\ 4\alpha + 2\beta + \gamma + 8 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -6 \\ \beta = 9 \\ \gamma = 2 \end{cases}$$

و بنابراین خواهیم داشت :

$$x^3 - 3x + 4 \equiv (x+2)^3 - 6(x+2)^2 + 9(x+2) + 2$$

راه دوم: اگر $x+2 = t$ فرض کنیم، داریم : $x = t-2$ و از آنجا:

$$\begin{aligned} x^3 - 3x + 4 &= (t-2)^3 - 3(t-2) + 4 = t^3 - 6t^2 + 9t + 2 = \\ &= (x+2)^3 - 6(x+2)^2 + 9(x+2) + 2 \end{aligned}$$

۳. مجموع ضریبهای يك چند جمله ای

از آنجا که هر توانی از واحد برابر واحد است، به سادگی روشن

می شود که برای محاسبه مجموع جبری ضریبهای چند جمله ای $f(x)$ باید $f(1)$ را محاسبه کرد .

و در حالتی که تابع $f(x, y, z, \dots)$ از چند متغیر x و y و z

و... به صورت يك چند جمله ای باشد ، برای محاسبه مجموع ضریبهای عددی

آن باید $f(1, 1, 1, \dots)$ را بدست آورد .

مثال : مطلوبست محاسبه مجموع ضریبهای چند جمله ای که از بسط

عبارت زیر بدست می آید :

$$f(x) = (12x^3 - 54x^2 + 19x + 22)^{71}$$

حل : درحقیقت اگر ضریبهای بسط عبارت را $A, B, \dots, L$

فرض کنیم ، داریم :

$$f(x) = Ax^{712} + Bx^{711} + Cx^{710} + \dots + Kx + L$$

و بنابراین خواهیم داشت :

$$f(1) = A + B + C + \dots + K + L$$

از طرف دیگر داریم :

$$f(1) = (12 - 54 + 19 + 22)^{71} = (-1)^{71} = -1$$

یعنی مجموع جبری ضریبهای چندجمله ای $f(x)$ برابر است با -1

تمرینها

۴۱. اگر $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ باشد ، مطلوبست محاسبه :

$$f(0) ; f(-x) ; f(x+1) ; f(x)+1 ; f\left(\frac{1}{x}\right) ; \frac{1}{f(x)}$$

۴۲. مطلوبست :

$$\varphi(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

با شرط :

a) $f(x) = ax + b$; b) $f(x) = x^x$; c) $f(x) = a^x$

۴۳. مطلوبست مقدار x برای حالتی : ۱) $f(x) = 0$;

۲) $f(x) > 0$; ۳) $f(x) < 0$ ، بشرطی که داشته باشیم :

a) $f(x) = x - x^x$; b) $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$;

c) $f(x) = (x + |x|)(1 - x)$

۴۴. فرض می کنیم :

$$f(x) = ax^x + bx + c$$

ثابت کنید :

$$f(x+2) - 2f(x+1) + f(x) = 0$$

۴۵. تابع خطی $f(x)$ را چنان پیدا کنید که داشته باشیم :

$$f(0) = -2 ; f(3) = 5$$

۴۶. مطلوبست تابعی بصورت :

$$f(x) = a + bc^x$$

بشرطی که داشته باشیم :

$$f(0) = 15 ; f(2) = 30 ; f(4) = 90$$

۴۷. ثابت کنید که اگر برای تابع خطی :

$$f(x) = ax + b$$

مقدارهای $x = x_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) به تصاعد حسابی باشند،

مقدارهای نظیر $y_n = f(x_n)$ هم به تصاعد حسابی خواهند بود .

۴۸. ثابت کنید که اگر برای تابع مجهول القوه :

$$f(x) = a^x \quad (a > 0)$$

مقدارهای $x = x_n$ ($n = 1, 2, \dots$) به تصاعد حسابی باشند،

مقدارهای متناظر تابع $y_n = f(x_n)$ به تصاعد هندسی خواهند بود .

۴۹. اگر داشته باشیم :

$$f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x}) \quad (a > 0)$$

ثابت کنید :

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

۵۰. اگر داشته باشیم :

$$f(x) + f(y) = f(z)$$

مطلوبست z بشرطی که :

$$a) f(x) = ax ; b) f(x) = \frac{1}{x}$$

$$c) f(x) = \arctg x \quad (|x| < 1)$$

$$d) f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$$

۵۱. اگر $f(x) = \frac{1}{1-x}$ باشد، مطلوبست $ff(x)$ و $fff(x)$

۵۲. اگر فرض کنیم :

$$f_n(x) = \underbrace{fff \cdots f}_n(x)$$

مطلوبست $f_n(x)$ باشد :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

۵۳. اگر داشته باشیم :

$$f(x+1) = x^2 - 3x + 2$$

مطلوبست $f(x)$:

۵۴. $f(x)$ ، بشرطی که داشته باشیم :

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

۵۵. $f(x)$ ، بشرطی که داشته باشیم :

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2} \quad (x > 0)$$

۵۶. اگر داشته باشیم :

$$f\left(\frac{2x-1}{x+2}\right) = \frac{2x^2 - 3x + 7}{(x+2)^2}$$

مطلوبست محاسبه $f(x)$:

۵۷. اگر داشته باشیم :

$$f(x) = (x+a)(x+a^2) \cdots (x+a^n)$$

$$a^n(x+1)f(x) \equiv (x+a^n) \cdot f(ax) \quad \text{ثابت کنید :}$$

۵۸. اگر $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$ باشد ، ثابت کنید :

$$a) f(2x^2 - 1) = 2f(x) \quad (x > 0)$$

$$b) f(2x^2 - 3x) = 2f(x) \quad \left(x < -\frac{1}{2} \text{ یا } x > \frac{1}{2}\right)$$

۵۹. اگر $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$ باشد ، ثابت کنید :

$$a) f(a+b) \cdot f(b+c) \cdot f(c+a) = \lambda f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \cdot f'(0)$$

$$b) f(-a) \cdot f(-b) \cdot f(-c) = \lambda f^2(a+b+c) \cdot f(0)$$

۶۰. اگر $f(x) = \sin x - \cos x$ ثابت کنید $f(1) > 0$

۶۱. اگر $f(x) = a + bx$ باشد، ثابت کنید:

$$f_n(x) = a \frac{b^n - 1}{b - 1} + b^n x$$

۶۲. از معادله زیر $f(x)$ را بدست آورید:

$$af(x-1) + bf(1-x) = cx$$

۶۳. تابع $f(n)$ به ازای مقادیر صحیح n معین است و در شرایط

زیر صدق می کند:

$$f(n) = f(n-1) + a^n; \quad f(1) = 1$$

مطلوبست $f(n)$.

۶۴. تابع زیر مفروض است:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2 & (x \leq -3) \\ 4 - 3x - x^2 & (-3 < x < 1) \\ x^2 + 3x - 4 & (x > 1) \end{cases}$$

آنرا به وسیله یک رابطه مشخص کنید.

۶۵. اولاً تابع:

$$f(x) = 6x^4 + 19x^3 - 17x^2 - 72x - 36$$

را بر حسب قوای نزولی $x-1$ منظم کنید. ثانیاً $f(x) = 0$ را حل کنید.

۶۶. ثابت کنید معادله $f(x) = f(a)$ لا اقل یک ریشه حقیقی دارد. این

ریشه کدام است؟

۶۷. مطلوبست تابع $f(x)$ ، بشرطی که داشته باشیم:

$$f(ab) = [f(a)]^b$$

۶۸. اگر $f\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \frac{x^2 + 4x + 4}{8x}$ باشد، $f(x)$ را بدست

آورید.

۶۹. مجموع جبری ضریبهای چند جمله‌ای زیر را بدست آورید:

$$(1 + 4x - 4x^2)^{175} (1 + 2x)^5 (1 - 3x + x^2 + 2x^3)^{149}$$

۷۰. اگر مجموع ضریبهای عددی در بسط دو جمله‌ای $\left(\sqrt[n]{x} + \frac{1}{\sqrt[n]{x}}\right)^n$

به اندازه ۲۴۰ واحد از مجموع ضریبهای عددی در بسط دو جمله‌ای $(a+b)^{2n}$ کمتر باشد، مطلوبست بسط دو جمله‌ای اول (n) عددی است صحیح و مثبت و x عددی است مثبت).

۷۱. تابع $f(x) = \frac{4-x}{2x-4}$ مفروض است، ثابت کنید مقدار ثابتی

مانند α می‌توان پیدا کرد بطوری که $f(\alpha+x) \cdot f(\alpha-x)$ مقدار ثابتی باشد، این مقدار ثابت و α را محاسبه کنید.

۷۲. تابع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = \frac{a(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

اولا مقادیر $f(a)$ ، $f(b)$ و $f(c)$ را محاسبه کنید

ثانیاً با تشکیل عبارت $f(x) - x$ نتیجه بگیرید: $f(x) = x$.

۷۳. $f(x)$ را چنان پیدا کنید که داشته باشیم:

$$af(x^n) + f(-x^n) = bx$$

بشرطی که $a^2 \neq 1$ و n عددی فرد باشد.

۷۴. اولاً دو ریشه معادله $f(x) = f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ را پیدا کنید.

ثانیاً در حالتی که $f(x) = x^2 - 12x + 3$ باشد، تمام ریشه‌های

معادله را بدست آورید.

۷۵. اگر داشته باشیم:

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} \quad (x > 0)$$

مطلوبست $f(x)$.

۷۶. داریم:

$$z = \sqrt{y} + f(\sqrt{x} - 1)$$

مطلوبست محاسبه $f(x)$ و z بشرطی که به ازای $y=1$ داشته باشیم $z=x$.

۷۷. اگر داشته باشیم:

$$z = x + y + f(x-y)$$

و ضمناً به ازای $y=0$ داشته باشیم $z=x^2$. مطلوبست محاسبه $f(x)$ و z .
 ۷۸ . مطلوبست محاسبه $f(x,y)$ ، بشرطی که داشته باشیم :

$$f\left(x+y, \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$$

۷۹ . تابع $F_n(x)$ از دو متغیر x و n داده شده است . x متغیری حقیقی و n متغیری طبیعی است . این تابع را پیدا کنید ، بشرطی که داشته باشیم :

$$F_{n+1}(x) + F_n(x+1) = F_n(x) \quad \text{و} \quad F_1(x) = \cos x$$

۸۰ . اگر داشته باشیم :

$$f(x) = \begin{cases} 3+x & (x \leq 0) \\ 3-x & (x > 0) \end{cases}$$

اولاً تابع $f(x)$ را با یک رابطه بنویسید . ثانیاً $ff(x)$ را پیدا کنید و نمایش تغییرات آنرا رسم کنید .

۸۱ . مطلوبست همه توابع f که در معادله زیر صدق کنند .

$$f\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = \frac{x^2+1}{x^2}$$

۴

قابليت تقسيم

در این بخش، که از قابلیت تقسیم یک عبارت جبری بر یک عبارت جبری دیگر صحبت می‌شود، مبنای کار بر این گذاشته شده است که خواننده عزیز از تقسیم عبارتهای جبری بر یکدیگر وقواعد آنها اطلاع کافی دارد و علاوه بر آن بسیاری از مباحث دیگر جبر از قبیل مشتق گیری و مفهوم اعداد موهومی دانسته فرض شده است. شاید مطالب این بخش بطور پراکنده در کتابهای جبر وجود داشته باشد، ولی منظور از طرح آن متمرکز کردن روشهای گوناگون جبر در زمینه قابلیت تقسیم و ایجاد یک زمینه فکری روشن درباره آن است.

۱. مقسوم علیه آشکار و مقسوم علیه مخفی

عبارت $3(x-1)$ را در نظر بگیرید، این عبارت به ازای همه مقادیر x بر ۳ و بر $x-1$ قابل قسمت است، ۳ یا $x-1$ را مقسوم علیه آشکار این عبارت گویند.

همین عبارت مثلاً با شرط $x=5K+1$ بر ۵ و یا با شرط فرد بودن x بر ۲ هم قابل قسمت است، ۵ یا ۲ را مقسوم علیه مخفی عبارت $3(x-1)$ گویند. در جبر بیشتر گفتگو از مقسوم علیه های آشکار است و وقتی که بطور مطلق از مقسوم علیه های يك عبارت صحبت می شود، منظور همان مقسوم علیه های آشکار آنست.

به این ترتیب وقتی که مثلاً گفته می شود عبارتهای $x+1$ و $x-3$ نسبت بهم اول هستند (یعنی مقسوم علیه مشترکی ندارند) به این معناست که اگر x متغیر دلخواهی در نظر گرفته شود، این دو عبارت بجز واحد، بر عدد یا عبارت دیگری مشترکاً قابل قسمت نیستند. والا اگر مقادیر خاص متغیر در نظر گرفته شود (مثلاً اگر x عددی فرد باشد) دارای مقسوم علیه مشترکی خواهند بود.

۲. بزرگترین مقسوم علیه مشترك بين دو عبارت جبری

در مواردی که راهی برای تجزیه عبارتهای جبری بنظر نرسد، می توان بزرگترین مقسوم علیه مشترك بين آنها را با كمك تقسیمهای متوالی (شبه روشی که در حساب بکار می رود) بدست آورد.

از آنجا که در تقسیمهای متوالی (برای بدست آوردن بزرگترین مقسوم علیه مشترك) باقیمانده، نقش اساسی دارد (و نه خارج قسمت)، اگر لازم باشد، می توان مقسوم یا مقسوم علیه را در هر عدد دلخواهی ضرب و یا بر هر عدد دلخواهی تقسیم کرد. این عمل در ضمن تقسیم و برای باقیمانده های جزئی هم مانعی ندارد، زیرا با این ترتیب تنها خارج قسمت تغییر می کند و باقیمانده، با تقریب يك

ضریب ثابت ، بدون تغییر باقی می ماند .
 در موردی از این خاصیت استفاده می کنیم که ضریب بزرگترین درجه
 مقسوم بر ضریب بزرگترین درجه مقسوم علیه قابل قسمت نباشد ، در این صورت
 مقسوم را در عدد مناسبی ضرب می کنیم تا در چهار ضریبهای کسری در خارج قسمت نشویم .
 مثال ، کسر زیر را ساده کنید :

$$\frac{4x^4 + 11x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{8x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 1}$$

حل . در حقیقت باید بزرگترین مقسوم علیه مشترک بین عبارتهای صورت
 و مخرج را بدست آوریم ، از روش تقسیمهای متوالی استفاده می کنیم (صورت
 را A و مخرج را B می گیریم) .
 ابتدا مخرج کسر را بر صورت آن تقسیم می کنیم: خارج قسمت مساوی
 ۲ و باقیمانده مساوی $C = -20x^2 + x^2 - 4x - 1$ می شود .
 اکنون باید A را بر C تقسیم کنیم ، ولی برای اینکه به ضریبهای کسری
 در خارج قسمت برخورد نکنیم ، عبارت A را ۵ برابر کرده و سپس بر C
 تقسیم می کنیم :

$$\begin{array}{r}
 \frac{4x^4 + 11x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{8x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 1} \times 5 \\
 \begin{array}{r}
 20x^4 + 55x^3 + 10x^2 + 10x + 5 \\
 \underline{56x^3 + 6x^2 + 9x + 5} \quad \times 5 \\
 280x^3 + 30x^2 + 45x + 25 \\
 \underline{44x^2 - 11x + 11} : 11 \\
 4x^2 - x + 1
 \end{array}
 \end{array}$$

همانطور که دیده می شود ، ضمن عمل یکبار باقیمانده جزئی
 $56x^3 + 6x^2 + 9x + 5$ را ۵ برابر کرده ایم و در آخر عمل هم ، باقیمانده
 تقسیم ، یعنی $44x^2 - 11x + 11$ را بر ۱۱ تقسیم نموده ایم (روشن است
 که خارج قسمت این تقسیم با آنچه که ما به عنوان خارج قسمت نوشته ایم؛ ارتباطی
 ندارد ، ولی همانطور که قبلا هم گفته ایم ، در روش تقسیمهای متوالی برای

محاسبه بزرگترین مقسوم علیه مشترك، خارج قسمت نقشی ندارد).

حالا باید $1 - 4x + x^2 + 20x^2 - 2$ را بر $1 - x + 4x^2$ تقسیم کنیم، در این تقسیم خارج قسمت مساوی $1 - 5x$ و باقیمانده مساوی صفر می شود. بنابراین بزرگترین مقسوم علیه مشترك صورت و مخرج کسر $D = 1 - x + 4x^2$ است.

حالا برای ساده کردن کسر، صورت و مخرج آنرا بر D تقسیم می کنیم، نتیجه چنین می شود:

$$\frac{x^2 + 3x + 1}{2x^2 + x + 1}$$

و این کسر غیر ممکن التحویل است، زیرا D بزرگترین مقسوم علیه مشترك صورت و مخرج بود.

۳. قابلیت تقسیم کثیر الجمله $f(x)$ بر $ax + b$

فرض می کنیم که در تقسیم $f(x)$ بر $ax + b$ ، خارج قسمت برابر $Q(x)$ و باقیمانده برابر R شود (چون مقسوم علیه درجه اول است، باقیمانده مقداری ثابت خواهد بود). در این صورت خواهیم داشت:

$$(ax + b) \cdot Q(x) + R = f(x) \quad (1)$$

می دانیم که رابطه (۱) (رابطه تقسیم) يك اتحاد است و بنابراین به ازای هر مقدار دلخواه x برقرار است. این اتحاد به ازای ریشه مقسوم علیه $\left(x = -\frac{b}{a}\right)$ به صورت زیر درمی آید:

$$R = f\left(-\frac{b}{a}\right)$$

یعنی باقیمانده تقسیم هر کثیر الجمله $f(x)$ بر يك دوجمله ای درجه اول با قرار دادن ریشه مقسوم علیه در $f(x)$ بدست می آید.

نتیجه. شرط لازم و کافی برای اینکه کثیر الجمله $f(x)$ بر دو جمله ای درجه اول $ax + b$ قابل قسمت باشد، این است که داشته باشیم:

$$f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$$

مثال . مطلوب است مقادیر a و n بشرطی که کثیرالجمله :

$$f(x) = (a-1)x^n - 2ax^{n-1} + 8$$

و در این صورت خارج قسمت را محاسبه کنید .

حل . شرط قابلیت تقسیم $f(x)$ بر $x-2$ این است که $f(2) = 0$ باشد:

$$f(2) = (a-1)2^n - 2a \times 2^{n-1} + 8 =$$

$$= (a-1)2^n - a \times 2^n + 8 = -2^n + 8 ;$$

$$-2^n + 8 = 0 \Rightarrow 2^n = 2^3 \Rightarrow n = 3$$

یعنی عبارت $f(x)$ به ازای هر مقدار دلخواه a با شرط $n=3$ بر $x-2$

قابل قسمت است ، به ازای $n=3$ داریم:

$$f(x) = (a-1)x^3 - 2ax^2 + 8 =$$

$$= ax^2(x-2) - (x-2)(x^2 + 2x + 4) =$$

$$= (x-2)(ax^2 - x^2 - 2x - 4) =$$

$$= (x-2)[(a-1)x^2 - 2x - 4]$$

یعنی خارج قسمت $f(x)$ بر $x-2$ چنین می شود:

$$Q(x) = (a-1)x^2 - 2x - 4$$

۴. قابلیت تقسیم بر $ax^n + b$

مقدمه. واضح است که هر کثیرالجمله $f(x)$ را می توان به صورت زیر

نوشت :

$$(a_0x^{n-1} + b_0x^{n-2} + \dots + l_0)(x^n)^p + (a_1x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + l_1)(x^n)^{p-1} + \dots + (a_px^{n-1} + b_px^{n-2} + \dots + l_p)(x^n) + (a_{p+1}x^{n-1} + b_{p+1}x^{n-2} + \dots + l_{p+1})$$

این عمل را اصطلاحاً تنظیم عبارت $f(x)$ بر حسب قوای (x^n)

می نامیم .

مثال. عبارت :

$$A = 2x^7 - x^6 - 2x^5 + 7x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 11x - 6$$

را بر حسب قوای (x^2) منظم کنید .

حل . به ترتیب می توان نوشت :

$$\begin{aligned} A = & 2x(x^2)^2 - (x^2)^2 - 3x(x^2)^2 + 7(x^2)^2 - 3x(x^2) + \\ & + 5(x^2) + 11x - 6 = (2x-1)(x^2)^2 - (3x-7)(x^2)^2 - \\ & - (3x-5)(x^2) + (11x-6) \end{aligned}$$

و همانطور که دیده می شود ، وقتی که عبارت A را بر حسب قوای (x^2) منظم کرده ایم ، ضریبهای نسبت به x حداکثر از درجه اول هستند .

بعد از این مقدمه می توان به سادگی شرط قابلیت تقسیم کثیرالجملة

$f(x)$ را بر $ax^n + b$ توضیح داد : $f(x)$ را بر حسب قوای (x^n) منظم می کنیم ، در این صورت باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $ax^n + b$ به ازای :

$$x^n = -\frac{b}{a}$$

$f(x)$ بر $ax^n + b$ قابل قسمت است :

مثال ۱. مطلوب است باقیمانده تقسیم عبارت :

$$A = 2x^7 - x^6 - 3x^5 + 7x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 11x - 6$$

بر $x^2 + 2$.

حل . عبارت A را بر حسب قوای نزولی (x^2) منظم می کنیم :

$$A = (2x-1)(x^2)^2 - (3x-7)(x^2)^2 - (3x-5)(x^2) + (11x-6)$$

باقیمانده تقسیم ، عبارت است از حاصل عبارت A به ازای $x^2 = -2$:

$$\begin{aligned} R(x) = & (2x-1)(-2)^2 - (3x-7)(-2)^2 - \\ & - (3x-5)(-2) + (11x-6) = -11x + 20 \end{aligned}$$

انتظار چنین باقیمانده ای را هم داشتیم ، زیرا در تقسیم A بر عبارت

درجه دوم $x^2 + 2$ معمولا باقیمانده ای از درجه اول بدست می آید .

مثال ۲. ثابت کنید که عبارت :

$$x^{3a} + x^{2b+1} + x^{c+2} \quad (1)$$

به ازای همه مقادیر a و b و c بر $x^2 + x + 1$ قابل قسمت است .

حل . مقسوم علیه به صورت دو جمله ای نیست و ظاهراً نمی توان از روش قابلیت تقسیم بر $ax^n + b$ استفاده کرد . ولی اگر مقسوم و مقسوم علیه را در $x - 1$ ضرب کنیم ، مسأله مفروض چنین می شود :

ثابت کنید که عبارت :

$$(x-1)(x^{2a} + x^{2b+1} + x^{2c+2}) = x^{2a+1} + x^{2b+2} + x^{2c+2} - x^{2a} - x^{2b+1} - x^{2c+2} \quad (2)$$

به ازای همه مقادیر a و b و c بر $x^2 - 1$ قابل قسمت است .

عبارت (۲) را بر حسب قوای (x^2) منظم می کنیم ، چنین می شود :

$$x(x^2)^a + x^2(x^2)^b + (x^2)^{c+1} - (x^2)^a - x(x^2)^b - x^2(x^2)^c$$

باقیمانده تقسیم این عبارت بر $x^2 - 1$ به ازای $x^2 = 1$ بدست می آید:

$$R = x + x^2 + 1 - 1 - x - x^2 = 0$$

یعنی در حالت $x \neq 1$ ، عبارت (۱) بر $x^2 + x + 1$ قابل قسمت است ،

وقتی هم که $x = 1$ باشد صحت کم واضح است .

۵. قابلیت تقسیم بر $[\varphi(x)]^n$

اگر کثیرالجمله $f(x)$ بر $[\varphi(x)]^n$ قابل قسمت باشد ، می توان نوشت :

$$f(x) = [\varphi(x)]^n \cdot Q(x) \quad (1)$$

خارج قسمت $f(x)$ بر $[\varphi(x)]^n$ را $Q(x)$ گرفته ایم .

از طرفین رابطه (۱) نسبت به x مشتق می گیریم ، می شود :

$$\begin{aligned} f'(x) &= n\varphi'(x)[\varphi(x)]^{n-1}Q(x) + [\varphi(x)]^n \cdot Q'(x) = \\ &= [\varphi(x)]^{n-1} [n\varphi'(x) \cdot Q(x) + \varphi(x) \cdot Q'(x)] \end{aligned}$$

مقدار داخل کروشه را $Q_1(x)$ می گیریم ، بنابراین :

$$f'(x) = [\varphi(x)]^{n-1} \cdot Q_1(x)$$

به این ترتیب اگر $f(x)$ بر $[\varphi(x)]^n$ قابل قسمت باشد ، مشتق آن

یعنی $f'(x)$ بر $[\varphi(x)]^{n-1}$ قابل قسمت خواهد بود . اگر عمل مشتق گیری

نسبت به x را در رابطه هایی که بدست می آید تا $(n-1)$ مرتبه ادامه دهیم ،

ردیف تساویهای زیر را خواهیم داشت :

$$f(x) = [\varphi(x)]^n \cdot Q(x)$$

$$f'(x) = [\varphi(x)]^{n-1} \cdot Q_1(x)$$

$$f''(x) = [\varphi(x)]^{n-2} \cdot Q_2(x)$$

$$f^{(n-1)}(x) = \varphi(x) \cdot Q_{n-1}(x)$$

نتیجه . شرط لازم و کافی برای قابلیت تقسیم $f(x)$ بر $[\varphi(x)]^n$ این است که خود $f(x)$ و همه مشتقهای متوالی آن تا مرتبه $(n-1)$ ام بر $\varphi(x)$ قابل قسمت باشند .

حالت خاص . برای اینکه کثیرالجمله $f(x)$ بر $(ax+b)^n$ قابل قسمت

باشد، باید $f(x)$ ، $f'(x)$ ، $f''(x)$ و ... و $f^{(n-1)}(x)$ به ازای $x = -\frac{b}{a}$

(ریشه $ax+b$) برابر صفر شوند .

مثال ۱. اولاً a و b را چنان پیدا کنید که عبارت :

$$f(x) = x^n + ax^{n-1} + b$$

بر $(x-1)^2$ قابل قسمت باشد ، ثانیاً خارج قسمت $f(x)$ بر $(x-1)^2$ را به ازای مقادیر بدست آمده a و b محاسبه کنید .

حل . اولاً برای اینکه $f(x)$ بر $(x-1)^2$ قابل قسمت باشد باید

داشته باشیم :

$$f(1) = f'(1) = 0$$

داریم :

$$f'(x) = nx^{n-1} + a(n-1)x^{n-2}$$

بنابراین داریم :

$$\begin{cases} f(1) = 1 + a + b = 0 \\ f'(1) = n + (n-1)a = 0 \end{cases}$$

و از آنجا :

$$a = -\frac{n}{n-1} ; b = \frac{1}{n-1}$$

در نتیجه برای اینکه $f(x)$ بر $(x-1)^2$ قابل قسمت باشد ، باید

به صورت زیر باشد :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^n - \frac{n}{n-1}x^{n-1} + \frac{1}{n-1} = \\
 &= \frac{1}{n-1}[(n-1)x^n - nx^{n-1} + 1]
 \end{aligned}$$

ثانیاً مقدار داخل کسره عبارت $f(x)$ را $\varphi(x)$ فرض می‌کنیم و به ترتیب می‌نویسیم :

$$\begin{aligned}
 \varphi(x) &= (nx^n - nx^{n-1}) - (x^n - 1) = \\
 &= nx^{n-1}(x-1) - (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) = \\
 &= (x-1)[nx^{n-1} - (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)] = \\
 &= (x-1)[(x^{n-1} - x^{n-2}) + (x^{n-2} - x^{n-3}) + \dots + \\
 &\quad + (x^{n-1} - x) + (x^{n-1} - 1)] = \\
 &= (x-1)[x^{n-2}(x-1) + x^{n-3}(x^2-1) + \dots + \\
 &\quad + x(x^{n-2}-1) + (x^{n-1}-1)] = \\
 &= (x-1)^2[x^{n-2} + x^{n-3}(x+1) + x^{n-4}(x^2+x+1) + \dots \\
 &\quad + x(x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + 1) + (x^{n-2} + x^{n-3} + \dots \\
 &\quad + \dots + x + 1)] = \\
 &= (x-1)^2[(n-1)x^{n-2} + (n-2)x^{n-3} + (n-3)x^{n-4} + \dots + 2x + 1]
 \end{aligned}$$

و از آنجا خارج قسمت $f(x)$ بر $(x-1)^2$ چنین است :

$$Q(x) = \frac{1}{n-1}[(n-1)x^{n-2} + (n-2)x^{n-3} + \dots + 2x + 1]$$

مثال ۲. تابع $f(x)$ از درجه پنجم را چنان پیدا کنید که $f(x) + 2$ بر $(x-1)^3$ و $f(x) - 4$ بر $(x+1)^3$ قابل قسمت باشد.

حل. وقتی که تابعی مثل $f(x) + 2$ بر $(x-1)^3$ قابل قسمت است، مشتق آن یعنی $f'(x)$ بر $(x-1)^2$ قابل قسمت خواهد بود، همچنین با توجه به اینکه $f(x) - 4$ بر $(x+1)^3$ قابل قسمت است، $f'(x)$ بر $(x+1)^2$ قابل قسمت است.

$f'(x)$ هم بر $(x-1)^2$ و هم بر $(x+1)^2$ قابل قسمت است، پس بر

حاصلضرب آنها یعنی $(x^2 - 1)^3$ قابل قسمت است [زیرا $(x - 1)^2$ و $(x + 1)^2$ نسبت به هم اولند]. بنابراین می توان نوشت :

$$f'(x) = \lambda(x^2 - 1)^2 = \lambda(x^4 - 2x^2 + 1)$$

λ مقداری است ثابت، زیرا $f(x)$ از درجه پنجم و مشتق آن $f'(x)$ از درجه چهارم است. از طرفین تساوی تابع اولیه می گیریم :

$$f(x) = \lambda \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x \right) + c$$

برای محاسبه مقادیر ثابت λ و c از مفروضات مسأله استفاده می کنیم:

$f(x) + 2$ بر $x - 1$ قابل قسمت است و بنابراین داریم :

$$f(1) + 2 = 0 \Rightarrow \lambda \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1 \right) + c + 2 = 0 \quad (1)$$

$f(x) - 4$ بر $x + 1$ قابل قسمت است و بنابراین داریم :

$$f(-1) - 4 = 0 \Rightarrow \lambda \left(-\frac{1}{5} + \frac{2}{3} - 1 \right) + c - 4 = 0 \quad (2)$$

از حل دستگاه معادله های (1) و (2) مقادیر λ و c بدست می آید :

$$\lambda = -\frac{45}{8} ; c = 1$$

و تابع $f(x)$ چنین است :

$$f(x) = -\frac{3}{8}(3x^5 - 10x^3 + 15x) - 1$$

۶. استفاده از ریشه های موهومی

در بحث مربوط به قابلیت تقسیم، می توان از ریشه های موهومی عبارت مقسوم علیه هم (شبه ریشه های حقیقی آن) استفاده کرد. در این مورد لازم است که بعضی قراردادها، نکات و قاعده های مربوط به عددهای موهومی را بدانیم.

I. عددهای به صورت $b\sqrt{-1}$ را عددهای موهومی خالص و عددهای به صورت $a + b\sqrt{-1}$ را عددهای مختلط گویند. در جبر معمولاً $\sqrt{-1}$ را به i نشان می دهند. رابطه های زیر در عملهای مربوط به عددهای موهومی مورد

استفاده است :

$$i^2 = -1 ; i^3 = -i ; i^4 = 1 ; i^5 = i ; \dots$$

و یا بطور کلی :

$$i^{4k} = 1 ; i^{4k+1} = i ; i^{4k+2} = -1 ; i^{4k+3} = -i$$

عدهای $a+bi$ و $a-bi$ را دو عدد مختلط مزدوج گویند .

حاصلضرب دو عدد مختلط مزدوج عددی است حقیقی :

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2$$

$\sqrt{a^2+b^2}$ را مدول یا کالبد عدهای $a+bi$ یا $a-bi$ هم می نامند و چنین

نمایش می دهند :

$$|a+bi| = |a-bi| = \sqrt{a^2+b^2}$$

دو عدد مختلط $a+bi$ و $a'+b'i$ وقتی برابرند که داشته باشیم :

$$a=a' ; b=b'$$

II. کبهای موهومی واحد .

همانطور که عدد ۱ دارای دو جذر حقیقی ± 1 است، ثابت می کنند که

معادله $x^n = 1$ دارای n ریشه حقیقی یا موهومی می باشد . ما در اینجا

کبهای واحد را بدست می آوریم . داریم :

$$x^3 = 1 \Rightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 0 ;$$

$$x_1 = 1 ; x_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} ; x_3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

کبهای موهومی واحد خاصیت جالبی دارند ، به این معنی که مجذور

هریک برابر با دیگری است :

$$x_2^2 = \frac{1-3-2i\sqrt{3}}{4} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = x_3$$

$$x_3^2 = \frac{1-3+2i\sqrt{3}}{4} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = x_2$$

و به همین مناسبت معمولاً آنها را به z و z^2 نشان می دهند. این ریشه ها

هم در معادله $x^3 = 1$ و هم در معادله $x^2+x+1=0$ صدق می کنند، یعنی

داریم :

$$j^2 = -1 \quad ; \quad j^2 + j + 1 = 0$$

و یا بطور کلی :

$$j^{2k} = -1 \quad ; \quad j^{2k+2} + j^{2k+1} + 1 = 0$$

III. ثابت می کنند که اگر معادله ای با ضریبهای حقیقی ، ریشه های موهومی داشته باشد ، این ریشه ها دو به دو مزدوج یکدیگرند . یعنی اگر $a+bi$ ریشه ای از يك معادله با ضریبهای حقیقی باشد ، $a-bi$ هم ریشه آن خواهد بود . به عبارت دیگر اگر به ازای $x=a+bi$ چند جمله ای $f(x)$ با ضریبهای حقیقی برابر صفر شود ، به ازای $x=a-bi$ هم مساوی صفر خواهد شد .

مثال ۱. مطلوب است مقدار n بشرطی که داشته باشیم :

$$(1+i)^n = (1-i)^n$$

حل . رابطه فرض را می توان چنین نوشت :

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = 1$$

صورت و مخرج کسر داخل پرانتز را در مزدوج مخرج ضرب می کنیم :

$$\left[\frac{(1+i)^2}{1-i^2}\right]^n = 1 \Rightarrow i^n = 1 \Rightarrow n = 4k$$

یعنی وقتی که n عددی صحیح و مضرب ۴ باشد ، تساوی فوق صحیح است .

مثال ۲. بدون عمل تقسیم ثابت کنید که عبارت :

$f(x) = 2x^2 + 5x^2 + 3x + 5$ بر $2x^2 - 2x + 5$ قابل قسمت است .

حل . روش اول: برای اینکه $f(x)$ بر $2x^2 - 2x + 5$ قابل قسمت

باشد ، باید به ازای ریشه های عبارت اخیر مساوی صفر شود :

$$2x^2 - 2x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm 3i}{2}$$

ولی چون ضریبهای $f(x)$ حقیقی و مقادیر جوابهای معادله $2x^2 - 2x + 5 = 0$ مزدوج یکدیگرند ، کافی است به ازای یکی از این ریشه ها مساوی صفر باشد ، در این صورت بدون تردید به ازای ریشه دوم هم مساوی صفر خواهد شد .

$$f\left(\frac{1+3i}{2}\right) = 2\left(\frac{1+3i}{2}\right)^4 + 5\left(\frac{1+3i}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{1+3i}{2}\right) + 5 = \\ = \frac{7-24i}{2} + \frac{-20+15i}{2} + \frac{3+9i}{2} + 5 = 0$$

روش دوم: از روش ضریبهای نامعین استفاده می‌کنیم، برای اینکه $f(x)$ بر سه جمله‌ای $2x^2 - 2x + 5$ قابل قسمت باشد باید داشته باشیم:

$$2x^4 + 5x^2 + 3x + 5 = (2x^2 - 2x + 5)(x^2 + Ax + B)$$

ضریبهای جمله‌های متشابه را در دو طرف اتحاد مساوی قرار می‌دهیم؛ به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} 2(A-1) = 0 \\ 2B - 2A + 5 = 5 \\ 5A - 2B = 3 \\ 5B = 5 \end{cases}$$

اتحاد وقتی ممکن است که این دستگاه متوافق باشد، از معادله‌های اول و چهارم دستگاه بدست می‌آید:

$$A = B = 1$$

که ضمناً در معادله‌های دوم و سوم دستگاه هم صدق می‌کنند. مزیت روش دوم در این است که ضمن اثبات حکم مسأله، خارج قسمت تقسیم هم بدست می‌آید:

$$Q(x) = x^2 + x + 1$$

مثال ۳. ثابت کنید که عبارت:

$$f(x) = (x+1)^n - x^n - 1$$

بر $x(x+1)(x^2+x+1)$ قابل قسمت است (بشرطی که n عددی فرد و غیر قابل قسمت بر ۳ باشد).

حل. به‌سادگی دیده می‌شود که به‌ازای همه مقادیر n : $f(0) = 0$ و

به‌ازای مقادیر فرد n : $f(-1) = 0$ است و بنابراین $f(x)$ بر $x(x+1)$ قابل قسمت است.

برای اینکه ثابت کنیم $f(x)$ بر $x^2 + x + 1$ قابل قسمت است، ریشه‌های سه جمله‌ای اخیر را بدست می‌آوریم :

$$x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = j \text{ و } j^2$$

بنابراین اگر $f(x)$ به ازای یکی از کمبهای موهومی واحد برابر صفر بشود بر $x^2 + x + 1$ قابل قسمت خواهد بود .

$$f(j) = (j+1)^n - j^n - 1$$

n عددی است غیر قابل قسمت بر ۳ و بنابراین دو حالت وجود دارد :

$$I. n = 3k + 1$$

$$f(j) = (j+1)^{3k+1} - j^{3k+1} - 1 =$$

$$= (j+1)(j+1)^{3k} - j \cdot j^{3k} - 1$$

باتوجه به رابطه‌های $j^3 = 1$ و $j^2 + j + 1 = 0$ و اینکه $3k$ عددی است زوج (چون $n = 3k + 1$ فرد است) خواهیم داشت :

$$f(j) = (j+1) - j - 1 = 0$$

$$II. n = 3k + 2$$

$$f(j) = (j+1)^{3k+2} - j^{3k+2} - 1 =$$

$$= (j+1)^2 (j+1)^{3k} - j^2 \cdot j^{3k} - 1 =$$

$$= -(j+1)^2 - j^2 - 1 = -(j^2 + 2j + 1) - j^2 - 1 =$$

$$= -2j - 2j^2 - 2 = -2(j^2 + j + 1) = 0$$

و بنابراین $f(x)$ بر $x^2 + x + 1$ قابل قسمت است .

تمرینها

۸۲. مقادیر m و n را چنان پیدا کنید که عبارت :

$$f(x) = x^5 + nx^4 + (3m+n)x^3 - 7x^2 + 2(2m-n)x - 1$$

بر $x^2 - 3x + 2$ قابل قسمت باشد .

۸۳. مطلوب است مقادیر a و b برای اینکه عبارت $x^4 - 2x^3 + ax + b$

بر $x^2 - 2x + 4$ قابل قسمت باشد .

۸۴. ثابت کنید که عبارت $f(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$

بر $(x-1)^2$ قابل قسمت است و سپس خارج قسمت را بدست آورید .

۸۵. به ازای چه مقدار m عبارت $x^4 + ma^2x^2 + a^4 - ax + a^2$ بر $x^2 - ax + a^2$ قابل قسمت است.

۸۶. اولاً a و b را چنان پیدا کنید که عبارت $a(x-2)^n + b(x-1)^n - 1$ بر $x^2 - 3x + 2$ قابل قسمت باشد، ثانیاً به ازای این مقادیر a و b خارج قسمت را محاسبه کنید.

۸۷. اگر باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $x-1$ و $x-3$ به ترتیب ۱ و -4 باشد، باقیمانده تقسیم $f(x)$ را بر $(x-1)(x-3)$ بدست آورید.

۸۸. اگر باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $x+1$ و $x-2$ به ترتیب ۱ و -3 باشد، باقیمانده تقسیم $f(x)$ را بر $(x+1)(x^2-4)$ بدست آورید.

۸۹. $f(x)$ از درجه چهارم را چنان پیدا کنید که بر $x+2$ قابل قسمت و مجموع ضریبهای عددی آن مساوی ۱۵ باشد و در تقسیم بر $x+1$ و $x+3$ و $x-2$ به ترتیب باقیماندههایی مساوی ۵ و -13 و ۹۲ داشته باشد.

۹۰. تابع $f(x)$ از درجه سوم را چنان پیدا کنید که مجموع ضریبهای آن مساوی ۲، بر $x+1$ قابل قسمت و در تقسیم بر x^2+1 باقیماندهای مساوی $x-1$ داشته باشد.

۹۱. a و b را چنان پیدا کنید که x^4+9 بر x^2+ax+b قابل قسمت باشد.

۹۲. ثابت کنید که عبارت $f(x) = x^4a + x^3b + 1 + x^2c + 2 + x^d + 3$ به ازای همه مقادیر صحیح و مثبت a و b و c و d بر $x^3 + x^2 + x + 1$ قابل قسمت است بطور کلی ثابت کنید عبارت :

$$f(x) = x^{na} + x^{nb+1} + x^{nc+2} + \dots + x^{n1+(n-1)}$$

بر $x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1$ با شرط صحیح و مثبت بودن n و a و b و c و $\dots$ و 1 قابل قسمت است.

۹۳. مقادیر m و n و p و q را چنان پیدا کنید که عبارت :

$$f(x) = x^{na} + mx^{a+1} + nx^a + px^{a-1} + q$$

بر $(x-1)^4$ قابل قسمت باشد (a عددی است صحیح و بزرگتر از ۳).

۹۴. $f(x)$ از درجه هفتم را چنان پیدا کنید که در تقسیم بر $(x+1)^4$ و $(x-1)^2$ به ترتیب باقیماندههایی مساوی ۱ و -1 داشته باشد.

۹۵. ثابت کنید که اگر $f(x)$ از درجه دوم در تقسیم بر $x-1$ و $x-2$ و $x-3$ باقیمانده‌هایی برابر با صفر و ۱ و ۴ داشته باشد، داریم:

$$f(u) = (u-1)^2$$

۹۶. $f(x)$ از درجه پنجم را چنان پیدا کنید که $f(x)+1$ بر x^2+1 و $f(x)-1$ بر x^2+1 قابل قسمت باشد و در حالتی که ضریب بزرگترین درجه واحد فرض شود، $f(x)$ را بر حسب قوای $x+1$ بنویسید.

۹۷. ثابت کنید که عبارت زیر بر $(x-1)^3$ قابل قسمت است:

$$f(x) = (1-x^n)(1+x) - 2nx^n(1-x) + n^2x^n(1-x)^2$$

۹۸. در سه جمله‌ای ax^2+bx^2+c ضریبهای a و b و c را چنان تعیین کنید که حاصل ضرب باقیمانده‌های تقسیم آن بر x^2+1 و x^2+1 برابر $10-12x+2x^2$ باشد.

۹۹. ثابت کنید که اگر کثیرالجمله $x^4+px^2+qx+a^2$ بر x^2-1 قابل قسمت باشد بر x^2-a^2 هم قابل قسمت است.

۱۰۰. می‌دانیم که در تقسیم عبارت $f(x)=x^2+px+q$ بر $x-\alpha$ و $x-\beta$ به ترتیب باقیمانده‌هایی مساوی β و α بدست آمده است. ثابت کنید:

$$1) \quad (\alpha+\beta)(\alpha\beta+1)=q$$

$$2) \quad \alpha^2+\beta^2+\alpha\beta=-(p+1)$$

و به فرض $p=-22$ و $q=-19$ مقادیر α و β را محاسبه کنید.

۱۰۱. ثابت کنید که عبارت:

$$x^{n+1}\cos(n-1)\alpha - x^n\cos n\alpha - x\cos\alpha + 1$$

بر عبارت $x^2-2x\cos\alpha+1$ قابل قسمت است.

۱۰۲. ثابت کنید کثیرالجمله:

$$f(x) = x(x^{n-1} - na^{n-1}) + a^n(n-1)$$

بر $(x-a)^2$ قابل قسمت است.

۱۰۳. ثابت کنید کثیرالجمله:

$$f(x) = (1-x^n)(1+x) - 2nx^n(1-x) - n^2x^n(1-x)^2$$

بر $(x-1)^3$ قابل قسمت است.

۱۰۴. عبارت زیر مفروض است:

$$f(x, y) = (x+y)^n - x^n - y^n$$

اولاً اگر n عددی فرد و غیر قابل قسمت بر ۳ باشد، ثابت کنید که $f(x, y)$ بر عبارت :

$$xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$$

قابل قسمت است .

ثانیاً اگر باقیمانده تقسیم n بر ۶ برابر واحد باشد، ثابت کنید که $f(x, y)$ بر عبارت :

$$xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2$$

قابل قسمت است .

ثالثاً با استفاده از حل این مسأله عبارتهای زیر را تجزیه کنید :

$$۱) \quad (x+y)^3 - x^3 - y^3$$

$$۲) \quad (x+y)^5 - x^5 - y^5$$

$$۳) \quad (x+y)^7 - x^7 - y^7$$

۱۰۵. به چه شرطی عبارت : $(x+y+z)^m - x^m - y^m - z^m$ بر :

$$(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$$
 قابل قسمت است ؟

۱۰۶. به چه شرطی $x^m - y^m$ بر $x^n - y^n$ قابل قسمت است ؟ (n و m)

عددهایی مثبت و صحیح هستند) .

۱۰۷. با چه شرطی عبارت :

$$f(x) = 1 + x^1 + x^2 + \dots + x^{2n-2}$$

بر عبارت :

$$\varphi(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}$$

قابل قسمت است ؟

۱۰۸. ثابت کنید که عبارت :

$$f(\bar{x}) = (\cos \alpha + x \sin \alpha)^n - \cos n\alpha - x \sin n\alpha$$

بر $1 + x^2$ قابل قسمت است .

۱۰۹. ثابت کنید که عبارت :

$$f(x) = x^n \sin \alpha - a^{n-1} x \sin n\alpha + a^n \sin(n-1)\alpha$$

بر $x^2 - 2ax \cos \alpha + a^2$ قابل قسمت است .

۱۱۰. ثابت کنید که اگر $f(x, y)$ نسبت به y و x متقارن^۱ و بر $x - y$ قابل

قسمت باشد، بر $(x-y)^2$ قابل قسمت است.

۱۱۱. بزرگترین مقسوم علیه مشترك بین دو عبارت زیر را بدست آورید :

$$f(x) = x^{91} + 1 \quad ; \quad \varphi(x) = x^{65} + 1$$

۱۱۲. کسر زیر را ساده کنید :

$$\frac{x^5 - 2x^2 + x^2 + 2x - 1}{x^6 - 2x^5 + x^4 - x^2 + 2x - 1}$$

۱۱۳. با چه شرطی $f(x) = x^{2m} + x^m + 1$ بر $x^2 + x + 1$ قابل قسمت است ؟

۱۱۴. m و n را طوری پیدا کنید که $x^m + x^n + 1$ بر $x^2 + x + 1$ قابل قسمت باشد.

۱۱۵. باچه شرطی عبارت $f(x) = x^{2n} - x^{2n} + x^{2n} - x^n + 1$ بر :

$$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$
 قابل قسمت است ؟

۱۱۶. ثابت کنید که با شرط صحیح بودن x و y و a و b ، اگر :

$$f(x, y) = a^n b^n (x^{2n} + y^{2n}) \quad \text{بر} \quad xy(a^2 + b^2) - ab(x^2 + y^2)$$

قابل قسمت باشد. $\varphi(x, y) = x^n y^n (a^{2n} + b^{2n})$ هم بر همان عبارت قابل قسمت است.

۱۱۷. عبارت زیر مفروض است :

$$f(x, y, z) = (y-z)^n + (z-x)^n + (x-y)^n$$

ثابت کنید که $f(x, y, z)$ در حالت $n = 6k - 1$ بر :

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz$$

در حالت $n = 6k + 1$ بر $(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)^2$ قابل قسمت است و از آنجا دو عبارت زیر را تجزیه کنید :

$$۱) \quad (x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5$$

$$۲) \quad (x-y)^7 + (y-z)^7 + (z-x)^7$$

۱۱۸. $f(x)$ از درجه m را چنان پیدا کنید که بر $f'(x)$ (مشتق تابع $f(x)$) قابل قسمت باشد و داشته باشیم :

$$f(1) = 0 \quad ; \quad f(0) = 1$$

۱۱۹. مقادیر x را چنان پیدا کنید که عبارت :

$$a^{2r} + a^{2r} + \dots + a + 1$$

بر عبارت زیر قابل قسمت باشد :

$$a^{x-1} + a^{x-2} + \dots + a + 1$$

۱۲۵. ثابت کنید که اگر $a^p - b^p$ بر p قابل قسمت باشد بر p^2 نیز قابل قسمت است (a و b عددهایی صحیح و مثبت و p عددی است اول).

۱۲۱. $f(x)$ از درجه چهارم را چنان پیدا کنید که $f(x+1)$ بر $(x-1)^2$ و $f(x-1)$ بر $(x+1)^2$ قابل قسمت و $f(1) = 1$ باشد.

۱۲۲. ثابت کنید عبارت :

$$x^{n+1} \sin(n-1)\varphi - x^n \sin n\varphi + x \sin \varphi$$

بر $x^2 - 2x \cos \varphi + 1$ قابل قسمت است.

۱۲۳. در تقسیم $1 - abx^2$ بر $1 - (a+b)x + abx^2$ خارج قسمت را

بر حسب قوای صعودی x مرتب کنید. اگر عمل تقسیم را در جمله x^n خارج قسمت متوقف کنیم، صورت کلی باقیمانده را بنویسید.
این کسر را ساده کنید :

$$\frac{x^6 + 3x^5 + x^4 + 4x^3 - 5x^2 - x + 1}{x^6 + 6x^5 + 7x^4 - 8x^3 - 5x^2 + 2x + 1} \quad .124$$

.125

$$\frac{(35a+14b-10c)^2 + (35b+14c-10a)^2 + (35c+14a-10b)^2}{(15a+10b-6c)^2 + (15b+10c-6a)^2 + (15c+10a-6b)^2}$$

۱۲۶. ثابت کنید اگر k عددی صحیح و غیر قابل قسمت بر ۳ باشد، عبارت:

$$(a+b)^{2k} + a^{2k} + b^{2k}$$

بر $a^2 + ab + b^2$ قابل قسمت است.

۱۲۷. ثابت کنید عدد $19^{19} + 69^{69}$ بر ۴۴ قابل قسمت است.



عبارت‌های گنگ

بحث دربارهٔ عبارتهای گنگ و عملهای مربوط به آنها را در سالهای متوسطه دیده‌ایم و در اینجا تنها به نکته‌هایی می‌پردازیم که پایه علت اهمیت آنها ضرورت تکرار پیش می‌آید و یا به علت وضع خاص برنامهٔ متوسطه، بحث مفصل و دقیق آنها را ندیده‌ایم. در مورد معادله‌های گنگ هم در این بخش بخشی نداریم و اگر برای حل آنها نکته‌های تازه‌ای وجود داشته باشد در بخش مربوط به معادله‌ها گفتگو خواهد شد.

۱. وجود اعداد گنگ

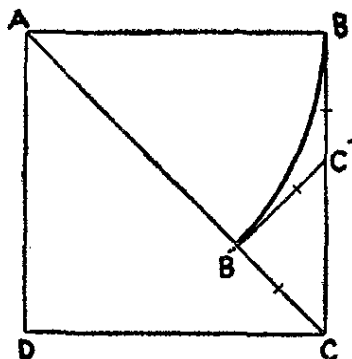
فیثاغورث کشف کرد که: «عددهای صحیح ۱، ۲، ۳ و غیره برای بنای ریاضی کافی نیست». قبل از این کشف بزرگ، فیثاغورث با اعتقاد و ایمان يك پیامبر تبلیغ می کرد که تمام طبیعت دنیای خارج و تمام موضوعهای ریاضی، فیزیک، متافیزیک *Métaphysique* و اخلاق از روی نمونه انفصالی اعداد صحیح ۱، ۲، ۳ و ... ساخته شده و می توانند به وسیله این عناصری که از جانب خدا فرستاده شده اند تعبیر و تأویل شوند. فیثاغورث می گفت که خدا همان عدد است.

این نظریه به این مناسبت رد شد که فیثاغورث کشف کرد: نمی توان دو عدد صحیح پیدا کرد بطوری که مجذور یکی مساوی دو برابر مجذور دیگری باشد. این مطلب را می توان با استدلال ساده ای بیان کرد، این استدلال برای همه کسانی که به مفهومیهای جبر و یا حساب مقدماتی آشنا باشند، قابل فهم است.

فیثاغورث در هندسه به این مانع برخورد: نسبت يك ضلع مربع به-قطرش نمی تواند به وسیله نسبت دو عدد صحیح بیان شود. ... با بیان دیگری می توان گفت که ریشه دوم عدد ۲ يك عدد گنگ است، یعنی مساوی با هیچ عدد صحیح یا کسری که صورت و مخرج آن دو عدد صحیح باشد، نیست.

به این ترتیب يك تصور هندسی فوق العاده ساده، یعنی قطر مربع، ثابت نمود که اعداد صحیح ۱، ۲، ۳ و ... برای بیان پاره خطها کافی نیستند و در نتیجه نخستین نظریه فلسفی فیثاغورثیها را باطل نمود: درحالی که می-توانیم قطر مربع را از نظر هندسی رسم کنیم، نمی توانیم آنرا به وسیله يك عدد گویا نشان دهیم.

مربع ABCD که ضلع آنرا واحد انتخاب کرده ایم در نظر می گیریم (شکل ۱). اگر جذر ۲ را عدد گویایی فرض کنیم، باید بین دو پاره خط



(شکل ۱)

AB و AC واحد مشترکی مانند l وجود داشته باشد (یعنی قطعه خطی که بتواند در هر دو پاره خط AB و AC به تعداد صحیح و معینی جا گیرد). اگر B' را محل تلاقی AC با محیط دایره‌ای به مرکز A و شعاع AB فرض کنیم و C' نقطه تلاقی مماس در B' بر این دایره، با BC باشد، واضح است که خواهیم داشت: $B'C = B'C' = BC'$ ، بنابراین پاره‌های AB و $B'C = AC - AB'$ باید به وسیله واحد مشترک l قابل اندازه‌گیری باشند، همچنین برای پاره‌های $CC' = AB - B'C$ و $B'C$.

اکنون می‌توان همین عملها را در مورد پاره‌های جدید تکرار کرد، با این تفاوت که پاره‌های CC' و $B'C$ کوچکتر از پاره‌های AB و AC می‌باشند و در حقیقت همانطور که از شکل هم پیداست از نصف آنها هم کوچکترند. اگر این عمل را به اندازه کافی تکرار کنیم، می‌توانیم پاره‌های بدست آوریم که به اندازه دلخواه کوچک باشند (زیرا هر مرتبه پاره‌ها کوچکتر از نصف می‌شوند). ولی در هر حال l باید از تمام پاره‌های بدست آمده کوچکتر باشد و این به معنای آن است که برای دو پاره خط AB و AC نمی‌توان واحد مشترکی پیدا کرد.

این عدم امکان اندازه‌گیری، ریاضی دانها را متوجه عددهای گنگ و مفهوم «بی‌نهایت» کرد، مفهومی که خارج از ذهن و متناقض بنظر می‌رسید.

۱- البته می‌توان چند را به وسیله رقمهای اعشاری با تقریب لازم نوشت

این مسأله ساده، نتیجه‌هایی را بیارآورد که تا آن زمان برای ریاضی-دانشا مفهوم قانع‌کننده‌ای نداشت، این نتیجه‌ها شامل تصورهایی از بی‌نهایت، حد و پیوستگی در ریاضی بود، تصورهایی که باید آنها را ریشه‌های آنالیز جدید دانست.^۱

۲. یادآوری يك قرارداد برای تبدیلهای جبری

اتحاد اساسی :

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

به‌ازای مقادیر زوج n وقتی صحیح است که $a > 0$ باشد و به‌ازای مقادیر فرد n همیشه صحیح است .

در حالت زوج بودن $n : n = 2k$ ، داریم :

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = \sqrt[2k]{|a|^{2k}} = |a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

و یا مثلاً :

$$\sqrt[2mn]{a^{2m}} = \sqrt[2mn]{|a|^{2m}} = \sqrt[n]{|a|} = \begin{cases} \sqrt[n]{a} & (a \geq 0) \\ \sqrt[n]{-a} & (a < 0) \end{cases}$$

→ (آنطور که در دبیرستان عمل می‌کنند)، ولی رقمهای اعشاری هرگز تکرار نشده و دوره تناوبی مانند آنچه که در کسره‌های اعشاری وجود دارد پیدا نمی‌کند. مثلاً $\frac{1}{7} = 0.142857142857 \dots$ دارای دوره تناوبی است که هرگز پایان نمی‌پذیرد (در محاسبه کسره‌های اعشاری هر وقت در باقیمانده به عددی می‌رسند که در صورت کسر اصلی وجود دارد و یا یک‌دفعه دیگر در باقیمانده تکرار شده است، عمل تقسیم را ادامه نمی‌دهند، زیرا پس از آن همان رقمهای قبلی دوباره تکرار می‌شود).

۱- از کتاب آنالیز ریاضی تألیف آندره دولاشه ترجمه پرویز شهریاری.

همچنین تساوی $\sqrt[3]{x} = \sqrt[6]{x^2}$ تنها برای مقادیر مثبت x صحیح است، به ازای مثلاً $x = -8$ ، سمت چپ تساوی $\sqrt[3]{-8} = -2$ و سمت راست تساوی $\sqrt[6]{64} = 2$ می شود. (اگر در حوزة اعداد موهومی هم بحث کنیم $\sqrt[3]{-8}$ دارای سه جواب و $\sqrt[6]{64}$ دارای ۶ جواب است).

بطور خلاصه بین جذر ۲۵ و $\sqrt{25}$ اختلاف وجود دارد، وقتی داشته باشیم: $x^2 = 25$ ، برای محاسبه x باید از ۲۵ جذر گرفت که در این صورت جواب x مساوی ± 5 می شود:

$$x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm \sqrt{25} = \pm 5$$

در حالی که $\sqrt{25}$ تنها به معنای مقدار حسابی جواب آن یعنی ۵ است و بهتر است برای سهولت کار در موارد حرفی بنویسیم:

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

از طرف دیگر می دانیم که قدر مطلق يك عدد مثبت، خود آن عدد است:

$$|+5| = 5$$

در حالی که قدر مطلق يك عدد منفی، قرینه آن است:

$$|-5| = -(-5) = 5$$

چند مثال:

$$\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} \text{ عبارت حاصل عبارت } 01$$

حل.

$$\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = \sqrt{(a-b)^2} = |a-b|$$

و در نتیجه در حالت $a > b$ داریم:

$$\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = a - b$$

و در حالت $a < b$:

$$\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = b - a$$

۰۲. عبارت زیر را ساده کنید:

$$A = \frac{\sqrt{4+4p+p^2} - \sqrt{4-4p+p^2}}{\sqrt{4+4p+p^2} + \sqrt{4-4p+p^2}}$$

حل. اگر $p \neq -2$ باشد، داریم:

$$A = \frac{|2+p| - |2-p|}{|2+p| + |2-p|} = \frac{1 - \frac{|2-p|}{|2+p|}}{1 + \frac{|2-p|}{|2+p|}}$$

در حالتی که $\frac{2-p}{2+p} > 0$ یعنی $2 < p < 2$ یا $|p| < 2$ باشد،

داریم:

$$A = \frac{1 - \frac{2-p}{2+p}}{1 + \frac{2-p}{2+p}} = \frac{p}{2};$$

و در حالتی که $\frac{2-p}{2+p} < 0$ یعنی $p < -2$ یا $|p| > 2$ باشد، داریم:

$$A = \frac{1 + \frac{2-p}{2+p}}{1 - \frac{2-p}{2+p}} = \frac{2}{p};$$

و وقتی $\begin{cases} p = -2 \\ p = 2 \end{cases}$ یا $|p| = 2$ باشد، می‌توان هر کدام از دو جواب

را به دلخواه انتخاب کرد.

۳. عامل‌های ممکن را از زیر رادیکال $\sqrt{(a-5)^6(a-3)^3}$ بیرون

بیاورید.

حل. این عبارت وقتی حقیقی است که $a \geq 3$ باشد، زیرا در غیر این

صورت $(a-3)^3$ و همراه آن تمام زیر رادیکال منفی و مقدار رادیکال موهومی می‌شود.

اگر $a \geq 5$ باشد، مقدار رادیکال چنین می‌شود:

$$\sqrt{(a-5)^2(a-3)^2} = (a-5)^2(a-3)\sqrt{a-3};$$

و اگر $3 < a < 5$ باشد، داریم:

$$\sqrt{(a-5)^2(a-3)^2} = -(a-5)^2(a-3)\sqrt{a-3}$$

و بطور کلی می توان نوشت:

$$\sqrt{(a-5)^2(a-3)^2} = |a-5|^2(a-3)\sqrt{a-3} (a > 3)$$

۴. حاصل عبارت زیر را بدست آورید:

$$\frac{\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} + \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}{\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} - \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}} - \frac{1}{a}$$

حل. قبل از همه متذکر می شویم که برای اینکه این عبارت در حوزۀ

معددهای حقیقی باشد باید $1+a$ و $1-a$ هم علامت باشند، ولی هر دوی آنها منفی

نمی توانند باشند، زیرا برای منفی بودن $1+a$ باید $a < -1$ و برای

منفی بودن $1-a$ باید $a > 1$ باشد که غیر ممکن است. بنابراین $1+a$

و $1-a$ باید هر دو مثبت و $-1 < a < 1$ باشد، از این مقادیر باید $a = 0$

را امتثا کرد، زیرا در این صورت $\frac{1}{a}$ مفهوم خود را از دست می دهد. همچنین

واضح است به ازای $a = 1$ یا $a = -1$ یکی از کسره های زیر را دیکالهام مفهوم

خود را از دست می دهند و بنابراین شرط وجود عبارت در حوزۀ اعداد حقیقی

این است که $-1 < a < 1$ یا $0 < a < 1$ باشد.

با توجه به این شرایط داریم:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1+a}{1-a}} + \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} &= \frac{\sqrt{(1+a)^2} + \sqrt{(1-a)^2}}{\sqrt{1-a^2}} = \\ &= \frac{|1+a| + |1-a|}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{(1+a) + (1-a)}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \end{aligned}$$

و همچنین:

$$\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} - \sqrt{\frac{1-a}{1+a}} = \frac{2a}{\sqrt{1-a^2}}$$

و در نتیجه حاصل عبارت برابر صفر می شود .

۳. گویا کردن مخرج یا صورت کسرها

گویا کردن مخرج و یا صورت کسرها ، نه تنها برای ساده کردن بسیاری از عبارتها مورد احتیاج است ، بلکه به عنوان روشی از جبر در حل بسیاری از مسأله‌ها مثل رفع ابهام از کسرهای به صورت $\frac{0}{0}$ یا $\infty - \infty$ بکار می رود . در اینگونه موارد ، بسته به وضع عبارت ، ممکن است لازم باشد که صورت و یا مخرج کسر را گویا کنیم .

اگر در این بند تنها از گویا کردن مخرج کسر گفتگو می کنیم ، تنها برای سهولت بحث است و الا عین این روشها را برای گویا کردن صورت کسر هم می توان بکار برد .

حالتی که مخرج کسر شامل یک رادیکال باشد . روش کار را با چند

مثال روشن می کنیم :

$$۱) \quad \frac{A}{\sqrt[n]{x}} = \frac{A \sqrt[n]{x^{n-1}}}{\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}} = \frac{A \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}{x}$$

در این مثال $x \neq 0$ و برای مقادیر زوج n ، $x > 0$ است .

$$۲) \quad \frac{۱۵}{\sqrt[5]{۶۴۸}} = \frac{۱۵}{\sqrt[5]{۲^۳ \times ۳^۴}} = \frac{۱۵ \sqrt[5]{۲^۲ \times ۳}}{۲ \times ۳} = \frac{۵ \sqrt[5]{۱۲}}{۲}$$

حالتی که مخرج کسر شامل مجموع جبری دو رادیکال باشد . در

این حالت تا وقتی که لااقل یکی از رادیکالهای مخرج فرجه زوج دارد ، صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب می کنیم و وقتی که فرجه های هر دو رادیکال فرد باشد ، پس از یکی کردن فرجه ها ، یکی از دو اتحاد زیر را مورد استفاده قرار می دهیم :

$$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2} \cdot b+a^{n-3} \cdot b^2+\dots+b^{n-1})= \\ = a^n - b^n$$

$$(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2} \cdot b+a^{n-3} \cdot b^2-\dots+b^{n-1})= \\ = a^n + b^n \quad (n=2k+1)$$

چند مثال :

۱. مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{y}}$ را گویا کنید (x و y مقادارهایی

مثبت هستند) .

حل. به ترتیب داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{y}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt[4]{y}}{x - \sqrt[4]{y}} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt[4]{y})(x + \sqrt[4]{y})}{x^2 - y}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{y}} = \frac{\sqrt[5]{x^4} - \sqrt[5]{x^3y} + \sqrt[5]{x^2y^2} - \sqrt[5]{xy^3} + \sqrt[5]{y^4}}{x + y}$$

۳. حد کسر زیر را ، وقتی که x به سمت عدد ۱ میل کند، پیدا کنید.

$$y = \frac{(x-1)^{n-1}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[4]{x}-1)(\sqrt[8]{x}-1)\dots(\sqrt[n]{x}-1)}$$

حل. برای اینکه عامل $\sqrt{x}-1$ در مخرج گویا شود باید صورت و مخرج را در $\sqrt{x}+1$ ضرب کنیم و برای اینکه عامل $\sqrt[4]{x}-1$ گویا شود، باید صورت و مخرج را در $\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x} + 1$ ضرب کنیم و بطور کلی برای اینکه عامل $\sqrt[n]{x}-1$ گویا شود باید صورت و مخرج را در عبارت

$\sqrt[n]{x^{p-1}} + \sqrt[n]{x^{p-2}} + \dots + 1$ ضرب کنیم که در این صورت تمام عاملهای مخرج به $x-1$ تبدیل و حاصلضرب آنها با $(x-1)^{n-1}$ در صورت حذف

می‌شود و داریم :

$$y = (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x^2} + \sqrt{x} + 1)(\sqrt{x^3} + \sqrt{x^2} + \sqrt{x} + 1) \dots (\sqrt{x^{n-1}} + \sqrt{x^{n-2}} + \sqrt{x^{n-3}} + \dots + 1)$$

و در نتیجه :

$$\lim_{x \rightarrow 1} y = 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n = n!$$

(حاصلضرب عددهای صحیح متوالی از ۱ تا n را با $n!$ نشان می‌دهند

و می‌خوانند فاکتوریل (n)).

حالتی که مخرج کسر شامل مجموع جبری سه یا چهار رادیکال با فرجهٔ

۲ باشد. در این حالت باید رادیکالهای مخرج را گروه‌بندی کرد، به نحوی که در هر گروه ۲ یا ۱ رادیکال وجود داشته باشد و سپس صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب نمود.

در این مورد تنها به این نکته اشاره می‌کنیم که برای این گروه‌بندی بهتر است رادیکالها را چنان تقسیم بندی کنیم که مجموع عددهای زیر رادیکالها در گروههای مختلف، حتی الامکان به هم نزدیک باشند. یعنی مثلاً در موردی که مخرج کسر شامل سه رادیکال است، رادیکال با عدد بزرگتر را تنها و دو رادیکال دیگر را با هم می‌گیریم و در موردی که مخرج کسر شامل چهار رادیکال است، دو رادیکال متوسط را در یک گروه و دو رادیکال دیگر را در گروه دوم قرار می‌دهیم.

چند مثال :

۱. مخرج کسر زیر را گویا کنید :

$$A = \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2} - \sqrt{3}}$$

حل. داریم :

$$A = \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{5} - (\sqrt{3} - \sqrt{2})} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{5 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{2\sqrt{6}} = \\
 &= \frac{\sqrt{6}(\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2})}{12}
 \end{aligned}$$

۲. مخرج کسر زیر را گویا کنید:

$$A = \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{5} + \sqrt{3} + 1}$$

حل. به ترتیب داریم:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{(\sqrt{5} + \sqrt{3}) + (\sqrt{7} + 1)} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{7} - 1}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{7} + 1)^2} = \\
 &= \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{7} - 1}{2(\sqrt{15} - \sqrt{7})} = \frac{(\sqrt{15} + \sqrt{7})(\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{7} - 1)}{16}
 \end{aligned}$$

۳. مخرج کسر زیر را گویا کنید:

$$A = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$$

حل. در این مثال، با توجه به صورت کسر اگر $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ دادر

یک گروه قرار دهیم، سریع تر به جواب اصلی می‌رسیم:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{(\sqrt{5} + \sqrt{3}) + \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 - 2} = \\
 &= \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2})}{2\sqrt{3}(\sqrt{5} + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2})}{6}
 \end{aligned}$$

حالتی که مخرج کسر شامل مجموع جبری سه رادیکال با فرجه ۳ باشد.

در این حالت باید از اتحاد زیر استفاده کرد:

$$\begin{aligned}
 (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) &= \\
 &= a^3+b^3+c^3-3abc \quad (۱)
 \end{aligned}$$

چند مثال:

۱. مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1}$ را گویا کنید.

حل. با توجه به اتحاد (۱) باید صورت و مخرج کسر را در عبارت زیر ضرب کرد :

$$\sqrt{9} + \sqrt{4} + 1 + \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

که در این صورت خواهیم داشت :

$$\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2} + 1} = \frac{\sqrt{9} + \sqrt{6} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \sqrt{2} + 1}{2 + 3\sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{9} + \sqrt{6} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)(4 - 6\sqrt{6} + 9\sqrt{36})}{170}$$

۲. مخرج کسر $\frac{A}{\sqrt{49} - \sqrt{14} + \sqrt{4}}$ را گویا کنید .

حل. مخرج کسر به صورت $a^2 - ab + b^2$ است که در آن $a = \sqrt{7}$ و $b = \sqrt{2}$ می باشد و بنابراین کافی است صورت و مخرج را در $\sqrt{7} + \sqrt{2}$ ضرب کنیم :

$$\frac{A}{\sqrt{49} - \sqrt{14} + \sqrt{4}} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{2}}{7 + 2} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{2}}{9}$$

استفاده از روش ضریبهای نامعین. گاهی برای گویا کردن مخرج کسرها، می توان از روش ضریبهای نامعین استفاده کرد (بخش تجزیه عبارتهای جبری را ببینید) . مثال زیر مطلب را روشن می کند .

مثال : مخرج کسر $\frac{1}{4\sqrt{4} - 2\sqrt{2} - 16}$ را گویا کنید .

حل. A و B و C را که با هم صفر نیستند ، چنان در نظر می گیریم که حاصل ضرب :

$$(A\sqrt{4} + B\sqrt{2} + C)(4\sqrt{4} - 2\sqrt{2} - 16)$$

برابر با عددی گویا شود. از اینجا به دستگاه زیر خواهیم رسید :

$$\begin{cases} -16A - 2B + 4C = 0 \\ 8A - 16B - 2C = 0 \end{cases}$$

که يك دسته از جوابهای آن $A = 1$, $B = 0$, $C = 4$ است

یعنی برای گویا کردن مخرج کسر می توان صورت و مخرج را در $\sqrt{4} + 4$

ضرب کرد ، در این صورت :

$$\frac{1}{4\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{2}-16} = -\frac{\sqrt[3]{4}+4}{68}$$

استفاده از تجزیهٔ مخرج . در بعضی موارد ، مخرج کسر قابل تجزیه است و در این صورت می‌تواند به عاملهای ساده‌تری تبدیل شود که امکان گویا کردن مخرج را به وجود آورد .

مثال : مخرج کسر زیر را گویا کنید :

$$A = \frac{1}{\sqrt{15} + \sqrt{10} + \sqrt{6} + \sqrt{5} + \sqrt{2} + 2}$$

حل. مخرج کسر را می‌توان چنین نوشت :

$$\begin{aligned} & (\sqrt{15} + \sqrt{10} + \sqrt{5}) + (\sqrt{6} + 2 + \sqrt{2}) = \\ & = \sqrt{5}(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1) + \sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1) = \\ & = (\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1) = \\ & = (\sqrt{5} + \sqrt{2})[(\sqrt{2} + 1) + \sqrt{3}] \end{aligned}$$

و بنابراین خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} A &= \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{2} + 1 - \sqrt{3})}{3[(\sqrt{2} + 1)^2 - 3]} = \\ &= \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{2} - \sqrt{3} + 1)}{6\sqrt{2}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{2} - \sqrt{3} + 1)}{12} \end{aligned}$$

استفاده از مجموع جبری جمله‌های مخرج. اگر بتوان جمله‌های مخرج

را با یکدیگر جمع کرد ؛ بجای مخرج ، مجموع آنها را قرار می‌دهیم و سپس مخرج را گویا می‌کنیم .

در این مورد ، تصاعد هندسی نقش اساسی دارد و در بسیاری موارد جمله‌های مخرج، جمله‌های متوالی يك تصاعد هندسی هستند. رابطهٔ مجموع در

تصاعد هندسی $S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$ است (a جملهٔ اول ، q قدر نسبت و n

تعداد جمله‌ها) ، و چون $a(q^n - 1)$ بیش از دو جمله ندارد ، هروقت که جمله‌های مخرج جمله‌های متوالی يك تصاعد هندسی باشند، می‌توان به‌سادگی مخرج را گویا کرد .

مثال : مخرج کسر زیر را گویا کنید .

$$A = \frac{1}{\sqrt[5]{16} - \sqrt[5]{24} + \sqrt[5]{36} - \sqrt[5]{54} + \sqrt[5]{81}}$$

حل. جمله‌های مخرج به تصاعد هندسی هستند: جمله اول این تصاعد

$a = \sqrt[5]{16}$ ، قدرنسبت آن $\sqrt[5]{\frac{3}{2}}$ و تعداد جمله‌ها $n = 5$ است و بنابراین مجموع جمله‌های مخرج چنین می‌شود :

$$\frac{\sqrt[5]{16} \left[\left(-\sqrt[5]{\frac{3}{2}} \right)^5 - 1 \right]}{-\sqrt[5]{\frac{3}{2}} - 1} = \frac{\frac{5}{2} \sqrt[5]{16}}{\frac{\sqrt[5]{3} + \sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{2}}} = \frac{5}{\sqrt[5]{3} + \sqrt[5]{2}}$$

که اگر بجای مخرج قرار دهیم ، می‌شود :

$$A = \frac{\sqrt[5]{3} + \sqrt[5]{2}}{5}$$

توضیح : در حقیقت در اینگونه موارد می‌توان از اتحاد :

$$(a^{n-1} \pm a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 \pm \dots + b^n)(a \mp b) = a^n \mp b^n$$

هم استفاده کرد (عامل اول سمت چپ اتحاد ، يك تصاعد هندسی است با جمله

اول a^{n-1} ، قدرنسبت $\pm \frac{b}{a}$ و تعداد جمله‌های n).

۴. تبدیل رادیکالهای مرکب

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad \text{مثال ۱. مطلوب است محاسبه}$$

$$\sqrt[\frac{5}{6}]{\frac{a}{\sqrt[6]{a}}} = \sqrt[\frac{5}{6}]{\frac{a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{6}}}} = \sqrt[\frac{5}{6}]{a^{\frac{1}{6} - \frac{1}{6}}} = \sqrt[\frac{5}{6}]{a^0} = \sqrt[\frac{5}{6}]{1} = 1$$

تبدیل رادیکالهای بصورت $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$. صحت اتحاد زیر به سادگی

روشن می شود :

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}} \quad (۱)$$

از اتحاد (۱) روشن است که اگر A عددی گویا و $A^2 - B$ مجذور

کامل باشد، می توان رادیکال مرکب به صورت $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ را به رادیکالهای ساده تبدیل کرد.

مثال ۲. عبارت $\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}$ را ساده کنید.

حل. در اینجا $A = x+2$ و $B = 4(x+1)$ است، اگر $A^2 - B$

را k^2 فرض کنیم، داریم :

$$k^2 = (x+2)^2 - 4(x+1) = x^2$$

و از آنجا (با فرض مثبت بودن x):

$$\begin{aligned} \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} &= \sqrt{\frac{x+2+x}{2}} - \sqrt{\frac{x+2-x}{2}} = \\ &= \sqrt{x+1} - 1 \end{aligned}$$

و با شرط منفی بودن x (در هر حال $x \geq -1$ است):

$$\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} = 1 - \sqrt{x+1}$$

مثال ۳. مطلوب است محاسبه حاصل عبارت زیر :

$$A = \sqrt{1 + \sqrt{3 + \sqrt{13 + 4\sqrt{3}}}}$$

حل. ابتدا رادیکال مرکب $\sqrt{13 + 4\sqrt{3}}$ را محاسبه می کنیم :

$$k^2 = 13^2 - (4\sqrt{3})^2 = 169 - 48 = 121 = 11^2 ;$$

$$\sqrt{13 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{13+11}{2}} + \sqrt{\frac{13-11}{2}} = \sqrt{12} + 1$$

و از آنجا :

$$A = \sqrt{1 + \sqrt{3 + \sqrt{12} + 1}} = \sqrt{1 + \sqrt{4 + \sqrt{12}}}$$

حال به محاسبه $\sqrt{4 + \sqrt{12}}$ می‌پردازیم :

$$k^2 = 16 - 12 = 4 ;$$

$$\sqrt{4 + \sqrt{12}} = \sqrt{3} + 1 .$$

و در نتیجه :

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{1 + (\sqrt{3} + 1)} = \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

توضیح : اتحاد (۱) برای مواردی که A عددی گویا و یا $A^2 - B$ مجذور کامل (و یا حتی مثبت) نباشد ، نیز صحیح است و در موارد لزوم می‌توان از آن استفاده کرد .

مثال ۴. مطلوب است محاسبه عبارت :

$$A = \sqrt{\sqrt{5} + 2} + \sqrt{\sqrt{5} - 2}$$

حل. به ترتیب داریم:

$$\begin{aligned} A &= \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} \right) + \\ &+ \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} \right) = 2 \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 1}{2}} = \\ &= \sqrt{2(\sqrt{5} + 1)} \end{aligned}$$

تبدیل رادیکال‌های به صورت $\sqrt[n]{A + B\sqrt[m]{C}}$. برای تبدیل چنین

رادیکالهایی (اگر ممکن باشد) می‌توان از روش ضریب‌های نامعین استفاده کرد،

بدین ترتیب که نتیجه آنرا برابر $\alpha + \beta \sqrt[m]{C}$ می گیریم و با هم متحد قرار می دهیم، درحالتی که برای α و β جوابهای گویا وجود داشته باشد، رادیکال قابل تبدیل است.

مثال ۵. عبارت $\sqrt[3]{38 + 17\sqrt{5}}$ را ساده کنید .
حل. فرض می کنیم :

$$\sqrt[3]{38 + 17\sqrt{5}} = \alpha + \beta\sqrt{5}$$

دو طرف را مکعب می کنیم ، نتیجه می شود :

$$38 + 17\sqrt{5} = (\alpha^3 + 15\alpha\beta^2) + (3\alpha^2\beta + 5\beta^3)\sqrt{5}$$

و از آنجا :

$$\begin{cases} \alpha(\alpha^2 + 15\beta^2) = 38 \\ \beta(3\alpha^2 + 5\beta^2) = 17 \end{cases}$$

۱۷ عددی است اول و بنابراین تنها می تواند به صورت 1×17 نوشته

شود ، از آنجا :

$$\beta = 1 ; 3\alpha^2 + 5\beta^2 = 17 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

این مقادیر در معادله اول دستگاه هم صدق می کنند و بنابراین خواهیم

داشت :

$$\sqrt[3]{38 + 17\sqrt{5}} = 2 + \sqrt{5}$$

استفاده از تبدیلهای اتحادی و جذر گرفتن. در مواردی که نتوان از

روشهای مذکور استفاده کرد ، باید تلاش را در جهت تجزیه عبارت زیر رادیکال و یا (در مواردی که فرجه زوج است) جذر گرفتن از آن گذاشت.

مثال ۶. حاصل عبارت زیر را بدست آورید :

$$A = \sqrt{4x\sqrt{x} - 4x\sqrt{x^2y} + x^2\sqrt{y^2} + y^2 - 4y^2\sqrt{x^2} + 2xy^2\sqrt{y}}$$

حل. برای سهولت کار فرض می کنیم : $\sqrt{y} = b$ و $\sqrt{x} = a$ ، در

این صورت خواهیم داشت :

$$A = \sqrt{4a^4 - 4a^3b + a^2b^2 + b^4 - 4a^2b^2 + 4a^2b^2} =$$

$$= \sqrt{a^2b^2 - 4a^3b + 4a^4 + 4a^2b^2 - 4a^2b^2 + b^4}$$

حالا یا عبارت زیر را تبدیل اتحادی می‌کنیم و یا مستقیماً جذر

می‌گیریم :

$$A = \sqrt{(a^2b - 2a^2 + b^2)^2} = |a^2b - 2a^2 + b^2| =$$

$$= |x\sqrt{y} - 2\sqrt{x^2} + y^2|$$

تمرینها

عبارتهای زیر را ساده کنید :

$$\frac{a^4}{r} \sqrt{(a+1)(a^2-1)(1+2a+a^2)} \cdot \left(\frac{a^2+3a+2}{\sqrt{a-1}} \right)^{-1} \quad .128$$

$$\sqrt{\frac{(1+a)\sqrt{1+a}}{2a}} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{9+18a^{-1}+9a^{-2}}} \quad .129$$

$$ab \sqrt[n]{a^{1-n} \cdot b^{-n} - a^{-n} \cdot b^{1-n}} \cdot \sqrt[n]{(a-b)^{-1}} \quad .130$$

$$\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1} + \frac{4}{\sqrt{6}-2} - \frac{12}{3-\sqrt{6}} \right) (\sqrt{6}+11) \quad .131$$

.132

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}} + \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+b}} \right) : \left(1 + \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \right)$$

$$\left(\frac{1}{b-\sqrt{a}} + \frac{1}{b+\sqrt{a}} \right) : \frac{\sqrt{\frac{1}{9}a^{-2}b^{-1}}}{a^{-2}-a^{-1}b^{-2}} \quad .133$$

$$\frac{295 - 412\sqrt{2} + 177\sqrt{4}}{5 + 2\sqrt{4} - 7\sqrt{2}} \quad .134$$

$$\left[4^{-\frac{1}{4}} + \left(\frac{1}{4^{-\frac{2}{4}}} \right)^{-\frac{4}{4}} \right] \left[4^{-5/25} - (2\sqrt{2})^{-\frac{4}{4}} \right] \quad .135$$

$$\sqrt{1 + \cos 2x} + \sqrt{1 - \cos 2x} + \sqrt{2}(\sin x + \cos x) \quad .136$$

$$\sqrt[2]{2 + \sqrt{2 + 2\cos 4x}} \quad .137$$

$$\sqrt{\sin^2 x (1 + \cotg x) + \cos^2 x (1 + \tg x)} \quad .138$$

۱۳۹. اگر $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ باشد، به‌ازای چه مقدارهایی از α اتحاد زیر برقرار است:

$$\sqrt{1 + \sin 2\alpha} = \sin \alpha + \cos \alpha$$

۱۴۰. نمایش تغییرات، دوره تناوب و نقطه‌های انفصال را در تابع زیر بدست آورید:

$$y = \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}} \right) \left(\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \right)$$

۱۴۱. مطلوب است محاسبه مقدار عبارت:

$$\frac{xy - \sqrt{x^2 - 1} \sqrt{y^2 - 1}}{xy + \sqrt{x^2 - 1} \sqrt{y^2 - 1}}$$

$$(b > 1 \text{ و } a > 1) y = \frac{1}{2} \left(b + \frac{1}{b} \right) \text{ و } x = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right) \text{ به‌ازای}$$

۱۴۲. مطلوب است حاصل عبارت:

$$\frac{\sqrt{a+bx} + \sqrt{a-bx}}{\sqrt{a+bx} - \sqrt{a-bx}}$$

$$\text{وقتی که } x = \frac{2am}{b(1+m^2)} \text{ و } |m| < 1 \text{ باشد،}$$

عبارت‌های زیر را ساده کنید:

$$x = \frac{n+2+\sqrt{n^2-4}}{n+2-\sqrt{n^2-4}} + \frac{n+2-\sqrt{n^2-4}}{n+2+\sqrt{n^2-4}} \quad .143$$

$$y = \left[\frac{(\sqrt{a}+1)^2 - \frac{a - \sqrt{ax}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}}}{(\sqrt{a}+1)^2 - a\sqrt{a+2}} \right]^{-2} \quad .144$$

$$z = \frac{n^2 - 3n + (n^2 - 1)\sqrt{n^2 - 4} - 2}{n^2 - 3n + (n^2 - 1)\sqrt{n^2 - 4} + 2} \quad .145$$

۱۴۶. اگر $x = \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{pq}{q-p}}$ باشد، مطلوب است محاسبه عبارت زیر:

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \left(x^{\frac{1}{p}} + x^{\frac{1}{q}} \right)$$

۱۴۷. اگر $xy + yz + xz = 1$ و x و y و z مقادیری مثبت باشند،
مطلوب است محاسبه:

$$A = \sum x \sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}}$$

مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

$$\frac{3+4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{5}} \quad .149 \qquad \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{5}} \quad .148$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \quad .151 \qquad \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{2}+1} \quad .150$$

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-1} \quad .153 \qquad \frac{11+2\sqrt{35}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}-1} \quad .152$$

۱- برای مفهوم علامت $\sum$ به بخش تقارن مراجعه فرمایید.

$$\frac{2}{1 + 2\sqrt{3} - \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9}} \quad .154$$

۱۵۵. اگر داشته باشیم $\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = \frac{c}{\gamma}$ متخرج کسر زیر را گویا کنید :

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \sqrt{\gamma}} \quad .156$$

متخرج کسر زیر را گویا کنید (با شرط $x > 0$) :

$$\frac{1}{x + (\sqrt{x} + 1)^2 + (\sqrt{x} + 2)^2 + \dots + (\sqrt{x} + 10)^2} \quad .157$$

متخرج این کسر را گویا کنید :

$$\frac{1}{\sqrt[6]{32} + \sqrt[2]{4} + \sqrt[2]{2} + \sqrt[2]{2} + \sqrt[6]{2} + 1} \quad .158$$

حاصل هریک از دو عبارت زیر را بدست آورید :

$$\frac{\sqrt[4]{\sqrt{8} + \sqrt{2} - 1} + \sqrt[4]{\sqrt{8} - \sqrt{2} - 1}}{\sqrt[4]{\sqrt{8} + \sqrt{2} + 1}} \quad .158$$

$$\frac{(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} - 3)(\sqrt{45} + 9)}{(5 - 2\sqrt{5})(\sqrt{2} - \sqrt{5})} \quad .159$$

حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید :

$$\sqrt{4\sqrt{5} - 2\sqrt{15}} \quad .161 \quad \sqrt{12 - 6\sqrt{3}} \quad .160$$

$$\sqrt[3]{3 + \sqrt{5} - \sqrt{13 + 4\sqrt{3}}} \quad .162$$

$$\frac{\sqrt{26 + \sqrt{675}} - \sqrt{26 - \sqrt{675}}}{\sqrt[3]{26 + \sqrt{675}} + \sqrt[3]{26 - \sqrt{675}}} \quad .163$$

$$\frac{\sqrt[3]{99 + 70\sqrt{2}} + 2\sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}}{\sqrt[3]{99 + 70\sqrt{2}} + 2\sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}} \quad .164$$

$$\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots}}} \quad .165$$

$$\sqrt{a^2 + a\sqrt{a} - \frac{13}{12}a - \frac{2}{3}\sqrt{a} + \frac{4}{9}} \quad .166$$

$$\sqrt{4 + \sqrt{5\sqrt{3} + 5\sqrt{48} - 10\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}} \quad .167$$

$$(4x^2\sqrt[3]{y^2} + 9x\sqrt[3]{x} + 16\sqrt[3]{x^2y^2} - 12x\sqrt[3]{x^2y} + \quad .168$$

$$+ 16x\sqrt[3]{xy^2} - 4x\sqrt[3]{y^2} - 24x\sqrt[3]{y} + 6\sqrt[3]{x^2y} - 8\sqrt[3]{xy^2})^{\frac{1}{2}}$$

.169. مخرج کسر زیر را گویا کنید :

A

$$2\sqrt[6]{2} - 2\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{2} + \sqrt[3]{2} - 2\sqrt{\frac{1}{2}} - 1$$

.170. مخرج این کسر را گویا کنید :

۱

$$\sqrt[6]{32} + \sqrt[12]{768} + \sqrt[6]{24} + \sqrt[12]{432} + \sqrt[6]{18} + \sqrt[12]{243}$$

.171. اگر بدانیم $ax^3 = by^3 = cz^3$ و $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ ثابت کنید:

$$\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$$

.172. اگر $x = \sqrt{ab}$ و $a > b$ باشد، حاصل عبارت زیر را بدست آورید:

$$\sqrt{(a+x)(x+b)} + \sqrt{(a-x)(x-b)}$$

$$\sqrt{(a+x)(x+b)} - \sqrt{(a-x)(x-b)}$$

.173. حاصل این عبارت را بدست آورید :

$$\left[\left(\sqrt[x]{a^{-\frac{r}{y}}} + \sqrt[r]{a^{\frac{1}{y}} \cdot b} + r \sqrt[r]{\frac{r}{b}} \right) \sqrt{\frac{x}{\sqrt[r]{y}}} \sqrt[r]{\frac{r}{\sqrt[a^{x-2r}]}}} \right]^{\frac{1}{r}}$$

۱۷۴. اگر $x = ab^{\frac{n}{n+1}} \left(a^{\frac{n}{n+1}} - b^{\frac{n}{n+1}} \right)^{-1}$ باشد، حاصل این عبارت را بدست آورید :

$$(x^{-1} + a^{-1})(x+a)^{\frac{1}{n}} - b^{-1}x^{\frac{1}{n}}$$

۱۷۵. با شرط $0 < m < n < 2m$ و $x = \frac{1}{m} \sqrt{\frac{2m}{n} - 1}$ محاسبه کنید:

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{5}} \cdot \sqrt[6]{-38+17\sqrt{5}} - mx}{\sqrt{2+\sqrt{5}} \cdot \sqrt[6]{-38+17\sqrt{5}} + mx} : \sqrt{\frac{1-nx}{1+nx}}$$

۱۷۶. با شرط $x = \left(b^{\frac{n}{n+1}} - a^{\frac{n}{n+1}} \right)^{\frac{n+1}{n}}$ ، محاسبه کنید :

$$\sqrt[n]{x^n + \sqrt[n+1]{a^n x^{n^2}}} + \sqrt[n]{a^n + \sqrt[n+1]{x^n a^{n^2}}} - 1$$

۱۷۷. می‌دانیم $x = \frac{\left(\sqrt{b} - \sqrt{b-a} \right)^{\frac{2n}{n-2k}}}{a^{\frac{2k}{n-2k}}}$. مطلوب است محاسبه :

$$\sqrt[n]{a^k x^{n-k}} + \sqrt[n]{a^{n-k} x^k} - 2\sqrt{bx} + b^2$$

۱۷۸. با شرط $x = \frac{(2+\sqrt{3})^{n+1}}{(2+\sqrt{3})^n - 1}$ ، محاسبه کنید :

$$\sqrt[n]{(x+1)^2} + \sqrt[n]{(x-1)^2} - 2\sqrt{x^2-1} + 1$$

۱۷۹. اگر n عددی طبیعی باشد، ثابت کنید:

$$\left(\frac{1+\sqrt{\delta}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{\delta}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{\delta}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{\delta}}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1+\sqrt{\delta}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{\delta}}{2}\right)^{n+1}$$

۱۸۰. با شرط $a > |b|$ ثابت کنید:

$$b\sqrt{r} \cdot \frac{\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}}{\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}} = \sqrt{(a+b)^r} - \sqrt{(a-b)^r}$$

۶

معادله‌ها و دستگاه‌های جبری

راه حل معادله‌های درجهٔ اول و درجهٔ دوم بر همه روشن است. و احتیاجی به گفتگو دربارهٔ آنها نیست. برای معادله‌های درجهٔ سوم و درجهٔ چهارم هم راه حل‌های کلی درجبر وجود دارد، منتهی این راه حل‌ها اغلب منجر به عملهای مفصل می‌شود و برای رسیدن به جواب وقت زیادی لازم دارد. به همین مناسبت در عمل از حل کلی اینگونه معادله‌ها صرف نظر و در موارد کلی به راه حل‌های تقریبی قناعت می‌شود.

در جبر ثابت شده است که معادله‌های بالاتر از درجهٔ چهارم در حالت کلی نمی‌توانند به طریق جبری حل شوند و بنا بر این کوشش در راه حل جبری معادله‌های کامل درجهٔ پنجم و بالاتر بدون فز می‌ماند. با همهٔ اینها، گاهی با استفاده از بعضی روشهای ساده می‌توان معادله‌هایی را که از درجه‌های بالا هستند حل کرد و جوابهای تحقیقی آنها را بدست آورد. ما در این بخش به بعضی از این روشها، که گمان می‌رود دربارهٔ آنها کمتر گفتگو شده است، می‌پردازیم.

۱. حل معادله‌های به صورت $(x+a)^4 + (x+b)^4 = c$

این معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$\left[\left(x + \frac{a+b}{2} \right) + \frac{a-b}{2} \right]^4 + \left[\left(x + \frac{a+b}{2} \right) - \frac{a-b}{2} \right]^4 = c$$

که اگر برای سهولت کار فرض کنیم :

$$x + \frac{a+b}{2} = t \quad ; \quad \frac{a-b}{2} = \alpha$$

معادله مفروض چنین می‌شود :

$$(t+\alpha)^4 + (t-\alpha)^4 = c$$

که پس از باز کردن پرانتزها و جمع جبری جمله‌های متشابه به معادله دو-مجذوری زیر می‌رسیم :

$$2t^4 + 12\alpha^2 t^2 + (2\alpha^4 - c) = 0 \quad (1)$$

از این معادله، مقادیر t و سپس مقادیر x (حقیقی یا موهومی) بدست می‌آید. توضیح : اگر در معادله (۱) فرض کنیم $t^2 = y$ ، معادله‌ای درجه دوم نسبت به y بدست می‌آید :

$$2y^2 + 12\alpha^2 y + (2\alpha^4 - c) = 0$$

و این به معنای آن است که توانسته‌ایم معادله درجه چهارم مفروض را به معادله‌ای درجه دوم تبدیل کنیم (یعنی درجه معادله را نصف کنیم). می‌توان این حکم را کلیت بخشید، بدین معنی که اگر همین روش را برای معادله‌ای به صورت :

$$(x+a)^{2n} + (x+b)^{2n} = c$$

بکار ببریم، به معادله‌ای از درجه n خواهیم رسید.

مثال ۱. مطلوب است حل معادله :

$$(x+2)^4 + (x+5)^4 = 17$$

حل. فرض می‌کنیم $x + \frac{2+5}{2} = t$ و $x + 2$ واسطه عددی بین $x + \frac{2+5}{2}$ و $x + \frac{2+5}{2}$

$x+5$ است)، در این صورت به ترتیب خواهیم داشت:

$$\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(t + \frac{3}{2}\right)^2 = 17 \Rightarrow 2t^2 + 27t^2 - \frac{55}{8} = 0$$

$$t^2 = \frac{-27 \pm \sqrt{27^2 + 55}}{4} = \frac{-27 \pm 28}{4};$$

$$t^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow t = \pm \frac{1}{2}$$

$$t^2 = -55 \quad (\text{ریشه‌های موهومی})$$

$$t = \frac{1}{2} \Rightarrow x + \frac{7}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -3$$

$$t = -\frac{1}{2} \Rightarrow x + \frac{7}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -4$$

مثال ۴. مطلوب است حل معادله زیر:

$$(x+1)^6 + (x+5)^6 = 730$$

حل. $x+3=t$ فرض می‌کنیم (t واسطه عددی بین $x+1$ و $x+5$ است).

می‌شود:

$$(t-2)^6 + (t+2)^6 = 730$$

که پس از باز کردن پرانتزها و خلاصه کردن خواهیم داشت:

$$t^6 + 60t^4 + 240t^2 - 301 = 0$$

و با فرض $t^2 = y$ بدست می‌آید:

$$y^3 + 60y^2 + 240y - 301 = 0$$

مجموع ضریبهای این معادله برابر صفر است و بنابراین عبارت سمت

چپ تساوی بر $y-1$ قابل قسمت است. با تجزیه عبارت سمت چپ تساوی

خواهیم داشت:

$$(y-1)(y^2 + 61y + 301) = 0$$

و از آنجا:

$$y-1=0 \Rightarrow y=1$$

$$y^2 + 61y + 301 = 0 \Rightarrow y = \frac{-61 \pm \sqrt{2517}}{2} < 0$$

$$y=1 \Rightarrow t^2=1 \Rightarrow t=\pm 1$$

$$t=1 \Rightarrow x+3=1 \Rightarrow x=-2$$

$$t=-1 \Rightarrow x+3=-1 \Rightarrow x=-4$$

دو جواب دیگر y منفی است و بنابراین برای t و در نتیجه برای

x ، ریشه‌های موهومی بدست می‌آید. معادله درجه ششم دارای دو ریشه حقیقی و چهار ریشه موهومی است.

۲. حل معادله‌های به صورت:

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=m \quad (۱)$$

این معادله را بشرطی می‌توان حل کرد که از چهار عدد a ، b ،

c ، d مجموع دو عدد با مجموع دو عدد دیگر برابر باشد، مثلاً اگر داشته

باشیم: $a+b=c+d$ ، معادله (۱) را می‌توان چنین نوشت:

$$[x^2+(a+b)x+ab][x^2+(c+d)x+cd]=m$$

که اگر فرض کنیم:

$$x^2+(a+b)x=x^2+(c+d)x=t$$

خواهیم داشت:

$$(t+ab)(t+cd)=m$$

و یا:

$$t^2+(ab+cd)t+(abcd-m)=0$$

که معادله‌ای درجه دوم و قابل حل است.

مثال. معادله زیر را حل کنید:

$$(x^2+6x+8)(x^2-8x+15)=72$$

حل. ابتدا هر یک از دو پرانتز سمت چپ معادله را تجزیه می‌کنیم:

$$(x+2)(x+4)(x-3)(x-5)=72$$

و چون داریم:

$$2-3=4-5=-1$$

$$[(x+2)(x-3)][(x+4)(x-5)]=72 \quad \text{معادله را به صورت}$$

می‌نویسیم، در این صورت داریم:

$$(x^2 - x - 6)(x^2 - x - 20) = 72$$

و اگر $x^2 - x = t$ فرض کنیم ، به معادله درجه چهارم زیر می‌رسیم :

$$t^2 - 26t + 48 = 0 \Rightarrow t = 2, 24 ;$$

$$t = 2 \Rightarrow x^2 - x = 2 \Rightarrow x_1 = -1 ; x_2 = 2$$

$$t = 24 \Rightarrow x^2 - x = 24 \Rightarrow$$

$$x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{97}}{2}$$

حالت خاص. وقتی که در معادله (۱) مقادیر a, b, c و d به تصاعد

حسابی باشند ، علاوه بر روش بالا از قضیه زیر هم می‌توان استفاده کرد :

قضیه : اگر به حاصل ضرب چهار جمله متوالی از یک تصاعد حسابی ،

توان چهارم قدر نسبت را اضافه کنیم ، یک مجذور کامل بدست می‌آید .

اثبات . چهار جمله متوالی تصاعد حسابی را با قدر نسبت d به صورت

زیر می‌نویسیم :

$$a ; a+d ; a+2d ; a+3d$$

حاصلضرب این چهار جمله را می‌توان چنین نوشت :

$$\begin{aligned} P &= a(a+d)(a+2d)(a+3d) = \\ &= [a(a+3d)] \cdot [(a+d)(a+2d)] = \\ &= (a^2 + 3ad) \cdot [(a^2 + 2ad) + 2d^2] = \\ &= (a^2 + 3ad)^2 + 2d^2(a^2 + 3ad) \end{aligned}$$

و واضح است که اگر به این حاصلضرب d^4 را اضافه کنیم ، نتیجه یک مجذور

کامل می‌شود :

$$(a^2 + 3ad)^2 + 2d^2(a^2 + 3ad) + d^4 = [(a^2 + 3ad) + d^2]^2$$

مثال . مطلوب است حل و بحث معادله زیر :

$$(x+b)(x+a+b)(x+2a+b)(x+3a+b) = k$$

حل. برای سهولت کار $x+b=t$ فرض می‌کنیم ، می‌شود :

$$t(t+a)(t+2a)(t+3a) = k$$

اگر به طرفین تساوی a^4 اضافه کنیم ، بدست می‌آید :

$$(t^2 + 3at + a^2)^2 = k + a^4$$

$$t^2 + 3at + a^2 = \pm \sqrt{k + a^4} \quad \text{و یا}$$

و به این ترتیب معادله درجه چهارم به دو معادله درجه دوم تبدیل می‌شود، جوابهای x چنین‌اند:

$$x = -b + \frac{-3a \pm \sqrt{\Delta a^2 \mp \sqrt{k + a^4}}}{2}$$

بحث: اگر $k + a^4 < 0$ یعنی $k < -a^4$ باشد، معادله چهار ریشه موهومی دارد. اگر $k = -a^4$ باشد، معادله دو ریشه مضاعف زیر را خواهد داشت:

$$x = -b + \frac{a}{2}(-3 \pm \sqrt{\Delta})$$

اگر $k > -a^4$ باشد: اولاً $\Delta a^2 + \sqrt{k + a^4}$ همیشه مثبت و بنابراین دو جواب معادله حقیقی است. ثانیاً عبارت $\Delta a^2 - \sqrt{k + a^4}$ در حالت $k = \frac{9}{16}a^4$ مساوی صفر و به‌ازای $k > \frac{9}{16}a^4$ مثبت است. بنابراین در حالت اول، معادله یک ریشه مضاعف و در حالت دوم دوریشه حقیقی دیگر هم دارد.

خلاصه بحث در جدول زیر دیده می‌شود:

$k < -a^4$	چهار ریشه موهومی
$-a^4 < k < \frac{9}{16}a^4$	دوریشه حقیقی و دو ریشه موهومی
$k = -a^4$	دو ریشه مضاعف حقیقی
$k = \frac{9}{16}a^4$	یک ریشه مضاعف و دوریشه ساده حقیقی
$k > \frac{9}{16}a^4$	چهار ریشه حقیقی ساده

توضیح: در معادله (۱) با توجه به شرط معادله توانستیم از معادله درجه چهارم به معادله درجه دوم برسیم. مسأله را می توان کلی تر طرح کرد، به این ترتیب:

معادله زیر را در نظر می گیریم:

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)\dots=m \quad (2)$$

فرض می کنیم در سمت چپ تساوی (۲)، $2n$ پرانتز وجود داشته باشد و بین مقادیر ثابت این پرانتزها، رابطه های زیر برقرار باشد:

$$a+b=c+d=\dots$$

در این صورت اگر طبق روش قبل عمل کنیم، به معادله ای از درجه n خواهیم رسید که به شرط قابل حل بودن، جوابهای معادله اصلی هم بدست می آید.

مثال. معادله زیر را حل کنید:

$$x(x-4)(x-2)(x-1)^2(x+2)+66=0$$

حل. معادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$[x(x-2)] \cdot [(x-4)(x+2)] \cdot [(x-1)^2] + 66 = 0 ;$$

و یا:

$$(x^2-2x)(x^2-2x-8)(x^2-2x+1)+66=0$$

که با فرض $x^2-2x=t$ خواهیم داشت:

$$t(t-8)(t+1)+66=0 \Rightarrow t^3-7t^2-8t+66=0 ;$$

این معادله به صورت زیر قابل تجزیه است:

$$(t+3)(t^2-10t+22)=0$$

$$t+3=0 \Rightarrow t_1=-3$$

$$t^2-10t+22=0 \Rightarrow t_{2,3}=5 \pm \sqrt{3}$$

و از آنجا مقادیر x بدست می آید:

$$t_1=-3 \Rightarrow x^2-2x+3=0 \quad (\text{ریشه های موهومی})$$

$$t_2=5+\sqrt{3} \Rightarrow x^2-2x-(5+\sqrt{3})=0 ;$$

$$x=1 \pm \sqrt{6+\sqrt{3}}$$

$$t_3=5-\sqrt{3} \Rightarrow x^2-2x-(5-\sqrt{3})=0 ;$$

$$x = 1 \pm \sqrt{6 - \sqrt{3}}$$

تبصره. برای حل انواع معادله‌هایی که در این بند مورد بحث قرار دادیم، می‌توان واسطهٔ عددی پُرانتزها را مجهول کمکی گرفت.

۳. حل معادله‌های به‌صورت:

$$(ax+b)^4 + (cx+d)^4 = (ax+\beta)^4$$

با شرط‌های: $a+c=\alpha$ و $b+d=\beta$

معادله را به‌ترتیب به صورت‌های زیر می‌نویسیم:

$$[(ax+b)^2 + (cx+d)^2]^2 - 2(ax+b)(cx+d)^2 = (ax+\beta)^4$$

و سپس:

$$\left\{ [a+c]x + (b+d) \right\}^2 - 2(ax+b)(cx+d)^2 = (ax+\beta)^4$$

که با توجه به شرط‌های $a+c=\alpha$ و $b+d=\beta$ خواهیم داشت:

$$(ax+\beta)^4 + 2(ax+b)(cx+d)^2 - 2(ax+b)(cx+d)(ax+\beta)^2 - 2(ax+b)^2(cx+d)^2 = (ax+\beta)^4$$

که پس از ساده کردن چنین می‌شود.

$$2(ax+b)(cx+d)[(ax+b)(cx+d) - 2(ax+\beta)^2] = 0$$

که دیگر قابل حل است.

مثال. مطلوب است حل معادلهٔ زیر:

$$(2-x)^4 + (2x-1)^4 = (x+1)^4$$

حل. اگر با روش بالا عمل کنیم، به ترتیب خواهیم داشت:

$$[(2-x)^2 + (2x-1)^2]^2 - 2(2-x)(2x-1)^2 = (x+1)^4 ;$$

$$[(x+1)^2 - 2(2-x)(2x-1)]^2 - 2(2-x)^2(2x-1)^2 = (x+1)^4 ;$$

$$2(2-x)^2(2x-1)^2 - 4(2-x)(2x-1)(x+1)^2 = 0 ;$$

$$2(2-x)(2x-1)(4x^2 - x + 4) = 0 ;$$

$$x_1 = 2 ; x_2 = \frac{1}{2}$$

دو ریشه دیگر موهومی است .

۴. تبدیل نقش مجهول و پارامتر به یکدیگر

به معادله زیر توجه کنید :

$$2x^4 + x^3 - (3a + 2)x^2 + 2x + a^2 - 1 = 0$$

این معادله نسبت به x از درجه چهارم است و بنابراین نمی‌توان از راه حلهای عادی برای حل آن استفاده کرد . ولی همین معادله نسبت به پارامتر a از درجه دوم است و اگر نقش مجهول و پارامتر را با هم عوض کنیم، نسبت به a معادله‌ای درجه دوم و قابل حل می‌شود :

$$a^2 - 3x^3 \cdot a + (2x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 1) = 0$$

شرط اینکه از این راه بتوان به نتیجه رسید، این است که جوابهای a نسبت به x مقادیر گویا باشند . بنابراین قبل از حل ، مبین معادله را حساب می‌کنیم :

$$\Delta = 9x^6 - 4(2x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 1) =$$

$$= x^6 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4 = (x^2 - 2x + 2)^2$$

و بنابراین خواهیم داشت :

$$a = \frac{3x^3 \pm (x^2 - 2x + 2)}{2} ;$$

$$a_1 = x^2 + x - 1 ; a_2 = 2x^2 - x + 1$$

به این ترتیب معادله درجه چهارم مفروض به دو معادله درجه دوم زیر

تبدیل می‌شود :

$$x^2 + x - (a + 1) = 0 ; 2x^2 - x + (1 - a) = 0$$

و از آنجا جوابهای x بدست می‌آید :

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} (-1 \pm \sqrt{4a + 5}) ; x_{3,4} = \frac{1}{2} (1 \pm \sqrt{4a - 3})$$

بحث : اگر $a > \frac{3}{4}$ باشد ، معادله چهار ریشه حقیقی دارد .

اگر $-\frac{5}{4} < a < \frac{3}{4}$ باشد ، معادله دو ریشه حقیقی و دو ریشه موهومی

دارد .

اگر $a < -\frac{5}{4}$ باشد ، چهار ریشه معادله موهومی است .

در حالت خاص $a = \frac{3}{4}$ ، معادله يك ریشه مضاعف و دو ریشه ساده

حقیقی دارد.

و بالاخره در حالت $a = -\frac{5}{4}$ ، معادله يك ریشه مضاعف حقیقی و دو

ریشه موهومی دارد.

مثال ۲. معادله زیر را حل کنید :

$$x^3 - (3 + \sqrt{3})x + 3 = 0$$

حل. این معادله را می‌توان به طریق تجزیه عبارت سمت چپ تساوی

حل کرد ، ولی ما آنرا با روش بالا حل می‌کنیم. بهتر است $\sqrt{3} = a$ فرض

شود ، در این صورت معادله چنین می‌شود:

$$x^3 - (a^2 + a)x + a^2 = 0$$

سپس معادله را نسبت به a منظم می‌کنیم:

$$(1-x)a^2 - x \cdot a + x^3 = 0$$

ریشه‌های این معادله (نسبت به مجهول a) چنین‌اند:

$$a = \frac{x \pm (x - 2x^2)}{2(1-x)} \Rightarrow a_1 = x , a_2 = \frac{x^2}{1-x}$$

که اگر بجای a مقدارش $\sqrt{3}$ را قرار دهیم ، خواهیم داشت:

$$x = \sqrt{3} ; x^2 + \sqrt{3}x - \sqrt{3} = 0$$

و از آنجا:

$$x_1 = \sqrt{3} ; x_{2,3} = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{3 + 4\sqrt{3}}}{2}$$

مثال ۳. مطلوب است حل معادله :

$$(ax^2 + bx + c)^2 = x^2(x^2 + bx + c) \quad (۱)$$

حل. هر معادله ای به این صورت را می توان به دو طریق حل کرد.

روش اول : اگر فرض کنیم $bx + c = t$ خواهیم داشت :

$$(ax^2 + t)^2 = x^2(x^2 + t)$$

معادله را نسبت به t منظم می کنیم :

$$t^2 + x^2(2a - 1)t + x^4(a^2 - 1) = 0$$

معادله نسبت به t از درجه دوم است ، جوابهای t چنین اند :

$$t = \frac{-x^2(2a - 1) \pm x^2 \sqrt{\Delta - 4a}}{2}$$

که اگر بجای t مقدارش را قرار دهیم ، به دو معادله درجه دوم زیر (نسبت به مجهول x) می رسیم :

$$(1 - 2a \pm \sqrt{\Delta - 4a})x^2 - 2bx - 2c = 0$$

روش دوم : طرفین معادله (۱) را بر x^4 تقسیم می کنیم :

$$\left(a + \frac{bx + c}{x^2}\right)^2 = 1 + \frac{bx + c}{x^2}$$

حالا $\frac{bx + c}{x^2} = y$ می گیریم ، چنین می شود :

$$(a + y)^2 = 1 + y \Rightarrow y^2 + (2a - 1)y + (a^2 - 1) = 0$$

از اینجا y و سپس x بدست می آید .

مثال ۴. مطلوب است حل معادله زیر :

$$(ax^2 + bx + c)^2 + (a'x^2 + mbx + mc)^2 = \alpha x^4$$

حل. این معادله را هم می توان شبیه معادله قبل یا تقسیم طرفین تساوی

بر x^4 و فرض $\frac{bx + c}{x^2} = t$ حل کرد و هم می توان $bx + c = y$ فرض

کرد و سپس معادله را نسبت به مجهول y حل نمود .

مثال ۵. معادله زیر را حل کنید :

$$(ax^2 + bx + c)^2 + (max^2 + b'x + mc)^2 = \alpha x^4$$

حل. هم با تقسیم طرفین معادله بر x^2 و انتخاب $t = \frac{ax^2+c}{x}$ و

هم از ابتدا بفرض $ax^2+c=y$ و حل معادله نسبت به مجهول y ، می‌توان این معادله را حل کرد.

۵. استفاده از بعضی رابطه‌های مثلثاتی

معادله زیر را در نظر می‌گیریم :

$$\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} = \sqrt{3} \quad (۱)$$

ضریبهای مجهول در کسر سمت چپ تساوی، همان ضریبهای بسط $tg^3\alpha$ است و بنابراین اگر $x = tg\alpha$ فرض شود، معادله (۱) به صورت زیر در می‌آید :

$$\frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha} = \sqrt{3} \Rightarrow tg^3\alpha = tg\frac{\pi}{3};$$

$$3\alpha = k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}k\pi + \frac{\pi}{9}$$

$$x = tg\left(\frac{1}{3}k\pi + \frac{\pi}{9}\right) \quad \text{و بنابراین :}$$

معادله (۱)، معادله‌ای درجه سوم است و بنابراین حداکثر سه جواب حقیقی دارد :

$$k=0 \Rightarrow x_1 = tg 20^\circ$$

$$k=1 \Rightarrow x_2 = tg 80^\circ$$

$$k=2 \Rightarrow x_3 = tg 140^\circ = -tg 40^\circ$$

و به این ترتیب جوابهای معادله درجه سوم بدست آمد.

توضیح. اگر معادله درجه سوم (۱) را منظم کنیم، می‌شود :

$$x^3 - 3\sqrt{3}x^2 - 3x + \sqrt{3} = 0$$

که با استفاده از رابطه‌های بین ضریبها و ریشه‌ها، در معادله درجه سوم، رابطه‌های مثلثاتی زیر بدست می‌آید:

$$\operatorname{tg} 20^{\circ} - \operatorname{tg} 40^{\circ} + \operatorname{tg} 80^{\circ} = 3\sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} 20^{\circ} \operatorname{tg} 40^{\circ} + \operatorname{tg} 40^{\circ} \operatorname{tg} 80^{\circ} - \operatorname{tg} 20^{\circ} \operatorname{tg} 80^{\circ} = 3$$

$$\operatorname{tg} 20^{\circ} \operatorname{tg} 40^{\circ} \operatorname{tg} 80^{\circ} = \sqrt{3}$$

مثال ۲. مطلوب است حل معادله زیر:

$$32x^5 - 40x^3 + 10x = 1$$

حل. با فرض $x = \cos \alpha$ خواهیم داشت:

$$2(16\cos^5 \alpha - 20\cos^3 \alpha + 10\cos \alpha) = 1 \Rightarrow 2\cos \Delta \alpha = 1;$$

$$\cos \Delta \alpha = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{2}{\Delta} k\pi \pm \frac{\pi}{15}$$

و از آنجا:

$$x = \cos \left(\frac{2}{\Delta} k\pi \pm \frac{\pi}{15} \right)$$

که اگر مقادیر مختلف k را در نظر بگیریم، پنج جواب برای x بدست می‌آید:

$$k=0 \Rightarrow x_1 = \cos 12^{\circ}$$

$$k=1 \Rightarrow \begin{cases} x_4 = \cos 84^{\circ} = \sin 6^{\circ} \\ x_3 = \cos 60^{\circ} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$k=2 \Rightarrow \begin{cases} x_4 = \cos 156^{\circ} = -\cos 24^{\circ} \\ x_5 = \cos 132^{\circ} = -\cos 48^{\circ} \end{cases}$$

البته در اینجا با توجه به معلوم بودن خطهای مثلثاتی قوس 30° درجه و

می‌توان $\sin 18^{\circ} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ و بقیه جوابها را به صورت جبری در آورد.

همچنین شبیه مثال ۱، می‌توان با استفاده از رابطه‌های بین ریشه‌ها و ضریبها در يك معادله درجه Δ ، پنج رابطه مثلثاتی نتیجه گرفت.

مثال ۳. مطلوب است حل معادله:

$$\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x - \left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^x = 1$$

با شرط $0 < a < 1$

حل. دو طرف معادله را بر $\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x$ تقسیم می‌کنیم، چنین می‌شود:

$$\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^x + \left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^x = 1$$

اگر فرض کنیم $a = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ ، معادله مفروض به صورت زیر در می‌آید:

$$(\cos \alpha)^x + (\sin \alpha)^x = 1$$

با توجه به شرط $0 < a < 1$ می‌توان $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ در نظر گرفت.

در این صورت تابع سمت چپ تساوی، نسبت به x نزولی است (یعنی با بزرگ شدن x زیاد و با کوچک شدن x ، کم می‌شود).

به ازای $x=2$ این تابع برابر ۱ می‌شود و بنابراین $x=2$ تنها ریشه معادله مفروض است.

توضیح. در مثلثات هم می‌توان بعضی از معادله‌های مثلثاتی را به کمک جبر حل کرد و ما در اینجا یک نمونه از اینگونه مساله‌ها را می‌آوریم.
مثال. معادله زیر را حل کنید:

$$\cos^2 \varphi + \cos^2 2\varphi - 2 \cos \varphi \cos 2\varphi \cos 4\varphi = \frac{3}{4}$$

حل. $\sqrt{-1} = i$ می‌گیریم و فرض می‌کنیم:

$$z = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (1)$$

به سادگی دیده می‌شود که داریم: $\frac{1}{z} = \cos \varphi - i \sin \varphi$ (۲)

اگر از رابطه‌های (۱) و (۲) مقدار $\cos \varphi$ را بدست آوریم، می‌شود:

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

حالا $\cos 2\varphi$ و $\cos 4\varphi$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1 = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 1 = \frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)$$

$$\cos 4\varphi = \frac{1}{2}\left(z^4 + \frac{1}{z^4}\right) \quad \text{و به همین ترتیب:}$$

معادله مفروض به صورت زیر در می آید:

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)^2 - \left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)\left(z^4 + \frac{1}{z^4}\right) = 3$$

که پس از تبدیل به صورت زیر در می آید:

$$(-1 + z - z^2 + \dots + z^{13} - z^{14}) - (z^{13} + z) = 0$$

مجموع جمله‌های پراکنده متساوی $\frac{z^{15} + 1}{z + 1}$ است و از طرف دیگر

$z \neq -1$ است، زیرا $\varphi = (2k+1)\pi$ در معادله مفروض صدق نمی‌کند.

بنابراین معادله، به صورت زیر در می آید:

$$1 + z^{15} + (z + 1)(z^{13} + z) = 0$$

و از آنجا بدست می آید:

$$(1 + z + z^2) + z^{13}(1 + z + z^2) = 0$$

و یا:

$$(1 + z + z^2)(1 + z^{13}) = 0$$

اگر $1 + z + z^2 = 0$ باشد، خواهیم داشت:

$$z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varphi_1 = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \quad ; \quad \varphi_2 = 2k\pi - \frac{2\pi}{3} \quad \text{و یا:}$$

و اگر $z^{13} + 1 = 0$ باشد، می‌توان نوشت:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{13} = -1 \Rightarrow \cos 13\varphi + i\sin 13\varphi = -1$$

(از رابطه موآور استفاده کردیم).

و یا چون طرف دوم تساوی مقدار موهومی ندارد:

$$\cos 13\varphi = -1 \Rightarrow \varphi_3 = \frac{(2k+1)\pi}{13} + 2m\pi$$

$$(k \neq 6 ; 0 \leq k < 12)$$

۶. جستجوی ریشه‌های گویا

قبلاً چند قضیه را یادآوری می‌کنیم :

(۱) رابطه‌های بین ریشه‌ها و ضریبها در معادله درجه n

معادله زیر را در نظر می‌گیریم :

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + kx + l = 0$$

اگر n ریشه این معادله را (حقیقی یا موهومی) به $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ نشان دهیم ، خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + kx + l &\equiv \\ &\equiv a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n) \end{aligned}$$

از این اتحاد رابطه‌های زیر بدست می‌آید :

$$\Sigma x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{b}{a}$$

$$\Sigma(x_i x_j) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = \frac{c}{a}$$

$$\Sigma(x_1 x_2 x_3) = -\frac{d}{a}$$

$$\Sigma(x_1 x_2 x_3 x_4) = \frac{e}{a}$$

$$x_1 x_2 x_3 \dots x_n = (-1)^n \frac{l}{a}$$

(۲) قضیه . اگر در معادله‌ای با ضریبهای صحیح ضریب بزرگترین درجه

۱- منظور از رابطه‌های بین ریشه‌ها و ضریبها ساده‌ترین رابطه‌های متقارن بین ریشه‌ها و ضریبها است، نه هر رابطه دلخواهی از ریشه‌ها (به کتاب تقارن در هندسه و جبر و کتاب تقارن در جبر مراجعه کنید).

مساوی واحد باشد، معادله دارای ریشه‌ای به صورت $\frac{p}{q}$ نیست (p و q عددهایی صحیح و نسبت به هم اولند).

اثبات. معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + kx + l = 0 \quad (۱)$$

(ضریبها عددهایی صحیح‌اند).

اگر این معادله، ریشه‌ای به صورت $\frac{p}{q}$ داشته باشد، پس از قرار دادن

این مقدار به جای x بدست می‌آید:

$$p^n = -q(bp^{n-1} + cp^{n-2} + \dots + kq^{n-2}p + lq^{n-1})$$

طرف دوم تساوی مضربی است از q و بنابراین باید p^n و در نتیجه مضربی از q باشد که با توجه به فرض (p و q نسبت به هم اول بودند) غیرممکن است.

(۳) قضیه. اگر معادله (۱) دارای ریشه گویا باشد، اولاً این ریشه صحیح است، ثانیاً مقسوم‌علیهی (مثبت یا منفی) از مقدار ثابت l خواهد بود.

اثبات. اگر α ریشه صحیح معادله (۱) باشد، باید داشته باشیم:

$$\alpha(\alpha^{n-1} + b\alpha^{n-2} + c\alpha^{n-3} + \dots + k) = -l$$

و بنابراین واضح است که باید l مضربی از α باشد.

مثال ۹. این معادله را حل کنید:

$$x^4 + 5x^3 - 2x^2 - 9x + 5 = 0$$

حل. حاصلضرب ریشه‌ها در این معادله برابر است با ۵ و بنابراین ریشه‌های احتمالی گویای این معادله (که در صورت وجود عددهایی صحیح‌اند) جزء مقسوم‌علیه‌های مثبت یا منفی ۵ هستند. این مقسوم‌علیه‌ها عبارتند از ± ۱ و ± ۵ و به سادگی دیده می‌شود که ۱ و -۵ در این معادله صدق می‌کنند. با توجه به این اطلاع می‌توان عبارت درجه چهارم سمت چپ تساوی را تجزیه کرد:

$$(x-1)(x+5)(x^2+x-1)=0$$

و از آنجا جوابهای معادله بدست می‌آید :

$$x_1=1 ; x_2=-5 ; x_{3,4}=\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$$

درحالتی که ضریب بزرگترین درجه معادله مساوی واحد نباشد ($a \neq 1$) به شرط صحیح بودن همه ضریبها و با توجه به اینکه قدر مطلق حاصلضرب ریشه‌ها مساوی $\left|\frac{1}{a}\right|$ است ، اگر معادله ، ریشه گویا داشته باشد ، این ریشه به صورت کسری است که صورت آن مقسوم‌علیهی از 1 و مخرج آن مقسوم علیهی از a است .

مثال ۲. مطلوب است حل معادله زیر :

$$2x^4 + 3x^3 - 10x^2 - 2x + 3 = 0$$

حل. قدر مطلق حاصلضرب ریشه‌ها ، در این معادله مساوی $\frac{3}{2}$ است و بنابراین ریشه‌های گویای معادله (اگر چنین ریشه‌هایی وجود داشته باشد) بین عددهای زیر هستند :

$$\pm 1 ; \pm 3 ; \pm \frac{1}{2} ; \pm \frac{3}{2}$$

و به سادگی دیده می‌شود که عددهای $\frac{1}{2}$ و -3 در معادله صدق می‌کنند و معادله به صورت زیر در می‌آید :

$$(2x-1)(x+3)(x^2-x-1)=0 ;$$

$$x_1=\frac{1}{2} ; x_2=-3 ; x_{3,4}=\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$$

روشن است که وقتی تعداد مقسوم‌علیه‌های مقدار ثابت معادله زیاد باشد ، جستجوی ریشه‌های صحیح معادله :

$$x^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + px^2 + hx^1 + kx + l = 0 \quad (۱)$$

کاری مفصل و غیر عملی می‌شود.

روشی را ذکر می‌کنیم که با کمک آن بتوان مقسوم‌علیه‌هایی از مقدار ثابت را که جزو ریشه‌ها نیستند «غربال» کرد.
این روش مبتنی بر قضیه ساده زیر است:
قضیه. اگر α ریشه صحیح معادله (۱) باشد، باید مقسوم‌علیه‌ی از

عدد :

$$k + \beta$$

باشد که در آن k ضریب x و $\beta = \frac{1}{\alpha}$ است.

اثبات. چون α ریشه معادله است باید در آن صدق کند، یعنی :

$$\alpha^n + b\alpha^{n-1} + \dots + h\alpha^2 + k\alpha + l = 0$$

این رابطه را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\alpha^2(\alpha^{n-2} + b\alpha^{n-3} + \dots + h) = -(k\alpha + l)$$

طرف دوم تساوی باید بر α^2 قابل قسمت باشد یعنی کسر :

$$\frac{k\alpha + l}{\alpha^2} = \frac{k + \beta}{\alpha}$$

عددی است صحیح، یعنی α مقسوم‌علیه‌ی $k + \beta$ است.

بنابراین اگر α مقسوم‌علیه $k + \beta$ نباشد، ریشه معادله نیست و می‌توان

آنها از بین مقسوم‌علیه‌های مقدار ثابت حذف کرد.

مثال. معادله زیر مفروض است :

$$x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 20x - 24 = 0$$

ریشه‌های صحیح معادله را تعیین کنید.

جدول زیر را برای مقسوم‌علیه‌های ۲۴ تشکیل می‌دهیم :

α	۲	-۲	۳	-۳	۴	-۴	۶	-۶	۸	-۸	۱۲	-۱۲	۲۴	-۲۴
$۲۰ - \frac{۲۴}{\alpha}$	۸	۳۲	۱۲	۲۸	۱۴	۲۶	۱۶	۲۴	۱۷	۲۳	۱۸	۲۲	۱۹	۲۱
ریشه قابل آزمایش	۲	-۲	۳	-	-	-	-	-۶	-	-	-	-	-	-

البته ± ۱ را در این جدول وارد نکرده‌ایم ، چون این دو عدد همیشه قابل آزمایش هستند. از عدددهای بدست آمده -۶ در معادله صدق نمی‌کند و ± ۲ و ۳ در معادله صدق می‌کنند .
معادله به صورت زیر در می‌آید:

$$(x-2)^2(x+2)(x-3)=0 ;$$

$$x_1=x_2=2 ; x_3=-2 ; x_4=3$$

قضیه . اگر α ریشه صحیح معادله (۱) باشد ، اعداد ۱ و $k\alpha+۱$ و

$\alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \dots$ به ترتیب بر $b\alpha^{n-1} + \dots + k\alpha + 1$ و $h\alpha^2 + k\alpha + 1$ و α^n قابل قسمت خواهند بود.

برای اثبات کافی است تساویهای زیر را در نظر بگیریم :

$$\alpha^3(\alpha^{n-2} + b\alpha^{n-4} + \dots + p) = -(h\alpha^2 + k\alpha + 1)$$

$$\alpha^{n-1}(\alpha + b) = -(c\alpha^{n-2} + \dots + k\alpha + 1)$$

$$\alpha^n = -(b\alpha^{n-1} + c\alpha^{n-2} + \dots + k\alpha + 1)$$

چون سمت چپ این تساویها به ترتیب بر $\alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$ و α^n قابل

قسمت است، باید سمت راست تساویها هم بر همین مقادیر قابل قسمت باشند.

برای سهولت کار فرض می‌کنیم :

$$\beta_n = \frac{1}{\alpha}$$

$$\beta_{n-1} = \frac{k\alpha + 1}{\alpha^2} = \frac{k + \beta_n}{\alpha}$$

$$\beta_{n-2} = \frac{ha^2 + ka + l}{a^2} = \frac{h + \beta_{n-1}}{a}$$

$$\beta_2 = \frac{c + \beta_1}{a}$$

$$\beta_1 = \frac{b + \beta_2}{a} = -1$$

مثال. معادله زیر را حل کنید :

$$x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 12x + 16 = 0$$

حل: جدول زیر را تشکیل می‌دهیم :

α	۱	-۱	۲	-۲	۴	-۴	۸	-۸	۱۶	-۱۶
$\beta_4 = \frac{16}{a}$	۱۶	-۱۶	۸	-۸	۴	-۴	۲	-۲	۱	۱
$\beta_3 = \frac{12 + \beta_4}{a}$	۲۸	۴	۱۰	-۲	۴	-۲	-	-	-	-
$\beta_2 = \frac{-8 + \beta_3}{a}$	۲۰	۴	۱	۵	-۱	-	-	-	-	-
$\beta_1 = \frac{-3 + \beta_2}{a}$	۱۷	-۱	-۱	-۱	-۱	-	-	-	-	-
ریشه‌ها	-	-۱	۲	-۲	۴	-	-	-	-	-

در حالتی که ضریب بزرگترین درجه واحد نباشد و داشته باشیم :

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + kx + l = 0$$

(a, b, c, ..., k و l عددهایی صحیح هستند) . فرض می‌کنیم

y = ax ، بدست می‌آید :

$$\frac{y^n}{a^{n-1}} + \frac{by^{n-1}}{a^{n-1}} + \frac{cy^{n-2}}{a^{n-2}} + \dots + \frac{ky}{a} + 1 = 0$$

$$y^n + by^{n-1} + acy^{n-2} + \dots + ka^{n-2}y + la^{n-1} = 0$$

و سپس مثل حالت قبل عمل می‌کنیم.

۷. راه حل‌هایی برای معادله‌های درجه سوم و درجه چهارم

قبلاً متذکر می‌شویم که اگر در معادله درجه n :

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + kx + l = 0$$

تغییر مجهول $x = X - \frac{b}{na}$ بدهیم، به معادله درجه n جدیدی می‌رسیم که فاقد جمله‌ای از مجهول با توان $(n-1)$ است.

به این ترتیب هر معادله کامل درجه سوم را می‌توان به صورت زیر در آورد:

$$x^3 + px + q = 0 \quad (1)$$

و همچنین هر معادله درجه چهارم کامل را به صورت زیر:

$$x^4 + px^3 + qx^2 + r = 0 \quad (2)$$

اکنون به حل معادله $x^3 + px + q = 0$ می‌پردازیم:
اتحاد زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x^3 + px + q \equiv \alpha(x+a)^3 + \beta(x+b)^3 \quad (I)$$

اگر در این اتحاد بتوانیم ضریبهای نامعین α ، β ، a و b را معین کنیم، حل معادله به انجام می‌رسد. با مساوی قراردادن ضریبهای توانهای مساوی در دو طرف به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ a\alpha + b\beta = 0 \\ a^3\alpha + b^3\beta = \frac{p}{3} \\ a^2\alpha + b^2\beta = q \end{cases}$$

از معادله اول دستگاه بدست می‌آید : $\alpha = 1 - \beta$
 که اگر در سه معادله بعدی قرار دهیم می‌شود:

$$\begin{cases} \beta(a-b) = a \\ \beta(a^2-b^2) = a^2 - \frac{P}{3} \\ \beta(a^3-b^3) = a^3 - q \end{cases} \quad (II)$$

به ترتیب معادله‌های دوم و سوم این دستگاه را بر معادله اول تقسیم می‌کنیم ، می‌شود :

$$\begin{cases} a+b = \frac{3a^2-P}{3a} \\ a^2+ab+b^2 = \frac{a^3-q}{a} \end{cases}$$

و یا پس از ساده کردن :

$$\begin{cases} ab = -\frac{P}{3} \\ ab(a+b) = -q \end{cases}$$

و از آنجا :

$$\begin{cases} a \cdot b = -\frac{P}{3} \\ a+b = \frac{3q}{P} \end{cases} \quad (III)$$

از این دستگاه مقادیر a و b و سپس با کمک معادله اول دستگاه (II) مقدار β بدست می‌آید ، α هم از رابطه $\alpha = 1 - \beta$ محاسبه می‌شود .
توضیح . روشن است که اتحاد (I) وقتی برای مقادیر حقیقی برقرار است که معادله (۱) تنها يك ریشه حقیقی داشته باشد ، زیرا معادله :

$$\alpha(x+a)^3 + \beta(x+b)^3 = 0$$

يك ریشه حقیقی بیشتر ندارد . از طرف دیگر برای حقیقی بودن مقادیر a و

b ، باید ریشه‌های دستگاه III ، یعنی ریشه‌های معادله درجه دوم زیر حقیقی باشند :

$$3pt^2 - 9qt - p^2 = 0$$

مبین این معادله چنین است :

$$\Delta = 81q^2 + 12p^3 = 3(4p^3 + 27q^2)$$

بنابراین شرط اینکه معادله (۱) تنها يك ریشه حقیقی داشته باشد ، این است که $4p^3 + 27q^2 > 0$ باشد.

عین همین روش را برای معادله (۲) هم می‌توان بکار برد و ضریب‌های نامعلوم را در اتحاد زیر بدست آورد :

$$x^4 + px^2 + qx + r \equiv \alpha(x+a)^4 + \beta(x+b)^4$$

و سپس معادله را حل کرد .

ولی باید توجه داشت که اگرچه این روش برای حل معادله‌های درجه سوم و چهارم کلی بنظر می‌رسد، در عمل منجر به محاسبه‌های طولانی و مفصل می‌شود و به ندرت می‌توان از آن استفاده کرد.

مثال . معادله زیر را حل کنید :

$$x^3 + 6x^2 + 15x + 14 = 0$$

حل. ابتدا با تبدیل $x = y - 2$ ، معادله را به صورت زیر درمی‌آوریم :

$$y^3 + 3y + 8 = 0$$

اتحاد زیر را تشکیل می‌دهیم :

$$y^3 + 3y + 8 \equiv \alpha(x+a)^3 + \beta(x+b)^3$$

دستگاه زیر بدست می‌آید :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta = 1 \\ a\alpha + b\beta = 0 \\ a^3\alpha + b^3\beta = 1 \\ a^2\alpha + b^2\beta = 8 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1 - \beta \\ \beta(a-b) = a \\ \beta(a^3 - b^3) = a^3 - 1 \\ \beta(a^2 - b^2) = a^2 - 8 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a+b=\frac{a^2-1}{a} \\ a^2+ab+b^2=\frac{a^2-8}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab=-1 \\ a+b=8 \end{cases}$$

و از آنجا بدست می‌آید :

$$a=4+\sqrt{17} ; b=4-\sqrt{17}$$

و سپس :

$$\alpha=\frac{17-4\sqrt{17}}{34} ; \beta=\frac{17+4\sqrt{17}}{34}$$

حقیقی بودن مقادیر a و b و α و β به معنای این است که معادله درجه سوم مفروض تنها یک ریشه حقیقی دارد.
اکنون برای بدست آوردن این ریشه حقیقی، معادله زیر را تشکیل می‌دهیم :

$$\alpha(y+a)^2+\beta(y+b)^2=0$$

که از آنجا مقدار حقیقی y بدست می‌آید :

$$y=-\frac{a\sqrt[3]{\alpha}+b\sqrt[3]{\beta}}{\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}}$$

$$x=y-2=-\left(2+\frac{a\sqrt[3]{\alpha}+b\sqrt[3]{\beta}}{\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}}\right)$$

۸. استفاده از وجود رابطه‌ای بین بعضی از ریشه‌ها

مطلب را با ذکر يك مثال روشن می‌کنیم.

مثال. m را چنان پیدا کنید که مجموع دو ریشه از معادله:

$$x^4-8x^3+mx^2+128x+165=0$$

مساوی ۶ باشد و سپس معادله را حل کنید.

حل. از رابطه‌های بین ریشه‌ها و ضریبهای معادله استفاده می‌کنیم :

$$x_1+x_2+x_3+x_4=8$$

و چون طبق فرض داریم : $x_1 + x_2 = 6$ ، بدست می‌آید :

$$x_2 + x_3 = 2$$

رابطه حاصلضربهای دو بدوی ریشه‌ها را می‌نویسیم:

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = m$$

$$x_1x_2 + x_2x_4 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = m \quad \text{و یا :}$$

$$x_1x_2 + x_2x_4 = m - 12 \quad (1) \quad \text{و یا :}$$

و رابطه حاصلضربهای سه به سه ریشه‌ها:

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -128$$

$$x_1x_2(x_3 + x_4) + x_2x_4(x_1 + x_3) = -128 \quad \text{و یا :}$$

$$2x_1x_2 + 6x_2x_4 = -128 \quad \text{و یا :}$$

$$x_1x_2 + 3x_2x_4 = -64 \quad (2)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) بدست می‌آید :

$$\begin{cases} x_1x_2 + x_2x_4 = m - 12 \\ x_1x_2 + 3x_2x_4 = -64 \end{cases}$$

و از آنجا :

$$x_1x_2 = \frac{3m+28}{2} ; \quad x_2x_4 = -\frac{m+52}{2}$$

حاصلضرب چهار ریشه را می‌نویسیم :

$$x_1x_2x_3x_4 = 165 \quad (3)$$

به جای x_2x_4 و x_1x_2 مقادارهایشان را قرار می‌دهیم ، می‌شود :

$$-\frac{m+52}{2} \times \frac{3m+28}{2} = 165$$

$$3m^2 + 184m + 2116 = 0 ; \quad \text{و یا :}$$

$$m_1 = -46 ; \quad m_2 = -\frac{46}{3}$$

ابتدا $m = -46$ را در نظر می‌گیریم ، رابطه‌های (۱) و (۳) را می‌نویسیم :

$$\begin{cases} (x_1 x_2) + (x_3 x_4) = -58 \\ (x_1 x_2) \cdot (x_3 x_4) = 165 \end{cases}$$

از اینجا مقادیر $x_1 x_2$ و $x_3 x_4$ بدست می آید. معادله درجه دوم زیر را تشکیل می دهیم:

$$t^2 + 58t + 165 = 0$$

جوابهای t مساوی -55 و -3 می شود که با توجه به رابطه (۲) خواهیم داشت:

$$x_1 x_2 = -55 ; x_3 x_4 = -3$$

و بالاخره با کمک دستگاههای زیر مقادیر جوابها بدست می آید:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 x_2 = -55 \end{cases} ; \begin{cases} x_3 + x_4 = 2 \\ x_3 x_4 = -3 \end{cases}$$

جواب:

$$x_1 = -5 , x_2 = 11 ; x_3 = -1 ; x_4 = 3$$

پس $m = -\frac{46}{3}$ را در نظر می گیریم: در این صورت بدست می آید:

$$\begin{cases} x_1 x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 6 \end{cases} ; \begin{cases} x_3 x_4 = -\frac{55}{3} \\ x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

و چهار جواب x چنین است:

$$x_1 = 3 + 2\sqrt{2} ; x_2 = 3 - 2\sqrt{2} ;$$

$$x_3 = \frac{3 + \sqrt{174}}{3} ; x_4 = \frac{3 - \sqrt{174}}{3}$$

۹. نکته ای درباره حل معادله های گنگ

قبل از اینکه به گویا کردن يك معادله گنگ بپردازیم، همیشه بهتر است احتمال تجزیه عبارت را در نظر بگیریم، برای این منظور ابتدا جمله های

گویا و یا جمله‌های گنگ را (هر کدام که ساده‌تر است) تجزیه می‌کنیم و ریشه‌های آنرا در قسمت دیگر آزمایش می‌کنیم. اگر ریشه مشترک داشته باشند، به معنای این است که معادله قابل تجزیه است.

مثال: معادله زیر را حل کنید:

$$x^2 - 3x + (x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 4} = 2$$

حل. معادله را چنین می‌نویسیم:

$$(x^2 + 3x - 2) + (x - 1)(x + 1)\sqrt{(x - 2)(x + 2)} = 0$$

اعداد ۱- و ۲+ در هر دو عبارت (عبارت گویا و عبارت گنگ) صدق

می‌کنند، بنابراین می‌توان معادله را به صورت زیر نوشت:

$$(x + 1)^2(x - 2) + (x - 1)(x + 1)\sqrt{(x - 2)(x + 2)} = 0$$

و یا:

$$(x - 1)\sqrt{x - 2}[(x + 1)\sqrt{x - 2} + (x - 1)\sqrt{x + 2}] = 0$$

و ریشه‌های معادله بدست می‌آید:

$$x_1 = -1; x_2 = +2$$

(مقدار داخل کرشه مخالف صفر است).

$$\sqrt{u} \pm \sqrt{v} = a \quad ۱۰. \text{ گویا کردن معادلات به صورت:}$$

با توجه به اتحاد:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm b^2 \pm 2ab(a \pm b)$$

دوطرف معادله مفروض را مکعب می‌کنیم:

$$u \pm v \pm 2\sqrt{uv}(\sqrt{u} \pm \sqrt{v}) = a^3$$

و چون طبق فرض داریم $\sqrt{u} \pm \sqrt{v} = a$ ، معادله مفروض به صورت

زیر در می‌آید:

$$u \pm v \pm 2a\sqrt{uv} = a^3,$$

$$u \pm v - a^3 = \mp 2a\sqrt{uv} \quad \text{و یا:}$$

که اگر مجدداً دوطرف معادله را مکعب کنیم، به صورت زیر که معادله‌ای

گویا است در می آید :

$$(u \pm v - a^2)^2 = \mp 2va^2uv$$

مثال . معادله زیر را حل کنید :

$$\sqrt[3]{2x-3} + \sqrt[3]{3x+2} = 3$$

حل. با مکعب کردن دوطرف معادله ، بدست می آید :

$$(2x-3) + (3x+2) + 9\sqrt[3]{(2x-3)(3x+2)} = 27$$

و یا پس از عملهای لازم :

$$9\sqrt[3]{6x^2-5x-6} = 24-5x$$

دوباره دوطرف معادله را مکعب می کنیم، که پس از منظم کردن به

معادله زیر خواهیم رسید :

$$125x^3 + 2274x^2 + 8115x - 26226 = 0$$

این معادله به صورت زیر قابل تجزیه است :

$$(x-2)(125x^2 + 2524x + 13163) = 0$$

ریشه عامل درجه اول $x=2$ و ریشه های عامل درجه دوم موهومی

است .

در این معادله احتیاجی نیست که جواب بدست آمده را آزمایش کنیم،

زیرا دوطرف معادله را دوبار به توان ۳ رساندیم و چون ۳ عددی است فرد،

جواب حقیقی اضافی در معادله وارد نمی شود و جواب بدست آمده قابل قبول

است .

۱۱. يك نکته ديگر

می دانیم که در معادله های گنگه وقتی لااقل فرجه یکی از رادیکالها زوج

باشد ، اکثراً برای حل ناچار می شویم دوطرف معادله را يك یا چند بار به

توان زوج برسانیم و این عمل باعث می شود که ریشه های معادله یا معادله های

دیگری را در معادله مفروض ما داخل کند . از این رو باید ریشه هایی که از

این راه بدست می آید مورد آزمایش قرار گیرد تا ریشه های معادله مفروض

از بقیه جدا شود.

بهترین روش برای آزمایش ریشه‌ها اینست که آنها را در معادله اصلی (و یا یکی از صورتهای معادله، قبل از بتوان رساندن آن) امتحان کنیم، تا معلوم شود که در معادله صدق می‌کند یا نه؟

گاهی دیده شده است که بعضی از مؤلفین کتابهای درسی و یا حل مسائل، برای آزمایش ریشه‌ها به راه دیگری متوسل می‌شوند، بدین صورت که اگر به ازای جواب بدست آمده، تمام مقادیر زیر رادیکالها مثبت شود، آنرا قابل قبول و در غیر این صورت خارجی تلقی می‌کنند.

این روش بکلی نادرست است و باید فراموش شود، به دو مثال زیر توجه بفرمایید:

مثال ۱. معادله زیر را حل کنید:

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{x+2} = 2 + \sqrt{2x-5}$$

حل. اگر دوطرف معادله را مجذور کنیم، داریم:

$$\begin{aligned}(x-3) + (x+2) + 2\sqrt{(x-3)(x+2)} &= \\ &= 4 + (2x-5) + 4\sqrt{2x-5}\end{aligned}$$

و یا پس از خلاصه کردن:

$$\sqrt{x^2 - x - 6} = 2\sqrt{2x - 5}$$

دوباره دوطرف معادله را مجذور می‌کنیم:

$$x^2 - x - 6 = 8x - 20 \Rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0$$

این معادله درجه دوم دو جواب ۲ و ۷ را قبول دارد و هر دو جواب هم در معادله اصلی صدق می‌کنند، زیرا هر کدام از آنها را که در معادله قرار دهیم به یک اتحاد عددی می‌رسیم، درحالی که $x=2$ در حوزه رادیکالهای حقیقی، برای معادله مفروض نیست.^۱

۱- فقط به یک شرط می‌توان از جواب $x=2$ صرف نظر کرد و آن موقعی است که در صورت مسأله ذکر شده باشد که جوابها باید در حوزه رادیکالهای حقیقی باشند.

مثال ۲. مطلوبست حل معادله زیر :

$$\sqrt{2x-1} - \sqrt{x-1} = 5$$

حل. دوطرف معادله را مجذور می‌کنیم:

$$(2x-1) + (x-1) - 2\sqrt{(2x-1)(x-1)} = 25$$

و یا :

$$3x - 27 = 2\sqrt{2x^2 - 3x + 1}$$

مجدداً دوطرف معادله را مجذور و سپس ساده می‌کنیم :

$$x^2 - 150x + 725 = 0 \Rightarrow x_1 = 5 ; x_2 = 145$$

از این دو جواب $x = 145$ در معادله اصلی صدق می‌کند، درحالیکه

$x = 5$ ریشه معادله مفروض نیست و در آن صدق نمی‌کند .

در این مثال با وجودی که $x = 5$ در حوزه رادیکالهای حقیقی است،

جواب معادله نیست .

۱۲. معادله‌های معکوسه

تعریف و شناسایی . به معادله‌ای معکوسه گوئیم که اگر α در آن صدق

کند $\frac{1}{\alpha}$ و یا $-\frac{1}{\alpha}$ هم در آن صدق کند که در صورت اول معکوسه مثبت و

در صورت دوم معکوسه منفی نامیده می‌شود .

به عبارت دیگر:

معکوسه مثبت معادله‌ای است که با تبدیل x به $\frac{1}{x}$ به خودش تبدیل شود .

و معکوسه منفی معادله‌ای است که با تبدیل x به $-\frac{1}{x}$ به خودش

تبدیل شود .

از این تعریف نتیجه‌های زیر مستقیماً بدست می‌آید:

I. معادله معکوسه منفی نمی‌تواند از درجه فرد باشد. زیرا مثلاً برای

اینکه معادله درجه سوم:

$$ax^2 + bx + cx + d = 0 \quad (۱)$$

معکوسه منفی باشد، باید با تبدیل x به $-\frac{1}{x}$ تغییر نکند. x را به $-\frac{1}{x}$ تبدیل می‌کنیم:

$$-\frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} - \frac{c}{x} + d = 0 ,$$

$$dx^2 - cx + bx - a = 0 \quad (۲) \quad \text{و یا:}$$

برای اینکه معادله‌های (۱) و (۲) هم ارز باشند، باید ضمناً داشته باشیم:

$$\frac{a}{d} = -\frac{d}{a} \Rightarrow a^2 = -d^2$$

که غیرممکن است.

II. اگر معادله معکوسه مثبت از درجه فرد باشد، حتماً ریشه‌ای

مساوی ۱ یا -۱ دارد، زیرا این دو عدد، تنها عددهای حقیقی هستند که با عکس خود برابرند.

بنابراین سمت چپ معادله معکوسه مثبت، وقتی از درجه فرد باشد، همواره بر $x-1$ یا $x+1$ قابل قسمت است که پس از تقسیم به معادله معکوسه مثبت از درجه زوج خواهیم رسید.

با این مقدمه‌ها روشن می‌شود که برای بحث درحل معادله‌های معکوسه، کافی است به معادله‌های معکوسه از درجه زوج بپردازیم، بعد از این هر جا از معادله معکوسه نام ببریم، منظور معادله معکوسه از درجه زوج است. معادله زیر را که از درجه $2n$ است در نظر می‌گیریم:

$$ax^{2n} + bx^{2n-1} + cx^{2n-2} + \dots + fx^n + \dots + mx^2 + nx + p = 0 \quad (۱)$$

برای اینکه این معادله، معکوسه مثبت باشد، باید با تبدیل x به

$\frac{1}{x}$ تغییر نکند، با این تبدیل به معادله زیر می‌رسیم:

$$px^{2n} + nx^{2n-1} + mx^{2n-2} + \dots + fx^n + \dots + cx^2 + bx + a = 0 \quad (۲)$$

و برای اینکه معادله‌های (۱) و (۲) هم ارز باشند، باید ضریبهای متناسبی داشته باشند، یعنی :

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{n} = \frac{c}{m} = \dots = \frac{f}{f} = \dots = \frac{m}{c} = \frac{n}{b} = \frac{p}{a}$$

که از آنجا بدست می‌آید :

$$a=p, b=n, c=m, \dots$$

یعنی برای اینکه معادله‌ای معکوسه مثبت باشد، باید ضریبهای مجهولها از دو طرف دو به دو مساوی باشند.

برای شناسایی معادله معکوسه منفی هم می‌توان با روشی شبیه روش بالا به نتیجه‌های زیر رسید:

I. در معادله معکوسه منفی، وقتی بزرگترین توان مضربی از ۴ باشد، ضریبهای توانهای زوج از دو طرف باهم مساوی و ضریبهای توانهای فرد از دو طرف قرینه یکدیگرند.

II. وقتی که بزرگترین توان معادله معکوسه مضربی از ۴ نباشد (یعنی در تقسیم بر ۴ باقیمانده‌ای مساوی ۲ داشته باشد)، ضریبهای توانهای زوج از دو طرف قرینه یکدیگر و ضریبهای توانهای فرد از دو طرف مساوی یکدیگرند.

روش حل. ثابت می‌شود^۱ که $x^n \pm \frac{1}{x^n}$ را می‌توان بصورت تابع درجه

n از $x \pm \frac{1}{x}$ نوشت. در حل معادله‌های معکوسه باید $x + \frac{1}{x}$ (در مورد

معکوسه مثبت) و $x - \frac{1}{x}$ (در مورد معکوسه منفی) به عنوان مجهول کمکی اختیار شود. در چنین صورتی به معادله‌ای خواهیم رسید که درجه آن نصف درجه معادله اصلی است و به شرط قابل حل بودن معادله جدید، جوابهای معادله اصلی هم بدست می‌آید.

مثال ۱. این معادله را حل کنید :

$$2x^4 - 13x^3 + 24x^2 - 13x + 2 = 0$$

حل. اگر دوطرف معادله را بر x^2 تقسیم کنیم، بدست می‌آید :

$$2x^2 - 13x + 24 - \frac{13}{x} + \frac{2}{x^2} = 0 ,$$

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 13\left(x + \frac{1}{x}\right) + 24 = 0 \quad \text{و یا :}$$

اگر فرض کنیم $x + \frac{1}{x} = t$ ، بهسادگی (بامجدور کردن دوطرف آن)

بدست می‌آید : $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$. بنابراین معادله مفروض به صورت زیر در می‌آید :

$$2(t^2 - 2) - 13t + 24 = 0 ,$$

$$2t^2 - 13t + 20 = 0 \Rightarrow t = 4 , \frac{5}{2} ;$$

$$t = 4 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 ,$$

$$x_1 = 2 + \sqrt{3} , x_2 = 2 - \sqrt{3}$$

$$t = \frac{5}{2} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 ,$$

$$x_3 = 2 , x_4 = \frac{1}{2}$$

مثال ۲. مطلوبست حل معادله زیر :

$$30x^8 - 73x^7 + 90x^6 - 292x^5 + 150x^4 -$$

$$- 292x^3 + 90x^2 - 73x + 30 = 0$$

حل. دوطرف معادله را بر x^4 تقسیم می‌کنیم، با مختصری تغییر به صورت

زیر در می‌آید :

$$30\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) - 73\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 90\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) -$$

$$- 292\left(x + \frac{1}{x}\right) + 150 = 0$$

اگر فرض کنیم : $x + \frac{1}{x} = t$ ، خواهیم داشت :

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2 ; x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t ;$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = t^4 - 4t^2 + 2$$

در نتیجه معادله مفروض بصورت زیر در می آید :

$$30(t^4 - 4t^2 + 2) - 73(t^3 - 3t) + 90(t^2 - 2) - 292t + 150 = 0$$

و یا پس از ساده کردن :

$$30t^4 - 73t^3 - 30t^2 - 73t + 30 = 0$$

ولی ، این خود يك معادله معکوسه درجه چهارم است ، دوطرف آنرا

بر t^2 تقسیم می کنیم :

$$30\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) - 73\left(t + \frac{1}{t}\right) - 30 = 0$$

که با فرض $t + \frac{1}{t} = p$ ، می شود :

$$30(p^2 - 2) - 73p - 30 = 0$$

$$30p^2 - 73p - 90 = 0 \quad \text{و یا :}$$

با حل این معادله درجه دوم ، مقادیر p بدست می آید :

$$p = \frac{73 \pm 127}{60} ; p_1 = \frac{10}{3} ; p_2 = -\frac{9}{10} ;$$

$$p = \frac{10}{3} \Rightarrow t + \frac{1}{t} = \frac{10}{3} \Rightarrow t_1 = 3 ; t_2 = \frac{1}{3}$$

$$p = -\frac{9}{10} \Rightarrow t + \frac{1}{t} = -\frac{9}{10} \quad (\text{ریشه های موهومی})$$

یعنی برای t دو ریشه حقیقی و دو ریشه موهومی بدست می آید . حالا

به محاسبه مقادیر حقیقی x می پردازیم :

$$t=3 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 3 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$t = \frac{1}{3} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \quad (\text{ریشه‌های موهومی})$$

به این ترتیب معادله درجه هشتم مطلوب دو ریشه حقیقی و شش ریشه موهومی دارد.

مثال ۳. معادله زیر را حل کنید :

$$2ax^4 - (2a^2 + 3a - 2)x^3 + (3a^2 - 4a - 3)x^2 + (2a^2 + 3a - 2)x + 2a = 0$$

حل. این معادله، يك معادله معكوسه منفي است و بنابراین باید آنرا

نسبت به $x - \frac{1}{x}$ منظم کنیم، دوطرف معادله را بر x^2 تقسیم می‌کنیم، می‌شود

$$2a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - (2a^2 + 3a - 2)\left(x - \frac{1}{x}\right) + (3a^2 - 4a - 3) = 0$$

با فرض $x - \frac{1}{x} = t$ ، خواهیم داشت :

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = t^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$$

و بنابراین معادله مفروض به صورت زیر در می‌آید :

$$2a(t^2 + 2) - (2a^2 + 3a - 2)t + (3a^2 - 4a - 3) = 0$$

و یا :

$$2at^2 - (2a^2 + 3a - 2)t + 2(a^2 - 1) = 0$$

ابتدا مبین معادله را محاسبه می‌کنیم :

$$\begin{aligned} \Delta &= (2a^2 + 3a - 2)^2 - 8a(3a^2 - 3) = \\ &= 4a^4 - 12a^2 + a^2 + 12a + 4 = \\ &= (2a^2 - 3a - 2)^2 \end{aligned}$$

و بنابراین داریم :

$$t = \frac{(2a^2 + 2a - 2) \pm (2a^2 - 2a - 2)}{2a};$$

$$t_1 = \frac{2}{2}; \quad t_2 = \frac{a^2 - 1}{a};$$

$$t = \frac{2}{2} \Rightarrow x - \frac{1}{x} = \frac{2}{2};$$

$$x_1 = 2; \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$t = \frac{a^2 - 1}{a} \Rightarrow x - \frac{1}{x} = \frac{a^2 - 1}{a};$$

$$x_3 = a; \quad x_4 = -\frac{1}{a}$$

۱۳. معادله‌هایی که با روش معادله‌های معکوسه حل می‌شوند

معادله‌هایی از نوع :

$$ax^r + bx^r + cx^r \pm b kx + a k^r = 0;$$

$$ax^r + bx^r + cx^r + dx^r \pm chx^r + dk^r x \pm ak^r = 0;$$

را می‌توان با همان روش معادله‌های معکوسه حل کرد ، منتهی در اینجا

باید معادله را بر حسب $(x \pm \frac{k}{x})$ مرتب نمود .

مثال ۱. معادله زیر را حل کنید :

$$2x^2 - 15x^2 + 25x^2 - 30x + 8 = 0$$

حل. طرفین معادله را بر x^2 تقسیم می‌کنیم :

$$2(x^2 + \frac{2}{x^2}) - 15(x + \frac{2}{x}) + 25 = 0$$

با فرض $x + \frac{2}{x} = t$, خواهیم داشت:

$$(x + \frac{2}{x})^2 = t^2 \Rightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} = t^2 - 2$$

و بنابراین معادله مفروض بصورت زیر در می‌آید :

$$2(t^2 - 4) - 15t + 35 = 0 \Rightarrow 2t^2 - 15t + 27 = 0 ,$$

$$t = \frac{9}{2} ; 3$$

$$t = \frac{9}{2} \Rightarrow x + \frac{2}{x} = \frac{9}{2} \Rightarrow 2x^2 - 9x + 4 = 0 ;$$

$$x_1 = 4 ; x_2 = \frac{1}{2}$$

$$t = 3 \Rightarrow x + \frac{2}{x} = 3 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 ;$$

$$x_3 = 1 ; x_4 = 2$$

مثال ۴. مطلوبست حل معادله زیر :

$$2x^4 + 7x^3 - 34x^2 - 21x + 18 = 0$$

حل. با تقسیم دوطرف معادله بر x^2 بدست می‌آید:

$$2(x^2 + \frac{9}{x^2}) + 7(x - \frac{3}{x}) - 34 = 0$$

و با فرض $x - \frac{3}{x} = t$ خواهیم داشت:

$$x^2 + \frac{9}{x^2} = t^2 + 6$$

و بنابراین معادله مفروض بصورت زیر در می‌آید :

$$2(t^2 + 6) + 7t - 34 = 0 \Rightarrow 2t^2 + 7t - 22 = 0 ;$$

$$t = 2 \text{ و } -\frac{11}{2} ;$$

$$t = 2 \Rightarrow x - \frac{3}{x} = 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 ;$$

$$x_1 = -1 ; x_2 = 3$$

$$t = -\frac{11}{2} \Rightarrow x - \frac{3}{x} = -\frac{11}{2} \Rightarrow 2x^2 + 11x - 6 = 0 ;$$

$$x_3 = \frac{1}{2}; \quad x_4 = -6$$

۱۴. معادله‌های شامل قدرمطلق

میدانیم که $|a|$ با $\sqrt{a^2}$ دو مفهوم مختلف نیستند^۱ و همیشه می‌توان یکی را بجای دیگری بکار برد، بنابراین داریم:

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

مثلا برای $|2x+3|$ در موردی که $x < -\frac{3}{2}$ باشد:

$$|2x+3| = -(2x+3) \quad \text{و در موردی که } x > \frac{3}{2} \text{ باشد:}$$

$$|2x+3| = 2x+3 \quad \text{خواهد بود.}$$

مثال ۱. مطلوبست حل معادله زیر:

$$|4x-5| = 1$$

حل. دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول. $x < \frac{5}{4}$ ، در اینصورت داریم:

$$-(4x-5) = 1 \Rightarrow x = 1$$

و چون جواب x با شرط این حالت می‌سازد (یعنی از $\frac{5}{4}$ کوچکتر

است)، قابل قبول است.

حالت دوم. $x > \frac{5}{4}$ ، در اینحالت داریم:

$$4x-5 = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

۱- به بخش عبارتهای گنگ مراجعه شود.

$\frac{3}{2}$ از $\frac{5}{4}$ بزرگتر است و بنابراین جواب دوم هم قابل قبول است.

$$\text{جواب: } x_1 = 1, x_2 = \frac{3}{2}$$

مثال ۲. معادله زیر را حل کنید:

$$\sqrt{(x+3)^2} + \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(2x-8)^2} = 9$$

حل. معادله مفروض را می‌توان چنین نوشت:

$$|x+3| + |x-2| + |2x-8| = 9;$$

برای اینکه در حل این معادله و تشخیص حالت‌های مختلف اشتباهی پیش نیاید و بخصوص برای جلوگیری از عملهای اضافی، قبلاً علامت عبارتهای داخل قدر مطلق‌ها را در جدولی مشخص می‌کنیم:

$$x+3=0 \Rightarrow x=-3$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

$$2x-8=0 \Rightarrow x=4$$

بنابراین جدول زیر را داریم:

x	$-\infty$	-3	2	4	$+\infty$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	0	$+$	$-$
$2x-8$	$-$	$-$	$-$	0	$+$

باتوجه به جدول روشن می‌شود که باید معادله را در چهار حالت مختلف

حل کرد:

$$\text{I) } x \leq -3$$

در این حالت (یعنی وقتی که x بزرگتر از -3 نباشد)، هر سه عبارت

$x+3$ ، $x-2$ ، $2x-8$ منفی هستند و بنابراین معادله به صورت زیر

در می‌آید:

$$-(x+3) - (x-2) - (2x-8) = 9 \quad (1)$$

و البته به شرطی جواب معادله (۱) قابل قبول است که با شرط این حالت ($x \leq -3$) بسازد.

$$-x-3-x+2-2x+8=9 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

و روشن است که این جواب قابل قبول نیست.

$$\text{II) } -3 < x < 2$$

در این حالت $x+3$ مثبت ولی $x-2$ و $2x-8$ منفی هستند و داریم:

$$(x-3)-(x-2)-(2x-8)=9 \Rightarrow x=2$$

و این جواب قابل قبول است.

$$\text{III) } 2 \leq x \leq 4$$

$$(x+3)+(x-2)-(2x-8)=9 \Rightarrow 9=9$$

در این حالت معادله به اتحاد تبدیل می شود، یعنی تمام مقادیر واقع در فاصله [۲ و ۴] در معادله صدق می کنند.

$$\text{IV) } x > 4$$

$$(x+3)+(x-2)+(2x-8)=9 \Rightarrow x=4$$

جواب: معادله مفروض در فاصله [۲ و ۴] به اتحاد تبدیل می شود و در خارج این فاصله جواب دیگری ندارد.
مثال ۳. معادله زیر را حل کنید:

$$|x^2-4|+|x|+2x=2$$

حل جدول علامتها را تشکیل می دهیم:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
x^2-4	$+$	$\circ$	$-$	$-$	$\circ$	$+$
x	$-$	$-$	$\circ$	$+$	$+$	

و معادله را در چهار حالت حل می کنیم:

$$\text{I) } x < -2; \quad x^2-4-x+2x=2;$$

$$x^2+x-6=0 \Rightarrow x=-3, 2$$

که از آنها $x = -3$ قابل قبول است .

$$\text{II) } -2 \leq x < 0 ; -(x^2 - 4) - x + 2x = 2 ;$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ و } -1$$

که از آنها $x = -1$ قابل قبول است (۲ در فاصله $[-2, 0]$ نیست).

$$\text{III) } 0 \leq x < 2 ; -(x^2 - 4) + x + 2x = 2 ;$$

$$x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

که هیچکدام قابل قبول نیستند ، یعنی معادله مفروض در فاصله $[0, 2]$

جوابی ندارد .

$$\text{IV) } x \geq 2 ; (x^2 - 4) + x + 2x = 2$$

$$x^2 + 3x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}$$

که باز هم قابل قبول نیستند .

جواب : $x_1 = -3$ ، $x_2 = -1$

۱۵ . معادله‌های شامل «تابع قسمت صحیح»

مقدمه . منظور از $[x]$ ، بزرگترین عدد صحیحی است که از x بزرگتر

نباشد . $[x]$ را گاهی هم بصورت $E(x)$ نمایش می‌دهند . مثلاً :

$$[3] = 3 ; [\sqrt{5}] = 2 ; [-4/7] = -5 ; \dots$$

مثال ۱ . مطلوبست حل معادله زیر :

$$[x+2] + [x] = 12 \quad (1)$$

حل . ابتدا معادله زیر را حل می‌کنیم :

$$(x+2) + x = 12 \Rightarrow x = 5$$

واضح است که $x = 5$ در معادله (۱) صدق می‌کند .

اگر $x < 5$ باشد ، داریم :

$$\begin{cases} x+2 < 7 \\ x < 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [x+2] < 7 \\ [x] < 5 \end{cases}$$

و بنابراین معادله جواب کوچکتر از ۵ ندارد .
اگر $x \geq 6$ باشد : داریم :

$$\left\{ \begin{array}{l} x+2 \geq 8 \\ x \geq 6 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} [x+2] \geq 8 \\ [x] \geq 6 \end{array} \right.$$

و بنابراین مقادیر $x \geq 6$ هم در معادله صدق نمی کنند .
جواب ، $5 \leq x < 6$

مثال ۲. معادله زیر را حل کنید :

$$[5x+3]+[7x+9]=18 \quad (1)$$

حل. معادله (۱) هم ارز معادله زیر است :

$$[5x]+[7x]=18-(9+3)=6$$

ابتدا معادله زیر را حل می کنیم :

$$5x+7x=6 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

ولی $x=\frac{1}{2}$ جواب معادله نیست ، زیرا :

$$[5 \times \frac{1}{2}]+[7 \times \frac{1}{2}]=2+3=5$$

و ضمناً چون $5 < 6$ است ، هیچ عدد کوچکتر از $\frac{1}{2}$ هم در معادله صدق

نمی کند، برای اینکه سمت چپ تساوی مساوی ۶ شود ، باید یا $5x=3$ و

یا $7x=4$ شود . ولی بازاء $x=\frac{3}{5}$ داریم :

$$[5 \times \frac{3}{5}]+[7 \times \frac{3}{5}]=[3]+[4/2]=7$$

پس جواب معادله از $\frac{3}{5}$ کوچکتر است . بازاء $x=\frac{4}{7}$ داریم :

$$[5 \times \frac{4}{7}]+[7 \times \frac{4}{7}]=[2/8500]+[4]=6$$

و بنابراین جواب معادله چنین است :

$$\frac{4}{7} \leq x < \frac{3}{5}$$

مثال ۳. این معادله را حل کنید :

$$[-x^2 + 3x] = [x^2 + \frac{1}{2}]$$

حل. قبل از همه ملاحظه می‌کنیم که :

$$x^2 + \frac{1}{2} > 0$$

بنابراین باید داشته باشیم :

$$[x^2 + \frac{1}{2}] = n \geq 0$$

از طرف دیگر به سادگی دیده می‌شود که نامعادله $-x^2 + 3x \geq 3$

یا $x^2 - 3x + 3 \leq 0$ جواب ندارد، بنابراین n می‌تواند عددهای ۱، ۰ و ۲ را قبول کند. این سه مقدار n با سه دستگاه نامعالمای زیر تطبیق می‌کند:

$$\begin{cases} 0 \leq -x^2 + 3x < 1 \\ 0 \leq x^2 + \frac{1}{2} < 1 \end{cases} ; \begin{cases} 1 \leq -x^2 + 3x < 2 \\ 1 \leq x^2 + \frac{1}{2} < 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \leq -x^2 + 3x < 3 \\ 2 \leq x^2 + \frac{1}{2} < 3 \end{cases}$$

که از آنجا جوابهای زیر بدست می‌آید :

$$0 \leq x < \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) ; \frac{\sqrt{2}}{2} \leq x < 1 ;$$

$$\frac{\sqrt{6}}{2} \leq x < \frac{\sqrt{10}}{2}$$

۱۶. محاسبه مجموع توانهای متشابه ریشه‌ها

معادله درجه دوم زیر را در نظر می‌گیریم :

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (۱)$$

اگر دوطرف معادله (۱) را در x^{n-2} ضرب کنیم، می شود :

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} = 0 \quad (۲)$$

واضح است که x_1 و x_2 ، ریشه های معادله (۱) . در معادله (۲) هم

صدق می کنند :

$$\begin{cases} ax_1^n + bx_1^{n-1} + cx_1^{n-2} = 0 \\ ax_2^n + bx_2^{n-1} + cx_2^{n-2} = 0 \end{cases}$$

از جمع این دو رابطه بدست می آید :

$$a(x_1^n + x_2^n) + b(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) + c(x_1^{n-2} + x_2^{n-2}) = 0$$

که اگر $x_1^p + x_2^p = S_p$ فرض کنیم ، خواهیم داشت :

$$aS_n + bS_{n-1} + cS_{n-2} = 0$$

ازاین رابطه، که به رابطه برگشتی بین توانهای متشابه ریشه ها موسوم

است ، دو نتیجه بدست می آید :

اولا مجموع توانهای متشابه ریشه های معادله درجه دوم بر حسب ضریبها

قابل محاسبه اند .

ثانیاً برای محاسبه مجموع توانهای n ام ریشه ها باید مجموع توانهای

$(n-1)$ ام و مجموع توانهای $(n-2)$ ام ریشه ها معلوم باشد .

شبه همین رابطه را برای مجموع توانهای متشابه ریشه های معادله های از

درجه های بالاتر هم می توان بدست آورد ، مثلاً در مورد معادله درجه سوم :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

اگر ریشه ها را x_1 ، x_2 ، x_3 ، $x_1^p + x_2^p + x_3^p = S_p$ فرض کنیم ،

بدست می آید .

$$aS_n + bS_{n-1} + cS_{n-2} + dS_{n-3} = 0$$

در عمل برای محاسبه مجموع توانهای معینی از ریشه های معادله های درجه

های بالا بهتر است که رابطه برگشتی را برای همان توانی که مورد احتیاج

است ، مستقیماً محاسبه کنیم .

مثال ۱ . مطلوب محاسبه مجموع توانهای چهارم ریشه ها در معادله :

$$2x^2 - 4x + 1 = 0$$

حل. داریم:

$$S_0 = x_1^0 + x_2^0 = 2 ; S = x_1 + x_2 = 2$$

حالا رابطه بر گشتی را بین مجموع توانهای متشابه ریشه‌های این معادله

می‌نویسیم:

$$2S_n - 4S_{n-1} + S_{n-2} = 0 \quad (1)$$

اگر فرض کنیم $n=2$ ، بدست می‌آید:

$$2S_2 - 4S_1 + S_0 = 0 \Rightarrow S_2 = 3$$

حالا در رابطه (۱) فرض می‌کنیم $n=3$:

$$2S_3 - 4S_2 + S_1 = 0 \Rightarrow S_3 = 5$$

و بالاخره به ازای $n=4$:

$$2S_4 - 4S_3 + S_2 = 0 \Rightarrow S_4 = \frac{17}{2}$$

$$\text{جواب: } x_1^4 + x_2^4 = \frac{17}{2}$$

مثال ۲. مطلوب است مجموع توانهای ششم ریشه‌ها در معادله زیر:

$$x^3 - 3x + 1 = 0 \quad (1)$$

حل. دوطرف معادله (۱) را در x^3 ضرب می‌کنیم.

$$x^6 - 3x^4 + x^3 = 0 \quad (2)$$

x_1 ، x_2 و x_3 ، ریشه‌های معادله (۱) ، در (۲) صدق می‌کنند:

$$\begin{cases} x_1^6 - 3x_1^4 + x_1^3 = 0 \\ x_2^6 - 3x_2^4 + x_2^3 = 0 \\ x_3^6 - 3x_3^4 + x_3^3 = 0 \end{cases}$$

از جمع این رابطه‌ها بدست می‌آید:

$$x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 =$$

$$3(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) - (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) \quad (3)$$

اکنون اگر دوطرف معادله (۱) را در x ضرب کنیم و ریشه‌های x_1 ،

x_1 و x_3 را در آن صدق دهیم. بدست می‌آید :

$$\begin{cases} x_1^4 - 3x_1^2 + x_1 = 0 \\ x_2^4 - 3x_2^2 + x_2 = 0 \\ x_3^4 - 3x_3^2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

از جمع این رابطه‌ها داریم :

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_1 + x_2 + x_3) = \\ = 3[(x_1 + x_2 + x_3)^2 -$$

$$- 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)] - (x_1 + x_2 + x_3)$$

در معادله (۱)، مجموع ریشه‌ها $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ و مجموع

حاصلضربهای دو به دو ریشه‌ها $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -3$ می‌باشد و بنابراین:

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 18 \quad (4)$$

حالا اگر در معادله (۱) ریشه‌ها را صدق دهیم و سپس سه رابطه‌ای که

بدست می‌آید با هم جمع کنیم، می‌شود:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3(x_1 + x_2 + x_3) - 3 = -3 \quad (5)$$

با در نظر گرفتن رابطه‌های (۴) و (۵)، رابطه (۳) چنین می‌شود :

$$x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 = 3 \times 18 - (-3) = 57$$

۱۷. تشکیل معادله‌ها

معادله زیر را در نظر می‌گیریم :

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + dx^{n-3} + \dots + 1 = 0$$

این معادله را می‌توان چنین نوشت:

$$x^n + \frac{b}{a}x^{n-1} + \frac{c}{a}x^{n-2} + \frac{d}{a}x^{n-3} + \dots + \frac{1}{a} = 0$$

که با توجه به رابطه‌های بین ریشه‌ها و ضرایبها، به صورت زیر درمی‌آید:

$$x^n - (\sum x_1)x^{n-1} + (\sum x_1x_2)x^{n-2} - (\sum x_1x_2x_3)x^{n-3} + \\ + \dots + (-1)^n(x_1x_2 \dots x_n) = 0$$

این معادله، رابطه کلی تشکیل يك معادله درجه n با در دست داشتن ریشه‌های آن است.

مثال ۱. معادله درجه سومى تشكيل دهيد كه ریشه‌های آن چنین باشد:

$$x_1 = 3; \quad x_2 = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad x_3 = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

حل. داریم:

$$\Sigma x_i = x_1 + x_2 + x_3 = 7;$$

$$\Sigma x_i x_j = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \frac{61}{4};$$

$$x_1 x_2 x_3 = \frac{39}{4}$$

و بنابراین معادله درجه سوم مطلوب چنین است:

$$x^3 - 7x^2 + \frac{61}{4}x - \frac{39}{4} = 0$$

$$4x^3 - 28x^2 + 61x - 39 = 0 \quad \text{و یا:}$$

مثال ۲. معادله درجه سومى تشكيل دهيد كه ریشه‌های آن مجذور ریشه-

های معادله زیر باشد:

$$x^2 + 2x^2 - x + 5 = 0 \quad (1)$$

حل. روش اول: اگر ریشه‌های معادله (۱) را x_1, x_2, x_3 و ریشه-

های معادله مطلوب را y_1, y_2, y_3 فرض کنیم، طبق فرض مساله داریم:

$$y_1 = x_1^2; \quad y_2 = x_2^2; \quad y_3 = x_3^2$$

و بنابراین:

$$\begin{aligned} \Sigma y_i &= y_1 + y_2 + y_3 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \\ &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) = \\ &= (-2)^2 - 2(-1) = 6; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma y_i y_j &= x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2 = \\ &= (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)^2 - 2x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3) = \\ &= -19; \end{aligned}$$

$$y_1 y_2 y_3 = (x_1 x_2 x_3)^2 = 25$$

و بنابراین معادله مطلوب چنین است :

$$y^2 - 6y^2 - 19y - 25 = 0$$

روش دوم : طبق فرض داریم :

$$y = x^2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{y}$$

هر يك از دو مقدار $\pm \sqrt{y}$ باید در معادله (۱) صدق کنند ،

را در معادله (۱) قرار می دهیم :

$$(\sqrt{y})^2 + 2(\sqrt{y})^2 - \sqrt{y} + 5 = 0$$

$$\sqrt{y}(1-y) = 5 + 2y \quad \text{و یا :}$$

با مجذور کردن دوطرف این معادله و منظم کردن آن بدست می آید :

$$y^2 - 6y^2 - 19y - 25 = 0$$

که معادله مطلوب است .

مثال ۳. اگر x_1, x_2, x_3, x_4 ریشه های معادله :

$$x^4 - 4x^2 + x + 3 = 0 \quad (1)$$

باشند ، مطلوب است محاسبه مجموع زیر :

$$S = \frac{1}{2x_1 - 1} + \frac{1}{2x_2 - 1} + \frac{1}{2x_3 - 1} + \frac{1}{2x_4 - 1}$$

حل. فرض می کنیم :

$$y_1 = \frac{1}{2x_1 - 1} ; y_2 = \frac{1}{2x_2 - 1} ;$$

$$y_3 = \frac{1}{2x_3 - 1} ; y_4 = \frac{1}{2x_4 - 1}$$

و معادله درجه چهارمی تشکیل می دهیم که ریشه های آن y_1, y_2, y_3, y_4

باشد ، داریم :

$$y = \frac{1}{2x - 1} \Rightarrow x = \frac{y + 1}{2y}$$

و در معادله (۱) قرار می دهیم :

$$\frac{(y+1)^4}{16y^4} - \frac{4(y+1)^2}{4y^2} + \frac{y+1}{2y} + 3 = 0$$

که پس از ساده کردن چنین می‌شود :

$$41y^4 - 20y^3 - 10y^2 + 4y + 1 = 0$$

مجموع مطلوب ، همان مجموع ریشه‌های این معادله است :

$$S = \frac{20}{41}$$

۱۸. ریشه‌های مشترك معادله‌ها

روشهای مورد نظر این بند را ضمن چند مثال ذکر می‌کنیم.

مثال ۱. چه رابطه‌ای بین q, p و q', p' برقرار باشد، تا دو معادله زیر يك ریشه مشترك داشته باشند و سپس معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن ریشه‌های غیر مشترك دو معادله باشد:

$$\begin{cases} x^2 + px + q = 0 \\ x^2 + p'x + q' = 0 \end{cases}$$

حل . ریشه‌های معادله اول را α و β و ریشه‌های معادله دوم را α' و β' فرض می‌کنیم . α ریشه مشترك دو معادله است و بنابراین باید در هر دو معادله صدق کند:

$$\begin{cases} \alpha^2 + p\alpha + q = 0 \\ \alpha^2 + p'\alpha + q' = 0 \end{cases}$$

از حذف α بین این دو رابطه ، شرط وجود ریشه مشترك بدست می‌آید، ابتدا دو رابطه را از هم کم می‌کنیم:

$$(p - p')\alpha + (q - q') = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{q' - q}{p - p'}$$

این مقدار α ، همان ریشه مشترك دو معادله است و بنابراین باید در هر يك از دو معادله صدق کند، در این صورت یکی از دو رابطه زیر بدست می‌آید:

$$(q - q')^2 + q(p - p')^2 = p(q - q')(p - p') ; \quad (۱)$$

$$(q - q')^2 + q'(p - p')^2 = p'(q - q')(p - p') ; \quad (۲)$$

که هر يك از این دو رابطه را می‌توان پس از تبدیل به صورت زیر در آورد :

$$(p-p')(p'q-pq')=(q-q')^2 \quad (3)$$

برای تشکیل معادله درجه دومی که ریشه‌های آن ریشه‌های غیرمشتراك دو معادله (یعنی β و β') باشد، می‌نویسیم:

$$\alpha \cdot \beta = q \Rightarrow \beta = \frac{q}{\alpha} = \frac{q(p-p')}{q'-q}$$

$$\alpha \cdot \beta' = q' \Rightarrow \beta' = \frac{q'}{\alpha} = \frac{q'(p-p')}{q'-q}$$

و از آنجا :

$$\begin{cases} \beta + \beta' = \frac{(p-p')(q+q')}{q'-q} \\ \beta \cdot \beta' = \frac{qq'(p-p')^2}{(q-q')^2} \end{cases}$$

و معادله درجه دوم مطلوب چنین می‌شود :

$$(q-q')^2 x^2 + (p-p')(q^2 - q'^2)x + qq'(p-p')^2 = 0$$

و چون شرط (۳) هم همراه این معادله است، اگر بجای $(q-q')^2$

مقدارش $(p-p')(p'q-pq')$ قرار دهیم ، بدست می‌آید :

$$(p'q-pq')x^2 + (q^2 - q'^2)x + qq'(p-p') = 0$$

که معادله مطلوب است.

نتیجه. شرط وجود يك ریشه مشترك بين دو معادله (از هر درجه‌ای

که باشند) با حذف مجهول بين دو معادله بدست می‌آید.

مثال ۲.۴ m را چنان پیدا کنید که یکی از ریشه‌های معادله

$$x^2 - x - m = 0$$

دو برابر یکی از ریشه‌های معادله زیر باشد :

$$x^2 - (m+2)x + 3 = 0 \quad (2)$$

حل. اگر یکی از ریشه‌های معادله (۲) را α بگیریم ، ریشه نظیرش

در معادله (۱) مساوی 2α می‌شود و بنابراین 2α در معادله (۱) و α در معادله

(۲) صدق می‌کند :

$$4\alpha^2 - 2\alpha - m = 0$$

$$\alpha^2 - (m+2)\alpha + 3 = 0$$

با حذف α بین این دو معادله، مقدار m بدست می‌آید.
 برای حذف α می‌توان α^2 و α را به‌عنوان دو مجهول فرض کرد و مثل دو معادله دو مجهولی عمل کرد:

$$\alpha^2 = \frac{m^2 + 2m + 6}{4m + 6} ; \alpha = \frac{m + 12}{4m + 6}$$

و بنابراین باید داشته باشیم:

$$\left(\frac{m+12}{4m+6} \right)^2 = \frac{m^2 + 2m + 6}{4m + 6}$$

که پس از ساده کردن به معادله درجه سوم زیر می‌رسیم:

$$4m^3 + 13m^2 + 12m - 108 = 0$$

این معادله به‌صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$(m-2)(4m^2 + 21m + 54) = 0$$

عبارت درجه دوم $4m^2 + 21m + 54$ دارای مبین منفی است و

بنابراین معادله تنها جواب حقیقی $m=2$ را قبول دارد.

جواب: $m=2$

مثال ۳. اولاً تعداد ریشه‌های مشترك دو معادله:

$$\begin{cases} 2x^4 - x^3 - 3x^2 + 1 = 0 \\ x^4 + x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0 \end{cases}$$

را پیدا کنید. ثانیاً هریک از دو معادله را حل کنید.

حل. در مواردی که تعداد ریشه‌های مشترك بیش از یکی باشد و یا

تعداد ریشه‌های مشترك معلوم نباشد، به‌قراست از روش پیدا کردن بزرگترین مقسوم علیه مشترك بین دو عبارت استفاده کنیم.

اگر بزرگترین مقسوم علیه مشترك بین دو عبارت $f(x)$ و $\varphi(x)$ ، عبارتی از

درجه n باشد به این معنی است که معادله‌های $f(x)=0$ و $\varphi(x)=0$ دارای

n ریشه مشترك هستند.

بزرگترین مقسوم علیه مشترک بین دو عبارت را می توان با روش تقسیمهای متوالی بدست آورد.

می دانیم که اگر در تقسیم A بر B به خارج قسمت Q و باقیمانده R برسیم ، داریم :

$$A = B \cdot Q + R$$

اگر A و B مشترکاً بر عاملی قابل قسمت باشند ، R هم بر همان عامل قابل قسمت خواهد بود و بزرگترین مقسوم علیه مشترک بین A و B همان بزرگترین مقسوم علیه مشترک بین R و B است. حالا اگر دوباره در تقسیم B بر R به باقیمانده R_1 برسیم، کافی است که بزرگترین مقسوم علیه مشترک بین R و R_1 را بدست آوریم و اگر این عمل تقسیمهای متوالی را ادامه دهیم تا به باقیمانده صفر برسیم ، آخرین مقسوم علیه، بزرگترین مقسوم علیه مشترک بین A و B خواهد بود.

در مورد دو عبارت جبری، در حالتی هم که آخرین مقسوم علیه عدد ثابتی باشد، گویند دو عبارت از لحاظ جبری نسبت به هم اولند، یعنی مشترکاً بزرگ عبارت جبری دیگر قابل قسمت نیستند .

به حل مسأله می پردازیم :

$$\text{ابتدا عبارت } A = 2x^4 - x^2 - 4x^2 + 1 \text{ را بر } :$$

$$B = x^4 + x^2 - 4x^2 - x + 1$$

تقسیم می کنیم، باقیمانده این تقسیم:

$$R = -3x^3 + 4x^2 + 2x - 1$$

می شود ، در تقسیم B بر R ، برای اینکه دچار ضریبهای کسری در خارج قسمت و باقیمانده نشویم $9B$ را بر R تقسیم می کنیم :

$$9B = 9x^4 + 9x^3 - 36x^2 - 9x + 9$$

$$R = -3x^3 + 4x^2 + 2x - 1$$

در این تقسیم به باقیمانده $R_1 = -2(x^2 - x - 1)$ می رسیم و با

تقسیم بعدی روشن می شود که $R = -3x^3 + 4x^2 + 2x - 1$ بر :

$$-\frac{1}{3}R = x^2 - x - 1$$

قابل قسمت است و بنابراین $x^2 - x - 1$ بزرگترین مقسوم علیه مشترك دو عبارت جبری A و B است.

بنابراین ریشه‌های مشترك دو معادله، همان ریشه‌های $x^2 - x - 1 = 0$ است، یعنی معادله‌ها دارای دو ریشه مشترك هستند و این ریشه‌های مشترك چنین‌اند:

$$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

برای حل هریک از معادله‌ها، دیگر می‌توان به سادگی آنها را تجزیه کرد و به صورت زیر در آورد:

$$\begin{cases} (x^2 - x - 1)(2x^2 + x - 1) = 0 \\ (x^2 - x - 1)(x^2 + 2x - 1) = 0 \end{cases}$$

چهار ریشه معادله اول:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}; x_3 = -1; x_4 = \frac{1}{2}$$

و چهار ریشه معادله دوم:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}; x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{2}$$

مثال ۴. مقدار m را چنان پیدا کنید که دو معادله:

$$\begin{cases} f(x) = 2x^4 - 7x^3 - 2x^2 + (7m - 2)x + 2 = 0 \\ \varphi(x) = x^4 - 7x^3 + 13x^2 - x - 6 = 0 \end{cases}$$

دارای سه ریشه مشترك باشند و سپس ریشه‌های هریک از دو معادله را بدست آورید.

حل. باید بزرگترین مقسوم علیه مشترك $f(x)$ و $\varphi(x)$ ، عبارتی از درجه سوم باشد.

در اولین تقسیم $f(x)$ بر $\varphi(x)$ به باقیمانده‌ای از درجه سوم نسبت x می‌رسیم: $R_1(x) = 7x^3 - 28x^2 + 7mx + 14$. حالا باید $\varphi(x)$ بر $R_1(x)$ و یا بر $x^3 - 4x^2 + mx + 2$ قابل قسمت باشد. در این تقسیم باقیمانده‌ای به صورت $(1-m)x^2 + 3(m-1)x$ بدست می‌آید،

پس:

$$(1-m)x^2 + 2(m-1)x \equiv 0 \Rightarrow m=1$$

به ازای $m=1$ بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عبارت $f(x)$ و $\varphi(x)$ ،

عبارت درجه سوم:

$$x^3 - 4x^2 + x + 2$$

می شود، یعنی معادله $f(x)=0$ و $\varphi(x)=0$ دارای سه ریشه مشترک می شوند.

به ازای این مقدار m دو معادله به صورت زیر در می آیند:

$$\begin{cases} f(x) = (x^3 - 4x^2 + x + 2)(x - 3) = 0 \\ \varphi(x) = (x^3 - 4x^2 + x + 2)(2x + 1) = 0 \end{cases}$$

و یا:

$$\begin{cases} (x-1)(x-3)(x^2-3x-2)=0 \\ (x-1)(2x+1)(x^2-3x-2)=0 \end{cases}$$

و دیگر پیدا کردن جوابها مشکل نیست.

۱۹. استقاده از رابطه های بین ریشه ها و ضریبها در حل دستگاهها

I. حل بعضی از دستگاههای خطی. به مثال زیر توجه کنید.

مثال: مطلوب است حل دستگاه زیر:

$$\begin{cases} (a-1)x - a(a-1)y - (a^2+1)z + a^3 = 0 \\ (b-1)x - b(b-1)y - (b^2+1)z + b^3 = 0 \\ (c-1)x - c(c-1)y - (c^2+1)z + c^3 = 0 \end{cases}$$

حل. معادلهای دستگاه را بترتیب نسبت به a, b, c منظم می کنیم:

$$\begin{cases} a^3 - (y+z)a^2 + (x+y)a - (x+z) = 0 \\ b^3 - (y+z)b^2 + (x+y)b - (x+z) = 0 \\ c^3 - (y+z)c^2 + (x+y)c - (x+z) = 0 \end{cases}$$

اگر معادله درجه سوم زیرا در نظر بگیریم:

$$u^2 - (y+z)u^2 + (x+y)u - (x+z) = 0 \quad (۱)$$

مقادیر a و b و c طبق معادله‌های فرض در (۱) صدق می‌کنند و بنابراین a و b و c ریشه‌های معادله (۱) هستند.

رابطه‌های بین ریشه‌ها و ضریبها را در معادله (۱) می‌نویسیم:

$$\begin{cases} y+z=a+b+c \\ x+y=ab+ac+bc \\ x+z=abc \end{cases} \quad (۲)$$

دستگاه (۲) به سادگی مقادیر x و y و z را بدست می‌دهد، از جمع معادله‌های دستگاه داریم:

$$x+y+z = \frac{1}{2}(a+b+c+ab+ac+bc+abc) \quad (۳)$$

و اگر به ترتیب هریک از معادله‌های دستگاه (۲) را از معادله (۳) کم کنیم، جوابهای x و y و z بدست می‌آید:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(ab+ac+bc+abc-a-b-c) \\ y = \frac{1}{2}(a+b+c+ab+ac+bc-abc) \\ z = \frac{1}{2}(a+b+c+abc-ab-ac-bc) \end{cases}$$

II. حل دستگاههای متقارن

تعریف. دستگاهی را نسبت به مجهولهای خود متقارن گوئیم که با تبدیل هر دو مجهول دلخواه آن به یکدیگر، تغییری در دستگاه حاصل نشود. مثلاً دستگاههای معادله‌های زیر، دستگاههایی متقارن هستند:

$$\begin{cases} x^2+y^2=\frac{4}{3} \\ x^2+y^2=-3 \end{cases} ; \begin{cases} x+y+z=2a \\ x^2+y^2+z^2=6a^2 \\ x^3+y^3+z^3=8a^3 \end{cases}$$

روش حل. برای حل يك دستگاه متقارن n مجهولی باید معادله‌ای از

درجه n تشکیل داد، به نحوی که ریشه‌های آن n مجهول دستگاه باشد. برای این منظور باید کوشش کرد تا آنچه را که برای تشکیل چنین معادله‌ای لازم است محاسبه نمود.

مثال ۱. مطلوب است حل دستگاه زیر :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{7}{3} \\ x^2 + y^3 = -3 \end{cases} \quad (1)$$

حل. اگر x و y را ریشه‌های يك معادله درجه دوم در نظر بگیریم ، برای تشکیل چنین معادله‌ای باید $x+y$ و xy را محاسبه کنیم. فرض می‌کنیم $x+y=S$ ، $x \cdot y=P$. در این صورت دستگاه (۱) به صورت زیر در می‌آید :

$$\begin{cases} S^2 - 2P = \frac{7}{3} \\ S^3 - 3PS = -3 \end{cases}$$

اگر P را از معادله اول دستگاه محاسبه و در معادله دوم دستگاه قرار دهیم ، به معادله زیر می‌رسیم :

$$S^3 - 7S - 6 = 0 \Rightarrow (S+1)(S+2)(S-3) = 0 ;$$

$$S = -1 ; -2 ; 3$$

و از آنجا خواهیم داشت :

$$\left| \begin{array}{l} S = -1 \\ P = -\frac{2}{3} \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} S = -2 \\ P = \frac{5}{6} \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} S = 3 \\ P = \frac{10}{3} \end{array} \right|$$

اگر $S = -1$ و $P = -\frac{2}{3}$ باشد ؛ x و y ریشه‌های معادله درجه

دوم زیر هستند :

$$t^2 + 2t - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{-2 \pm \sqrt{32}}{2}$$

و همچنین :

$$S = -2$$

$$P = \frac{5}{6} \Rightarrow 6u^2 + 12u + 5 = 0 \Rightarrow u = \frac{-6 \pm \sqrt{6}}{6}$$

$$S = 3$$

$$P = \frac{10}{3} \Rightarrow 3v^2 - 9v + 10 = 0 \quad (\text{ریشه‌های موهومی})$$

$$x_2 = \frac{-3 - \sqrt{33}}{6}$$

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{33}}{6}$$

جواب:

$$y_2 = \frac{-3 + \sqrt{33}}{6}$$

$$y_1 = \frac{-3 - \sqrt{33}}{6}$$

$$x_4 = \frac{-6 - \sqrt{6}}{6}$$

$$x_3 = \frac{-6 + \sqrt{6}}{6}$$

$$y_4 = \frac{-6 + \sqrt{6}}{6}$$

$$y_3 = \frac{-6 - \sqrt{6}}{6}$$

مثال ۲. این دستگاه را حل کنید :

$$\begin{cases} x+y+z=2a \\ x^2+y^2+z^2=6a^2 \\ x^3+y^3+z^3=8a^3 \end{cases} \quad (1)$$

حل. معادله درجه سوم می تشکیل می دهیم که ریشه‌های آن x, y, z باشند.

برای این منظور فرض می کنیم :

$$x+y+z=S ; xy+xz+yz=P ; xyz=Q$$

از معادله اول دستگاه داریم :

$$S=x+y+z=2a$$

و از معادله دوم دستگاه داریم :

$$(x+y+z)^2 - 2(xy+xz+yz) = 6a^2 \Rightarrow$$

$$4a^2 - 2P = 6a^2$$

و از آنجا :

$$P = xy + xz + yz = -a^2$$

و بالاخره معادله سوم دستگاه را می‌توان چنین نوشت:

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)+3xyz=8a^3:$$

$$2a(6a^2+a^2)+3Q=8a^3 \Rightarrow Q=xyz=-2a^3$$

بنابراین معادله درجه سوم که ریشه‌های آن x و y و z است، چنین

می‌شود:

$$t^3 - 2at^2 - a^2t + 2a^3 = 0$$

این معادله به صورت زیر قابل تجزیه است:

$$(t-a)(t+a)(t-2a)=0 \Rightarrow t=a, -a, 2a$$

از اینجا جوابهای x و y و z دستگاه چنین است:

$x=a$	$x=-a$
$y=-a$;	$y=a$;
$z=2a$	$z=2a$
$x=a$	$x=-a$
$y=2a$;	$y=2a$;
$z=-a$	$z=a$
$x=2a$	$x=2a$
$y=-a$;	$y=a$
$z=a$	$z=-a$

۲۰. دستگاههای متجانس نسبت به مجهولها

دستگاهی را نسبت به مجهولهای خود متجانس گوئیم که تمام جمله‌های شامل مجهول در آن از يك درجه باشند.
مثلا دستگاه:

$$\begin{cases} ax^2 + by^2 + cxy = d \\ a'x^2 + b'y^2 + c'xy = d' \end{cases} \quad (۱)$$

نسبت به x و y متجانس است، زیرا تمام جمله‌های شامل مجهول در آن، از درجه دوم‌اند.

روش حل. برای حل دستگاه متجانس، نسبت $\frac{y}{x}$ را مساوی λ می‌گیریم و در هر دو معادله دستگاه بجای y مقدار λx را قرار می‌دهیم. مثلاً اگر در دستگاه (۱) چنین کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} ax^2 + b\lambda^2 x^2 + c\lambda x^2 = d \\ a'\lambda^2 x^2 + b'\lambda^2 x^2 + c'\lambda x^2 = d' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2(a + b\lambda^2 + c\lambda) = d \\ x^2(a' + b'\lambda^2 + c'\lambda) = d' \end{cases}$$

از تقسیم دو معادله دستگاه بر یکدیگر، به معادله‌ای با مجهول λ می‌رسیم که از آنجا λ و سپس x و y بدست می‌آید.

مثال ۰۱. مطلوب است حل این دستگاه:

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 5y^2 = 7 \\ 3x^2 + xy - 2y^2 = 12 \end{cases}$$

حل. فرض می‌کنیم: $y = \lambda x$ و در دو معادله دستگاه قرار می‌دهیم،

می‌شود:

$$\begin{cases} x^2(2 - 3\lambda + 5\lambda^2) = 7 \\ x^2(3 + \lambda - 2\lambda^2) = 12 \end{cases} \Rightarrow \frac{2 - 3\lambda + 5\lambda^2}{3 + \lambda - 2\lambda^2} = \frac{7}{12};$$

و یا:

$$74\lambda^2 - 43\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \text{ و } \frac{3}{27}$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{2}{37} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{37}{2} \sqrt{\frac{7}{779}} \\ y = \pm \frac{3}{2} \sqrt{\frac{7}{779}} \end{cases}$$

مثال ۳. مطلوب است حل دستگاه زیر:

$$\begin{cases} x^2 + 2x^2y - y^2 = 3 \\ 2x^2 - xy^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

حل. با فرض $y = \lambda x$ داریم:

$$\begin{cases} x^2(1 + 2\lambda - \lambda^2) = 3 \\ x^2(2 - \lambda^2 + \lambda^2) = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{1 + 2\lambda - \lambda^2}{2 - \lambda^2 + \lambda^2} = \frac{3}{2};$$

و از آنجا:

$$5\lambda^2 - 3\lambda^2 - 6\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 1, \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{5}$$

به ازای $\lambda = 1$ بدست می آید: $x = y = 1$

$$\left| \begin{array}{l} x = \frac{5}{\sqrt{170} \mp \sqrt{21}} : \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{5} \\ y = \lambda x \end{array} \right. \text{ و به ازای}$$

۲۱. دستگاههای خطی همگن

به دستگاههایی، خطی همگن گوئیم که اولاً نسبت به مجهولهای خود از درجهٔ اول، ثانیاً فاقد مقدار ثابت باشند.
دستگاههای:

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ a'x + b'y = 0 \end{cases} ; \begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \\ a''x + b''y + c''z = 0 \end{cases} ; \dots$$

دستگاههای خطی همگن هستند.

دستگاههای همگن خطی، در حالت کلی جوابهای صفر را برای تمام

مجهولها قبول دارند و تنها در موردی که جوابها به صورت $\frac{0}{0}$ در آیند ، دستگاه به معادله یا دستگاه سیالی تبدیل می‌شود که جوابهایی غیر از صفر را هم می‌پذیرد.

مثال ۱. m را چنان پیدا کنید که دستگاه زیر جوابهایی غیر از صفر هم داشته باشد :

$$\begin{cases} (m-2)x + (m-1)y = 0 \\ mx + 2(2m-3)x = 0 \end{cases}$$

حل. در حالتی که داشته باشیم :

$$\frac{m-2}{m} \neq \frac{m-1}{2(2m-3)}$$

دستگاه ، تنها جوابهای $x=y=0$ را خواهد داشت ، ولی اگر داشته باشیم :

$$\frac{m-2}{m} = \frac{m-1}{2(2m-3)} \quad (1)$$

یعنی صفر جوابهای دیگری هم برای x و y بدست می‌آید .
از معادله (۱) نتیجه می‌شود :

$$3m^2 - 13m + 12 = 0 \Rightarrow m = 3, \frac{4}{3}$$

در حالت $m = 3$ ، دستگاه چنین می‌شود :

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow x + 2y = 0$$

یعنی جوابهای دستگاه ، جوابهای معادله سیال $x + 2y = 0$ است :

$$\left| \begin{array}{l} x = \text{عددی دلخواه} \\ y = -\frac{1}{2}x \end{array} \right| \quad \text{یا} \quad \left| \begin{array}{l} x = -2y \\ y = \text{عددی دلخواه} \end{array} \right|$$

و در حالت $m = \frac{4}{3}$ ، داریم :

$$\begin{cases} -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y = 0 \\ \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}y = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x - y = 0$$

$$\left| \begin{array}{l} x = \text{عدد دلخواه} \\ y = 2x \end{array} \right| \text{ یا } \left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}y \\ y = \text{عدد دلخواه} \end{array} \right|$$

مثال ۲. دستگاه زیر را حل و بحث کنید :

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = 0 \\ x + by + b^2z = 0 \\ x + cy + c^2z = 0 \end{cases}$$

حل. ابتدا معادله دوم و سپس معادله سوم را از معادله اول کم می‌کنیم،

می‌شود :

$$\begin{cases} (a-b)y + (a^2-b^2)z = 0 \\ (a-c)y + (a^2-c^2)z = 0 \end{cases}$$

I. اگر a, b, c سه عدد متمایز باشند یعنی $a \neq b, a \neq c, b \neq c$

داریم :

$$\begin{cases} y + (a+b)z = 0 \\ y + (a+c)z = 0 \end{cases} \Rightarrow (b-c)z = 0$$

و چون فرض کردیم $b \neq c$ ، می‌شود $z = 0$ و از آنجا x و y هم مساوی

صفر می‌شوند.

بنابراین در حالتی که a, b, c متمایز باشند :

$$x = y = z = 0$$

II. اگر از سه مقدار a, b, c ، تنها دو مقدار باهم برابر باشند

و مثلاً $a = b$ ، سه معادله به دو معادله زیر تبدیل می‌شوند :

$$\begin{cases} x+ay+a^2z=0 \\ x+cy+c^2z=0 \end{cases}$$

از تفاضل این دو معادله و با توجه به اینکه $a \neq c$ است بترتیب داریم:

$$(a-c)y+(a^2-c^2)z=0 \Rightarrow y+(a+c)z=0$$

$$\begin{cases} x=acz \\ y=-(a+c)z \\ z=\text{عددی دلخواه} \end{cases}$$

و یا حالت‌های دیگر.

III. اگر $a=b=c$ باشد، سه معادله دستگاه به یک معادله تبدیل

می‌شود:

$$x+ay+a^2z=0 \Rightarrow x=-a(y+az)$$

$$\begin{array}{|l} x=-a(y+az) \\ y=\text{عددی دلخواه} \\ z=\text{عددی دلخواه} \end{array} \quad \text{یا} \quad \begin{array}{|l} x=\text{عددی دلخواه} \\ y=-\frac{1}{a}(x+a^2z) \\ z=\text{عددی دلخواه} \end{array}$$

$$\begin{array}{|l} x=\text{عددی دلخواه} \\ y=\text{عددی دلخواه} \\ z=-\frac{1}{a^2}(x+ay) \end{array}$$

یا

تمرینها

این معادله‌ها را حل کنید:

$$(x-2)(x+1)(x+6)(x+9)+108=0 \quad .181$$

$$x^4+(x+\sqrt{2})^4=64 \quad .182$$

$$x^6+(x+2)^6=2 \quad .183$$

$$(x+3)^2+(x+5)^2=8 \quad .184$$

.۱۸۵

$$(x-2)(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)(x+8)+476=0$$

$$(\sqrt{x}+1)^2+(\sqrt{x}-2)^2=256 \quad .186$$

$$(x^2+3x+2)(x^2+7x+12)=120 \quad .187$$

$$x^4+2x^3+2x^2+x=42 \quad .188$$

$$x^4+6x^3+7x^2-6x=1 \quad .189$$

$$\frac{1}{a}\sqrt[n]{a+x}+\frac{1}{x}\sqrt[n]{a+x}=b\sqrt[n]{x} \quad .190$$

$$\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{b} \quad .191$$

$$(x^2+2x-12)^2=x^2(3x^2+2x-12) \quad .192$$

$$(2x^2-x-6)^2+2(2x^2+x-6)^2=4x^2 \quad .193$$

$$\frac{(x^2+1)^2}{x(x+1)^2}=\frac{9}{2} \quad .194$$

$$3x^4-20x^3+45x^2-40x+12=0 \quad .195$$

$$\sqrt[m]{(x+1)^2}-\sqrt[m]{(x-1)^2}+\sqrt[m]{x^2-1}=0 \quad .196$$

$$x^2-3abx+a^2+b^2=0 \quad .197$$

$$(a^2-a)^2(x^2-x+1)^2=(a^2-a+1)^2(x^2-x)^2 \quad .198$$

$$(x^2-16)(x-2)^2+9x^2=0 \quad .199$$

.۲۰۰

$$x^4-10x^3-2(a-11)x^2+2(5a+6)x+2a+a^2=0$$

$$x^2+2\sqrt{r}x^2+2x+\sqrt{r}-1=0 \quad .201$$

$$x^5-5x^2+5x-1=0 \quad .202$$

$$\frac{(x-a)^2+(x-a)(x-b)+(x-b)^2}{(x-a)^2-(x-a)(x-b)+(x-b)^2}=\frac{rc^2+1}{c^2+2} \quad .203$$

.۲۰۴

$$x^2-(3x^2-2x+1)x+(2x^2-5x^2+2x^2+6x-3)=0$$

$$x^2-7^2=(x+7)^2 \quad .205$$

$$9x^4-15x^3+28x^2-20x+16=0 \quad .206$$

$$8x^9 - 16x^8 + 2x^7 + 12x^6 + 3x^5 - 26x + 27 = 0 \quad .207$$

$$x^7 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^7 = 8 \quad .208$$

$$x^7(1+x)^7 + x^7 = 8(1+x)^7 \quad .209$$

$$(1+x^7)^7 = 4x(1-x^7) \quad .210$$

$$\sqrt{a+x} = a - \sqrt{x} \quad .211$$

$$\frac{1}{a}\sqrt{a+x} + \frac{1}{x}\sqrt{a+x} = \sqrt{x} \quad .212$$

$$\sqrt{x-1} + 6\sqrt{x-1} = 16 \quad .213$$

$$\sqrt[7]{x} + \sqrt[7]{2x-3} = \sqrt[7]{12(x-1)} \quad .214$$

$$\sqrt[7]{a-x} + \sqrt[7]{b-x} = \sqrt[7]{a+b-2x} \quad .215$$

$$\sqrt[7]{x} + 2\sqrt[7]{x^7} = 3 \quad .216$$

$$\sqrt{a+x} - \sqrt[7]{a+x} = 0 \quad .217$$

$$(9x+7)^7(3x+4)(x+1) = 9 \quad .218$$

$$\sqrt[5]{(7x-3)^7} + 8\sqrt[5]{(3-7x)^{-7}} = 7 \quad .219$$

$$\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}} = 1 \quad .220$$

$$\sqrt[5]{16+\sqrt{x}} + \sqrt[5]{16-\sqrt{x}} = 2 \quad .221$$

$$(a>0) \sqrt[n]{x^n + \frac{n+1}{\sqrt[n]{a^n x^{n+1}}}} + \sqrt[n]{a^n + \frac{n+1}{\sqrt[n]{x^n a^{n+1}}}} = b \quad .222$$

$$\sqrt[n]{a^k x^{n-k}} + \sqrt[n]{x^k a^{n-k}} = 2\sqrt[n]{bx} \quad .223$$

با شرطهای $b>a>0$ و $n>k>0$

$$\frac{\sqrt[n]{a-x}}{x^7} - \frac{\sqrt[n]{a-x}}{a^7} = \sqrt[n]{\frac{x^7}{a+x}} \quad .224$$

$$\sqrt[n]{\frac{\frac{n}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}}{\sqrt{x^r}}} - \sqrt[n]{\frac{\frac{n}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}}{\sqrt{a^r}}} = \sqrt[n]{x} \quad .225$$

$$2x^r - (2a-1)x^r + (a^r + a - 1)x + a + r = 0 \quad .226$$

$$[x] = \left[\frac{x^r - r}{r} \right] \quad .227$$

$$x^r + 2x^r - 1x + a = 0 \quad .228$$

$$.229$$

$$|x-2| \cdot |x+3| \cdot |x+6| = |x+1| \cdot |x+4| \cdot |x+9|$$

$$x^r - (a+2)x + \sqrt{a+1} = 0 \quad .230$$

$$\sqrt{p+x} + \sqrt{p-x} = x \quad (p > 0) \quad .231$$

$$\frac{(x+a+b)^{\Delta} + (x+c+d)^{\Delta}}{(x+a+c)^{\Delta} + (x+b+d)^{\Delta}} = \frac{(a+b-c-d)^{\Delta}}{(a-b+c-d)^{\Delta}} \quad .232$$

(با شرط $a+c \neq b+d$)

$$\frac{rx+ry}{2x} = \left[\frac{x^r+y^r}{x^r} \right] \quad .233$$

$$\left[\frac{rx+\Delta}{\lambda} \right] = \frac{\lambda\Delta x - r}{\Delta} \quad .234$$

$$(x-1)^r + (x-2)^r + \dots + (x-n)^r = 0 \quad .235$$

$$x^r - 2\sqrt{r}x^r - x + 2 - \sqrt{r} = 0 \quad .236$$

$$x^r - (\sqrt{r}+1)x^r + 2 = 0 \quad .237$$

$$2x^r + x + \sqrt{r} = 0 \quad .238$$

$$x^r - 2\sqrt{r}x^r + x + r - \sqrt{r} = 0 \quad .239$$

$$r + \sqrt{r} + \sqrt{x} = x \quad .240$$

$$\sqrt{\sqrt{\Delta} + \sqrt{\sqrt{\Delta} + x}} = x \quad .241$$

$$\sin^r x + \frac{1}{r} \sin^r rx = \sin x \sin^r rx \quad .242$$

$$(x+1)^r + (x+2)^r + (x+3)^r = r \quad .243$$

$$x^f - \gamma ax^{\gamma} + x + a^{\gamma} - a = 0 \quad .244$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} + \frac{1}{x+a+b} = 0 \quad .245$$

$$.246$$

$$(x+b+c)(x+c+a)(x+a+b)(a+b+c) - abcx = 0 \quad .247$$

$$\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+\gamma a} + \frac{1}{x+\gamma a} + \frac{1}{x+\gamma a} + \frac{1}{x+\delta a} + \frac{1}{x+\gamma a} = 0$$

$$y^{\gamma} + \gamma by^{\gamma} + (p^{\gamma} + \gamma)y + \gamma p = 0 \quad .248$$

$$\frac{(a-x)^f + (x-b)^f}{(a-x)^{\gamma} + (x-b)^{\gamma}} = \frac{a^{\gamma} + b^{\gamma}}{a^{\gamma} + b^{\gamma}} \quad .249$$

$$x^{\gamma} - (\gamma a^{\gamma} + \gamma)x^{\gamma} + \gamma a^{\gamma}(a^{\gamma} + \gamma)x - \gamma(a^{\gamma} - 1) = 0 \quad .250$$

$$(x+a)^{\delta} - (x+b)^{\delta} = c^{\delta} \quad .251$$

$$x^{\gamma} + a^{\gamma} + b^{\gamma} = (x+a+b)^{\gamma} \quad .252$$

$$\sqrt[\delta]{a} + \sqrt[\delta]{x} + \sqrt[\delta]{a} - \sqrt[\delta]{x} = \sqrt[\delta]{\gamma a} \quad .253$$

$$\sqrt[\gamma]{a-x} + \sqrt[\gamma]{b-x} = \sqrt[\gamma]{a+b-\gamma x} \quad .254$$

$$.255$$

$$\sqrt{\gamma x^{\gamma} - 1} + \sqrt{x^{\gamma} - \gamma x - \gamma} = \sqrt{\gamma x^{\gamma} + \gamma x + \gamma} + \sqrt{x^{\gamma} - x + \gamma}$$

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = \quad .256$$

$$(x+1)^{\gamma} + (x+2)^{\gamma} + (x+3)^{\gamma} + (x+4)^{\gamma}$$

$$\sqrt{\gamma(1+x^{\gamma})} + \gamma(x-1) = \gamma a \sqrt{x} \quad :257$$

$$(x^{\gamma} + a^{\gamma})(x - \gamma a)^{\gamma} = \gamma a^{\gamma} (a \neq 0) \quad .258$$

$$x^f + \gamma x^{\gamma} - x - a = 0 \quad .259$$

$$\gamma \sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} - \gamma = 0 \quad .260$$

$$\gamma x - \sqrt{\gamma - \gamma x - \gamma} = 0 \quad .261$$

$$\gamma \sqrt{x+\gamma} - \sqrt{\gamma-x} - \gamma = 0 \quad .262$$

$$2\sqrt{x-1} + \sqrt{x-1} = 0 \quad .263$$

$$\sqrt{x-1} + 2\sqrt{2x+2} - \sqrt{3-x} = 4 \quad .264$$

$$\sqrt{2x-1} + \sqrt{x-2} - \sqrt{x+1} = 0 \quad .265$$

$$x^2 - (2a+1)x^2 + a^2(x+1) = 0 \quad .266$$

$$x^2 - 2(a-2)x^2 + (a^2 - 6a + 3)x + 2a(a-1) = 0 \quad .267$$

$$.268$$

$$a^2x^2 - a(2a^2 - a + 2)x^2 - 2a^2x + (a^2 + 1)(a-1)^2 = 0$$

$$.269$$

$$4x^2 + 12x^2 + (4a+9)x^2 + 2(2a+1)x + a(a+2) = 0$$

$$2a^2x^2 - 2a(2a^2+1)x^2 + (4a^2+9a^2+1)x^2 - \quad .270$$

$$- 2a(2a^2+1)x + 2a^2 = 0$$

$$6x^2 - 5x^2 - 22x^2 - 10x^2 - 22x^2 - 5x + 6 = 0 \quad .271$$

$$.272$$

$$10a^6 - 19a^5 + 11a^4 - 18a^3 + 11a^2 - 19a + 10 = 0$$

$$.273 \quad \text{چه رابطه‌ای بین } a \text{ و } b \text{ و } c \text{ برقرار باشد، تا ریشه‌های معادله:}$$

$$x^2 + ax^2 + bx + c = 0$$

به تصاعد حسابی باشند؟

$$.274 \quad \text{اگر یکی از ریشه‌های معادله:}$$

$$4x^2 - 24x^2 + 57x^2 + 18x - 45 = 0$$

$$\text{برابر } 3 + i\sqrt{6} \text{ باشد، ریشه‌های دیگر آنرا بدست آورید } (i = \sqrt{-1}).$$

$$.275 \quad \text{ثابت کنید که اگر } p^2 < 3q \text{ باشد، معادله:}$$

$$x^2 + px^2 + qx + r = 0$$

فقط يك ریشه حقیقی دارد.

$$.276 \quad \text{ثابت کنید که معادله } x^n = x + n \text{ وقتی } n \text{ عددی صحیح و مثبت باشد،}$$

همیشه جوابی بین ۱ و ۲ دارد و وقتی n بزرگ شود، این ریشه کوچک

می‌شود و حد آن واحد است.

۲۷۷. ثابت کنید که معادله زیر ریشه حقیقی ندارد :

$$x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24 = 0$$

۲۷۸. مطلوب است مساحت مثلثی که ارتفاعهای آن ریشههای معادله زیر باشند:

$$x^2 - kx^2 + px - z = 0$$

۲۷۹. معادله $x^3 + px + q = 0$ مفروض است. ثابت کنید که اگر

$p^3 + q^2$ بر ۲۳ قابل قسمت باشد، تفاضل دو ریشه معادله هم مضربی از ۲۳ است.

۲۸۰. ثابت کنید که اگر یکی از معادلههای $ax^2 + bx + c = 0$ یا

$a'x^2 + b'x + c' = 0$ ریشههای موهومی داشته باشند، ریشههای معادله زیر حقیقی است:

$$(ab' - ba')z^2 + 2(ac' - ca')z + (bc' - cb') = 0$$

۲۸۱. اگر $0 < \alpha < 1$ و $0 < \beta < 1$ و $b > 0$ و $a > 0$ باشد، ثابت کنید معادله زیر ریشه حقیقی ندارد :

$$P(x) = x^4 - 2\alpha ax^3 + a^2x^2 + 2ab\beta x + b^2 = 0$$

۲۸۲. ثابت کنید شرط لازم و کافی برای اینکه معادله :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

با ضریبهای حقیقی، ریشه موهومی خالص داشته باشد، این است که داشته باشیم:

$$ad = bc \text{ و } ac > 0$$

۲۸۳. ثابت کنید که تابع $f(x) = a^x - b^x$ ($a > b > 1$) برای عددهای

غیرمنفی x ، تابعی است صعودی و با توجه به این خاصیت معادله $\Delta x - 2x = 21$ را حل کنید.

۲۸۴. حدی را پیدا کنید که ریشه مثبت معادله زیر وقتی $n \rightarrow \infty$ ، به سمت آن میل می کند:

$$x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x = 1$$

۲۸۵. ثابت کنید عکس ریشههای معادله $x^2 - x + 1 = 0$ در معادله $x^5 + x + 1 = 0$ صدق می کنند.

۲۸۶. a را چنان پیدا کنید که معادله زیر به يك معادله دو مجذوری تبدیل شود :

$$x^4 - 8x^3 + 21x^2 + ax + 6 = 0$$

و سپس آنرا حل کنید :

۲۸۷. اگر بدانیم یکی از ریشه‌های معادله زیر دو برابر ریشه دیگری از آن است ، معادله را حل کنید :

$$x^3 + 21x^2 + 140x - 300 = 0$$

۲۸۸. اگر α و β و γ ریشه‌های معادله $x^3 + px + q = 0$ باشد ، محاسبه کنید :

$$S = \frac{m\alpha + n}{m\alpha - n} + \frac{m\beta + n}{m\beta - n} + \frac{m\gamma + n}{m\gamma - n}$$

۲۸۹. شرط وجود يك ریشه مشترك را بين معادله‌های زیر پیدا کنید:

$$x^3 + px + q = 0$$

$$x^3 + p_1x + q_1 = 0$$

۲۹۰. اگر x_1 و x_2 و x_3 ریشه‌های معادله $x^3 - x + 1 = 0$ باشد ، مطلوب است محاسبه:

$$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$$

۲۹۱. ثابت کنید که تفاضل ریشه کوچکتر از مجذور ریشه متوسط در معادله زیر برابر است با ۲ :

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

۲۹۲. ریشه‌های مشترك معادله‌های زیر را پیدا کنید :

$$\begin{cases} x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x - 3 = 0 \\ x^4 + x^3 - 5x^2 - 7x - 2 = 0 \end{cases}$$

۲۹۳. معادله‌ای با ضریبهای گویا پیدا کنید که یکی از ریشه‌های آن :

$$\alpha^4 + \alpha^6 + \alpha^7 + \alpha^9$$

باشد . به شرطی که α یکی از ریشه‌های معادله $\alpha^{12} - 1 = 0$ است .

۲۹۴. معادله‌ای تشکیل دهید که ریشه‌های آن توان چهارم ریشه‌های این معادله باشد :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

۲۹۵. مطلوب است زاویه‌های مثلث متساوی الساقینی با قاعده a و ساق b ، به شرطی

که داشته باشیم:

$$a^2 - 3ab^2 + b^2\sqrt{3} = 0$$

۲۹۶. اگر x_1 و x_2 و x_3 ریشه‌های معادله $x^3 - 1 = 0$ باشند، ثابت کنید:

$$x_1^n + x_2^n + x_3^n = x_1^n x_2^n + x_1^n x_3^n + x_2^n x_3^n$$

۲۹۷. مقادیر حقیقی a و b و p و q را چنان پیدا کنید که تساوی زیر به اتحاد تبدیل شود:

$$(2x-1)^{20} - (ax+b)^{20} = (x^2+px+q)^{10}$$

۲۹۸. معادله درجه سومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن چنین باشد:

$$\cos \frac{5\pi}{7}, \cos \frac{3\pi}{7}, \cos \frac{\pi}{7}$$

۲۹۹. λ را بین رابطه‌های زیر حذف کنید:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{1+\lambda^2} [\lambda^2 p_1 + (p_2 - q_2)\lambda + q_1] \\ x = \frac{1}{1+\lambda^2} [\lambda^2 q_2 + (p_1 - q_1)\lambda + p_2] \end{cases}$$

۳۰۰. معادله درجه چهارمی تشکیل دهید که ریشه‌هایش مجذور ریشه‌های معادله زیر باشد:

$$x^4 + 2x^3 + x^2 - 3x + 5 = 0$$

۳۰۱. اگر x_1 و x_2 و x_3 ریشه‌های معادله:

$$x^3 - 3x^2 - x - 7 = 0$$

باشند، مطلوب است محاسبه عبارت زیر:

$$S = \frac{1}{x_1^2 - 1} + \frac{1}{x_2^2 - 1} + \frac{1}{x_3^2 - 1}$$

۳۰۲. اگر α و β و γ و ... و λ ریشه‌های معادله $x^n - 1 = 0$ باشند، مطلوب است محاسبه:

$$P = (1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma) \dots (1 - \lambda)$$

۳۰۳. اگر x_1 و x_2 و ... و x_n ریشه‌های معادله:

$$x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 = 0$$

باشند ، مطلوب است محاسبه حاصل عبارت زیر :

$$0 = \frac{1}{x_1 - 1} + \frac{1}{x_2 - 1} + \dots + \frac{1}{x_n - 1}$$

۳۰۴. a را طوری پیدا کنید که حاصل ضرب دو ریشه از معادله :

$$x^4 - ax^3 + 23x^2 + ax - 168 = 0$$

برابر ۱۲ باشد و سپس معادله را حل کنید .

۳۰۵. a را طوری پیدا کنید که معادله $x^4 - 4x^2 + 4ax - a = 0$ ریشه

مضاعف داشته باشد.

و سپس معادله را حل کنید.

۳۰۶. اگر داشته باشیم:

$$f(x) = 16x^4 - 32x^3 - 56x^2 + 72x + 72$$

اولا $f(1-x)$ را پیدا کنید . ثانیاً $f(x) = 0$ را حل کنید.

۳۰۷. m را طوری پیدا کنید که در معادله :

$$x^4 - 8x^3 + mx^2 - 8x - 3 = 0$$

مجموع دوریشه با مجموع دو ریشه دیگر آن مساوی باشد و سپس معادله را

حل کنید .

۳۰۸. اضلاع مثلثی ریشه‌های معادله زیر هستند:

$$x^3 - 12x^2 + 47x - 60 = 0$$

بدون حل معادله ، مساحت مثلث را بدست آورید.

۳۰۹. مجموع توانهای یازدهم ریشه‌های معادله زیر را پیدا کنید :

$$x^3 + x + 1 = 0$$

۳۱۰. ثابت کنید که اگر عدد سه رقمی $\overline{abc}$ اول باشد ، ریشه‌های معادله

$$ax^2 + bx + c = 0$$

عددهایی گنگ هستند.

۳۱۱. ثابت کنید مجموع توانهای سوم ریشه‌های معادله $x^3 + px + q = 0$

با ضریبهای صحیح ، عدد صحیحی است قابل قسمت بر ۳.

۳۱۲. به ازای چه مقادیری از n ، مجموع

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2$$

بر ۱۰ قابل قسمت است (n عددی طبیعی است).

۳۱۳. اگر $a^2 + a + 1 = 0$ باشد، مجموع $\frac{1}{a^{1967}} + a^{1967}$ را محاسبه کنید.

۳۱۴. ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ را x_1 و x_2 و ریشه‌های معادله $a'x^2 + b'x + c' = 0$ را x'_1 و x'_2 می‌گیریم. بدون حل این معادله‌ها، دو معادله درجه دوم تشکیل دهید که ریشه‌های آنها بترتیب $x_1 + x'_1$ و $x_2 + x'_2$ باشد.

دستگاههای زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x + xy + y = 11 \\ xy^2 + x^2y = 30 \end{cases} \quad .316 \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 2(xy + 2) \\ x + y = 6 \end{cases} \quad .315$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 7 \\ xy(x + y) = -2 \end{cases} \quad .318 \quad \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7 \\ x^2 + y^2 = 35 \end{cases} \quad .317$$

$$(b \neq 0 \text{ و } a \neq 0) \quad \begin{cases} x^4 + y^4 = a^4 \\ x + y = b \end{cases} \quad .319$$

$$\begin{cases} x^5 + y^5 = a^5 \\ x + y = a \end{cases} \quad .320$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ xyz = 2 \end{cases} \quad .321$$

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3 \end{cases} \quad .322$$

$$\begin{cases} x - ay - a^{\gamma}z - a^{\gamma}t = a^{\epsilon} \\ x - by - b^{\gamma}z - b^{\gamma}t = b^{\epsilon} \\ x - cy - c^{\gamma}z - c^{\gamma}t = c^{\epsilon} \\ x - dy - d^{\gamma}z - d^{\gamma}t = d^{\epsilon} \end{cases} \quad .۳۲۳$$

$$\begin{cases} x \sin a + y \sin^{\gamma} a + z \sin^{\gamma} a = \sin^{\epsilon} a \\ x \sin b + y \sin^{\gamma} b + z \sin^{\gamma} b = \sin^{\epsilon} b \\ x \sin c + y \sin^{\gamma} c + z \sin^{\gamma} c = \sin^{\epsilon} c \end{cases} \quad .۳۲۴$$

$$\begin{cases} \frac{x^{\gamma}}{a^{\gamma}} + \frac{xy}{ab} + \frac{y^{\gamma}}{b^{\gamma}} = \gamma \\ b^{\gamma}x^{\gamma} + xy - a^{\gamma}y^{\gamma} = ab \end{cases} \quad .۳۲۵$$

۳۲۶. ثابت کنید که اگر اضلاع يك مثلث در رابطه‌های زیر صدق کنند:

$$\begin{cases} a^{\epsilon} = b^{\epsilon} + c^{\epsilon} - b^{\gamma}c^{\gamma} \\ b^{\epsilon} = c^{\epsilon} + a^{\epsilon} - c^{\gamma}a^{\gamma} \end{cases} ;$$

در رابطه زیر هم صدق می‌کنند:

$$c^{\epsilon} = a^{\epsilon} + b^{\epsilon} - a^{\gamma}b^{\gamma}$$

$$\begin{cases} x + y + z = ۹ \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \quad (x, y, z \neq 0) \\ xy + yz + xz = ۲۷ \end{cases} \quad .۳۲۷$$

$$\begin{cases} x^{\gamma} + y^{\gamma} + xy = ۳۷ \\ x^{\gamma} + z^{\gamma} + xz = ۲۸ \\ y^{\gamma} + z^{\gamma} + yz = ۱۹ \end{cases} \quad .۳۲۸$$

$$\begin{cases} x + y + z = ۶ \\ x^{\gamma} + y^{\gamma} + z^{\gamma} = ۱۸ \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = ۴ \end{cases} \quad .۳۲۹$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + \Delta x + 2y - 3} + \sqrt{x^2 + x + y + 2} = \\ \quad = \sqrt{x^2 + 4x + 3y - 2} + \sqrt{x^2 + 2y + 3} \\ x^{x-y} = 2y - 1 \end{cases} \quad .330$$

$$\begin{cases} x^2 = ax + by & .332 \\ y^2 = bx + ay \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{2yz}{y^2 + z^2} \\ y = \frac{2xz}{x^2 + z^2} \\ z = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \end{cases} \quad .331$$

$$\begin{cases} \sqrt[4]{1 + \Delta x} + \sqrt[4]{6 - y} = 3 \\ \Delta x - y = 18 \end{cases} \quad .333$$

$$\begin{cases} ax - cy + bz = x^2 + z^2 \\ -bx + ay + cz = y^2 + z^2 \\ cx + by - az = x^2 + y^2 \end{cases} \quad .335 \quad \begin{cases} x = y^2 - y \\ y = 2x - x^2 \end{cases} \quad .334$$

.336 x و y را بین معادله‌های دستگاه زیر حذف کنید :

$$\begin{cases} x + y = p + qxy \\ 2x = s + tx^2 \\ 2y = s + ty^2 \end{cases}$$

.337 شرط توافق دستگاه‌ها را پیدا کنید :

$$x + y = a ; x^2 + y^2 = b ; x^3 + y^3 = c$$

.338 شرط توافق را در دستگاه زیر پیدا کنید :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \\ a''x + b''y + c'' = 0 \end{cases}$$

.339 با توجه به رابطه‌های زیر نسبت $x : y : z$ را پیدا کنید :

$$\begin{cases} ax+by+cz \approx 0 \\ a'x+b'y+c'z = 0 \end{cases}$$

۳۴۰. ثابت کنید اگر a و b و c ضرایب يك مثلث باشند $\sqrt[n]{a}$ و $\sqrt[n]{b}$ و $\sqrt[n]{c}$ هم می‌توانند ضرایب يك مثلث باشند.

۳۴۱. مطلوب است محاسبه $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ بشرطی که داشته باشیم:

$$p = \left(\log N^{p-r} \right)^{\frac{1}{r}} ; q = \left(\log N^{q-r} \right)^{\frac{1}{r}} ; r = \left(\log N^{r-r} \right)^{\frac{1}{r}}$$

۷

معادله‌های سیال

در برنامه دبیرستانی و حتی در برنامه به اصطلاح «حساب استدلالی» در باره معادله‌های سیال سکوت شده است، در حالی که در بسیاری از مسأله‌های جبرمحتاج به حل معادله‌های سیال هستیم. از لحاظ تاریخی هم گویا از زمان دیوفانت اینگونه مسأله‌ها مطرح بوده است و به همین مناسبت به آنها «معادله‌های دیوفانتی» هم می‌گویند.

به این مناسبت‌ها بحث در مورد معادله‌های سیال ضروری بنظر می‌رسد، اگر چه، بجز در مورد معادله‌های سیال درجه اول دو مجهولی و یا بعضی نوعهای دیگر، نمی‌توان راه حلهای کلی ذکر کرد و ذوق و ابتکار دانش‌آموز بیش از هر قاعده‌ای می‌تواند وسیله‌ای برای حل این معادله‌ها باشد.

معادله‌های سیال درجه اول

۱. توضیح مقدماتی: می‌دانیم که اگر در مورد معادله‌های درجه اول ، تعداد معادله‌ها کمتر از تعداد مجهولها باشد ، دستگاه دارای بینهایت جواب خواهد بود . چنین معادله‌ها یا دستگاهها را سیال گویند . در عمل ، اغلب به مواردی بر می‌خوریم که معادله‌ای یادو مجهول در جلو ما است ، صورت کلی این معادله‌ها چنین است :

$$ax + by = c$$

که در آن x و y مجهولها و a و b و c ضرایبهای مفروضی هستند . اغلب شرطهای مسأله طوری است که در چنین معادله‌هایی تنها به جوابهای صحیح و یا حتی تنها به جوابهای صحیح و مثبت احتیاج داریم . مثال ۱. عدد ۱۱۸ را به دو عدد تبدیل کنید که یکی از آنها بر ۱۱ و دیگری بر ۱۷ قابل قسمت باشد .

اگر یکی از دو عدد را $11x$ و دیگری را $17y$ فرض کنیم باید داشته باشیم :

$$11x + 17y = 118$$

و چون در مسأله ذکرى از علامت جوابها نشده است ، می‌توانیم جوابهای منفی را هم قبول کنیم . به عنوان نمونه عددهای ۸۵ و ۳۳ (به ازای $x=3$ و $y=5$) و یا عددهای ۲۲۰ و ۱۰۲ - (به ازای $x=20$ و $y=-6$) و یا عددهای ۱۵۴ - و ۲۷۲ (به ازای $x=-14$ و $y=16$) و غیره در شرطهای مسأله صدق می‌کنند .

مثال ۲. برای بسته‌بندی يك نوع گلدان بلوری دو نوع جعبه داریم . در جعبه کوچکتر ۴ گلدان و در جعبه بزرگتر ۷ گلدان می‌توان جا داد . اگر بخواهیم يك سفارش ۴۱ گلدانی را بسته‌بندی کنیم ، چند جعبه از هر نوع لازم است ؟

اگر تعداد جعبه‌های کوچک را x و تعداد جعبه‌های بزرگ را y فرض کنیم، معادله زیر را خواهیم داشت:

$$4x + 7y = 41$$

روشن است که در اینجا تنها جوابهای صحیح و مثبت مورد احتیاج است و این معادله تنها يك جواب $x = 5$ و $y = 3$ را قبول دارد.

بنابراین باید راهی برای پیدا کردن جوابهای صحیح و در حالت خاص جوابهای صحیح و مثبت معادله‌های سیال پیدا کنیم.

در حقیقت از شرط صحیح بودن ریشه‌ها (و یا صحیح و مثبت بودن آنها) باید استفاده کرد و راهی برای جستجوی جوابها (و یا رابطه‌ای که معرف صورت کلی جوابها باشد) بدست آورد.

۲. معادله‌هایی که جواب صحیح ندارند

معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$ax + by = c$$

اگر در بین ضریبهای این معادله، عددهای کسری وجود داشته باشد، می‌توان آنها را به يك مخرج تحويل، سپس از مخرجها صرفنظر کرد. به این ترتیب می‌توان همیشه ضریبها را عددهایی صحیح در نظر گرفت.

همچنین اگر ضریبها، مقسوم علیه مشترکی غیر از واحد داشته باشند، می‌توان دوطرف معادله را بر بزرگترین مقسوم علیه مشترک ضریبها تقسیم کرد و در نتیجه ضریبها را نسبت به هم اول به حساب آورد.

حالا فرض می‌کنیم که $b \nmid a$ بزرگترین مقسوم علیه مشترکی غیر از واحد داشته باشند، مثلاً داشته باشیم:

$$a = ma_1 \quad ; \quad b = mb_1$$

در این صورت معادله به صورت زیر در می‌آید:

$$ma_1x + mb_1y = c$$

و اگر دوطرف تساوی را بر m تقسیم کنیم:

$$a_1x + b_1y = \frac{c}{m}$$

سمت چپ این تساوی به ازای هر مقدار صحیحی از x و y عددی است صحیح، در حالی که طبق فرض c بر m قابل قسمت نیست و سمت راست تساوی عددی است غیر صحیح، یعنی این تساوی ممکن نیست و بنابراین:

اگر ضریبهای مجهولهای يك معادله سیال درجه اول مقسوم علیه مشترکی مخالف واحد داشته باشند (که مقسوم علیه مقدار ثابت معادله نباشد)، در این صورت معادله نمی تواند دارای جوابهای صحیح باشد.

به همین مناسبت در تمام مواردی که بعد از این از معادله $ax + by = c$ صحبت می کنیم، فرض را بر این می گیریم که a و b نسبت به هم اول هستند.

۳. معادله‌هایی که جواب مثبت ندارند

اگر در معادله $ax + by = c$ ، ضریبهای a و b مثبت و عدد معلوم c منفی باشد، به ازای تمام مقادیر مثبت x و y ، سمت چپ تساوی مثبت و سمت راست آن منفی می شود و معادله جواب مثبت ندارد.

و اگر ضریبهای a و b منفی و مقدار ثابت c مثبت باشد، با ضرب دو طرف معادله در -۱ — به همان حالت قبل می رسیم و بنابراین:

اگر ضریبهای مجهولهای يك معادله سیال علامتی مخالف با علامت مقدار ثابت معادله داشته باشند، معادله نمی تواند جواب مثبت داشته باشد.

۴. رابطه کلی جوابهای معادله سیال

فرض کنیم به طریقی (و مثلاً جستجو) یکی از جوابهای صحیح معادله سیال $ax + by = c$ را بدست آورده باشیم. این جواب را $x = \alpha$ و $y = \beta$ فرض کنید، اگر بجای x و y مقادیر جواب را در معادله قرار دهیم، اتحاد زیر بدست می آید:

$$a\alpha + b\beta = c$$

و اگر این اتحاد را از معادله مفروض کم کنیم، خواهیم داشت :

$$a(x - \alpha) + b(y - \beta) = 0$$

و از آنجا :

$$ax = a\alpha - b(y - \beta) \Rightarrow x = \alpha - \frac{b}{a}(y - \beta)$$

برای اینکه x عددی صحیح باشد، لازم و کافی است که کسر $\frac{b}{a}(y - \beta)$ عددی صحیح باشد (زیرا α عددی است صحیح). به عبارت دیگر لازم و کافی است که عبارت $b(y - \beta)$ بر a قابل قسمت باشد. ولی b نسبت به a اول است، بنابراین لازم است (و ضمناً کافی است) که $y - \beta$ بر a قابل قسمت باشد. اگر خارج قسمت $y - \beta$ بر a را t فرض کنیم (t می تواند مثبت یا منفی باشد) بدست می آید :

$$\frac{y - \beta}{a} = t \Rightarrow y = \beta + at$$

و اگر در رابطه x بجای $\frac{y - \beta}{a}$ مقدارش t را قرار دهیم، خواهیم

داشت :

$$x = \alpha - bt$$

بنابراین برای جوابهای معادله سیال رابطه های زیر بدست می آید :

$$x = \alpha - bt ; y = \beta + at$$

اگر در این رابطه ها بجای t ، عددهای صحیح دلخواهی (مثبت یا منفی) قرار دهیم، جوابهای معادله سیال (که تعداد آنها بی نهایت است) بدست می آید. بخصوص به ازای $t = 0$ جوابهای $x = \alpha$ و $y = \beta$ بدست می آید که از قبل برای ما معلوم بود.

با کمی دقت در رابطه هایی که بدست آمده است، روشن می شود که طبق قاعده زیر تنظیم شده اند:

۱. جمله اول رابطه، جواب خاصی است که برای آن مجهول پیدا

کرده ایم.

۲. جمله دوم رابطه، عبارت است از حاصل ضرب عدد صحیح t در یکی

از ضریبهای مجهول معادله مفروض، منتهی برای x از ضریب y و برای y از ضریب x استفاده می‌کنیم.

۳. یکی از ضریبهای دو مجهول را با علامت قرینه آن انتخاب می‌کنیم. به سادگی می‌توان توجه کرد که انتخاب علامت قرینه برای این و یا آن ضریب فرقی ندارد. در حقیقت دو دستگاه رابطه‌های:

$$\begin{cases} x = \alpha - bt \\ y = \beta + at \end{cases} ; \begin{cases} x = \alpha + bt \\ y = \beta - at \end{cases}$$

با هم معادل‌اند، فقط جوابهایی که از دستگاه اول به ازای مقادیری از t بدست می‌آید، از دستگاه دوم به ازای قرینه آن مقادیر بدست خواهد آمد و برعکس.

مثال ۰ می‌خواهیم جوابهای صحیح معادله $3x + 5y = 26$ را بدست آوریم.

با توجه مختصری دیده می‌شود که $x = 2$ و $y = 4$ در معادله صدق می‌کند و بنابراین تمام جوابهای معادله از رابطه‌های زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 4 - 3t \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 4 + 3t \end{cases}$$

اگر در این رابطه‌ها بجای t عددهای صحیح دلخواهی قرار دهیم، جوابهای صحیح معادله مفروض بدست می‌آید. مثلاً با استفاده از رابطه‌های اول داریم:

t	۰	۱	۲	۳	-۱	-۲	...
x	۲	۷	۱۲	۱۷	-۳	-۸	...
y	۴	۱	-۲	-۵	۷	۱۰	...

و اگر از رابطه‌های دوم هم استفاده می‌کردیم، همین جوابها به ازای $۱۰۰، -۲، -۳، ۱، ۲$ و غیره بدست می‌آمد.

به این ترتیب حل معادله سیال درجه اول به اینجا منجر می شود که بتوانیم یکی از جوابهای صحیح معادله را در دست داشته باشیم.

۵. روش جستجو

برای پیدا کردن یکی از ریشه های صحیح معادله سیال می توان از روش زیر استفاده کرد :

فرض کنید معادله سیال به صورت زیر باشد :

$$ax + by = c$$

یکی از مجهولها را بر حسب مجهول دیگر بدست می آوریم (و بهتر است مجهولی را محاسبه کنیم که ضریب آن کوچکتر است)، مثلاً فرض کنید $a < b$ باشد ، در این صورت :

$$x = \frac{c - by}{a}$$

به y مقادیر متوالی ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ و ... را می دهیم تا به عددی برسیم که به ازای آن $c - by$ بر a قابل قسمت باشد. فرض کنید به ازای $y = n$ عبارت $c - bn$ بر a قابل قسمت و خارج قسمتی مساوی n داشته باشد ، در این صورت داریم :

$$x = m ; y = n$$

که يك جواب صحیح معادله است ، در حقیقت داریم :

$$\frac{c - bn}{a} = m \Rightarrow c - bn = am \Rightarrow am + bn = c$$

یعنی مقادیر m و n در معادله صدق می کنند.

مثال. معادله $7x - 2y = 2$ را در نظر می گیریم، y را نسبت به x

محاسبه می کنیم :

$$2y = 7x - 2 \Rightarrow y = \frac{7x - 2}{2}$$

اگر به x مقادیر متوالی ۰ ، ۱ ، ۲ و ... را بدهیم می بینیم که به ازای

$x=2$ عبارت $2-x$ بر ۴ قابل قسمت و خارج قسمتی مساوی ۳ دارد و بنابراین یکی از جوابهای معادله چنین است:

$$x=2; y=3$$

و بقیه جوابها از رابطه‌های کلی بدست می‌آیند:

$$\begin{cases} x=2+4t \\ y=3+7t \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} x=2-4t \\ y=3-7t \end{cases}$$

تصوره. در نظریه عددها ثابت می‌کنند که اگر a و b نسبت به هم اول باشند، بین عددهای:

$$0, 1, 2, 3, \dots, (a-1)$$

همیشه عددی مانند y وجود دارد که به ازای آن عبارت $by - a$ بر a قابل قسمت باشد. به همین مناسبت توصیه کردیم که از میان دو مجهول، آنرا بر حسب دیگری بدست آوریم که ضریب کوچکتری دارد تا تعداد عددهای مورد آزمایش کمتر باشد.

۶. حالت خاص معادله سیال

وقتی که یکی از ضریبهای دو مجهول مساوی واحد باشد، معادله سیال را به سادگی می‌توان حل کرد. فرض کنید مثلاً ضریب x برابر واحد باشد، خواهیم داشت:

$$x + by = c$$

x را بر حسب y محاسبه می‌کنیم:

$$x = c - by$$

و واضح است هر عدد صحیحی از y متناظر است با عدد صحیحی برای x .

مثال. معادله $5x + y = 18$ مفروض است، داریم:

$$y = 18 - 5x$$

اگر به x مقادیر صحیح دلخواه بدهیم، برای y جوابهای صحیح نظیر آن بدست می‌آید:

x	۰	۱	۲	۳	۴	-۱	-۲	...
y	۱۸	۱۳	۸	۳	-۲	۲۳	۲۸	...

۷. راه حل کلی معادله سیال

بوسیله يك مثال راه حل کلی و عملی معادله سیال درجه اول را بیان می کنیم. فرض کنید معادله ذیر مفروض باشد :

$$23x + 53y = 109$$

مجهولی را که ضریب کوچکتر دارد ، بر حسب مجهول دیگر بدست می آوریم (و در اینجا x را) :

$$x = \frac{109 - 53y}{23}$$

اگر قسمت صحیح کسر را خارج کنیم، می شود :

$$x = 4 - 2y + \frac{17 - 7y}{23}$$

شرط لازم و کافی برای اینکه x و y عددهایی صحیح باشند، این است که

کسر $\frac{17 - 7y}{23}$ عددی صحیح باشد. این کسر را مساوی t فرض می کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{17 - 7y}{23} = t \Rightarrow 17 - 7y = 23t \Leftrightarrow 23t + 7y = 17$$

اگر برای t و y عددهای صحیح بدست آوریم که در رابطه $\frac{17 - 7y}{23} = t$

و یا معادله $23t + 7y = 17$ صدق کنند ، برای x هم مقدار صحیحی بدست خواهد آمد و مساله حل شده است. به این ترتیب حل معادله سیال مفروض منجر به حل معادله سیال دیگری شد که ضریبهای آن کوچکتر و بنابراین حل آن ساده تر است،

اکنون در معادله اخیر هم y را (که ضریب کوچکتری دارد) نسبت به

t محاسبه می‌کنیم:

$$y = \frac{17-23t}{7} = 2-3t + \frac{3-2t}{7}$$

برای اینکه y عددی صحیح باشد لازم و کافی است که کسر $\frac{3-2t}{7}$

عددی صحیح باشد، این کسر را مساوی t_1 فرض می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{3-2t}{7} = t_1 \Rightarrow 7t_1 + 2t = 3$$

عددهای صحیحی از t و t_1 که در این معادله صدق کنند، متناظر با عددهای

صحیحی از x و y معادله مفروض ما خواهند بود و به این ترتیب حل معادله ما منجر به حل معادله اخیر شد که باز هم ضریبهای کوچکتری دارد. در این معادله هم مثل قبل عمل می‌کنیم:

$$t = \frac{3-7t_1}{2} = 1-3t_1 + \frac{1-t_1}{2}$$

کسر $\frac{1-t_1}{2}$ را مساوی عدد صحیح t_2 می‌گیریم، می‌شود:

$$\frac{1-t_1}{2} = t_2 \Rightarrow 2t_2 + t_1 = 1$$

معادله سیالی بدست آوردیم که ضریب یکی از مجهولهای آن مساوی

واحد است و چنین معادله‌ای را هم قبلاً مورد بحث قرار داده‌ایم،

$$t_1 = 1 - 2t_2 \quad \text{در حقیقت داریم:}$$

اگر در این معادله بجای t_2 مقادیر صحیح قرار دهیم، برای t_1 هم

عددهایی صحیح بدست می‌آید، این مقادیر t_1 و t_2 را در عبارت t قرار می‌دهیم:

$$t = 1 - 3t_1 + \frac{1-t_1}{2} = 1 - 3t_1 + t_2$$

مقادیر صحیح متناظر t بدست می‌آید. سپس مقادیر بدست آمده t و t_1

را در عبارت y قرار می‌دهیم:

$$y = 2 - 3t + \frac{3-2t}{7} = 2 - 3t + t_1$$

مقادیر متناظر y بدست می‌آید و بالاخره با قرار دادن مقادیر t و y در

عبارت x :

$$x = 4 - 2y + \frac{17 - 7y}{23} = 4 - 2y + t$$

مقادیر صحیح x بدست خواهد آمد.

می‌توان مقادیر x و y را مستقیماً برحسب t بدست آورد، برای این منظور در رابطه t بجای t_1 مقدارش را برحسب t_2 قرار می‌دهیم:

$$t = 1 - 3t_1 + t_2 = 1 - 3(1 - 2t_2) + t_2$$

$$t = -2 + 7t_2 \quad \text{و یا:}$$

حالا در عبارت y بجای t و t_1 مقادیرشان را برحسب t_2 می‌گذاریم:

$$y = 2 - 3t + t_1 = 2 - 3(-2 + 7t_2) + (1 - 2t_2)$$

$$y = 9 - 23t_2 \quad \text{و یا:}$$

و بالاخره اگر در رابطه x بجای y و t مقادیر بدست آمده برحسب t_2 را قرار دهیم:

$$x = 4 - 2y + t = 4 - 2(9 - 23t_2) + (-2 + 7t_2)$$

$$x = -16 + 53t_2 \quad \text{و یا:}$$

و به این ترتیب برای x و y این رابطه‌ها را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x = -16 + 53t_2 \\ y = 9 - 23t_2 \end{cases}$$

اگر در این رابطه‌ها بجای t_2 عددهای صحیح مثبت، منفی و یا صفر قرار دهیم، جوابهای معادله سیال مفروض (که تعداد آنها بینهایت است) بدست می‌آید، بعضی از این جوابها در جدول زیر داده شده است:

t_2	۰	۱	۲	-۱	-۲
x	-۱۶	۳۷	۹۰	-۶۹	-۱۲۲
y	۹	-۱۴	-۳۷	۳۲	۵۵

اگر به عملهایی که روی ضریبهای معادله مفروض انجام دادیم تا به معادله

آخر رسیدیم، توجه کنیم می‌بینیم:

(۱) از تقسیم ضریب بزرگتر معادله مفروض یعنی ۵۳ بر ضریب کوچکتر یعنی ۲۳ به باقیمانده ۷ و خارج قسمت ۲ رسیدیم.

(۲) سپس ضریب کوچکتر یعنی ۲۳ را بر باقیمانده قبلی یعنی ۷ تقسیم کردیم و به باقیمانده دوم ۲ و خارج قسمت ۳ رسیدیم.

(۳) و بالاخره از تقسیم باقیمانده اول یعنی ۷ بر باقیمانده دوم یعنی ۲، به باقیمانده واحد و خارج قسمت ۳ رسیدیم. به عبارت دیگر درست همان عملهای را انجام دادیم که برای پیدا کردن بزرگترین مقسوم علیه مشترك دو عدد انجام می‌دهیم.

می‌دانیم که بزرگترین مقسوم علیه مشترك دو عددی که نسبت به هم اولند مساوی واحد است و چون ضریبهای مجهولها را در معادله سیال نسبت به هم اول فرض کردیم، بنابراین رشته عملهای انجام شده همیشه ما را به معادله‌ای می‌رساند که در آن ضریب یکی از مجهولها برابر واحد است و از اینجا نتیجه می‌گیریم: اگر ضریبهای مجهولهای معادله سیال نسبت به هم اول باشند، معادله

همیشه دارای جوابهای صحیح است.

۸. ساده کردن حل معادله

گاهی برای حل معادله سیال می‌توان راههای ساده‌تری پیدا کرد که با سرعت بیشتری به جواب برسیم.

۱. اگر ضریب یکی از مجهولها و مقدار ثابت، مقسوم علیه مشتركی داشته باشند، می‌توان با انتخاب مجهول كمکی، بجای مجهول دوم، دوطرف معادله را به مقسوم علیه مشترك مذکور ساده کرده.

مثال ۱. این معادله را در نظر بگیرید:

$$6x - 5y = 21$$

ضریب ۶ و مقدار معلوم ۲۱، مقسوم علیه مشتركی مساوی ۳ دارند، بنابراین جمله $5y$ هم باید بر ۳ قابل قسمت باشد و چون ۵ نسبت به ۳ اول است، باید y مضربی از ۳ باشد، اگر $y = 3t$ فرض کنیم (که در آن t

عددی است صحیح) خواهیم داشت :

$$6x - 15t = 21$$

و اگر دوطرف تساوی را به ۳ ساده کنیم می شود :

$$2x - 5t = 7$$

حالا معادله اخیر را حل می کنیم:

$$x = \frac{7+5t}{2} = 3 + 2t + \frac{1+t}{2} = 3 + 2t + t_1 ;$$

$$\frac{1+t}{2} = t_1 \Rightarrow t = -1 + 2t_1$$

و اگر این مقدار را در رابطه های x و y قرار دهیم:

$$\begin{cases} x = 3 + 2(-1 + 2t_1) + t_1 = 1 + 5t_1 \\ y = 3(-1 + 2t_1) = -3 + 6t_1 \end{cases}$$

مثال ۲. مطلوب است حل معادله زیر:

$$9x + 14y = 105$$

$y = 3t$ فرض و دو طرف معادله را به ۳ ساده می کنیم:

$$3x + 14t = 35$$

حالا در این معادله $x = 7t_1$ می گیریم و دوطرف آنرا به ۷ ساده می کنیم:

$$3t_1 + 2t = 5$$

و معادله اخیر را حل می کنیم:

$$t = \frac{5-3t_1}{2} = 2 - t_1 + \frac{1-t_1}{2} = 2 - t_1 + t_2 ;$$

$$\frac{1-t_1}{2} = t_2 \Rightarrow t_1 = 1 - 2t_2$$

و بالاخره خواهیم داشت :

$$t = 2 - (1 - 2t_2) + t_2 = 1 + 3t_2 ;$$

$$\begin{cases} x = 7t_1 = 7(1 - 2t_2) = 7 - 14t_2 ; \\ y = 3t = 3(1 + 3t_2) = 3 + 9t_2 \end{cases}$$

۲. وقتی که ضمن محاسبه یکی از مجهولها بر حسب مجهول دیگر ، بین جمله های صورت کسری که بدست می آید (پس از خارج کردن مقدار صحیح

آن) مقسوم علیه مشترکی وجود داشته باشد، می‌توان معادله را ساده‌تر حل کرد.

مثال ۳. می‌خواهیم معادله زیر را حل کنیم:

$$12x + 17y = 41$$

x را بر حسب y بدست می‌آوریم:

$$x = \frac{41 - 17y}{12} = 3 - y + \frac{5 - 5y}{12} = 3 - y + 5 \times \frac{1 - y}{12}$$

برای اینکه $5 \times \frac{1 - y}{12}$ عددی صحیح باشد، لازم و کافی است که $\frac{1 - y}{12}$ عددی صحیح باشد، کسر اخیر را برابر t می‌گیریم:

$$\frac{1 - y}{12} = t \Rightarrow 1 - y = 12t \Rightarrow y = 1 - 12t ;$$

و ضمناً:

$$x = 3 - (1 - 12t) + 5t = 2 + 17t$$

۳. اگر ضمن تقسیم، باقیمانده بزرگتر از نصف مقسوم‌علیه باشد، بهتر

است از باقیمانده منفی استفاده کنیم.

مثال ۴. مطلوب است حل معادله:

$$11x - 20y = 49$$

معادله را نسبت به x حل می‌کنیم:

$$x = \frac{49 + 20y}{11} = 4 + 2y + \frac{5 - 2y}{11} = 4 + 2y + t ;$$

$$\frac{5 - 2y}{11} = t \Rightarrow 5 - 2y = 11t \Rightarrow 11t + 2y = 5 ;$$

$$y = \frac{5 - 11t}{2} = 2 - 5t + \frac{1 - t}{2} = 2 - 5t + t_1 ;$$

$$\frac{1 - t}{2} = t_1 \Rightarrow 1 - t = 2t_1 \Rightarrow t = 1 - 2t_1$$

و بالاخره:

$$y = 2 - 5(1 - 2t_1) + t_1 = -3 + 11t_1$$

$$x = 4 + 2(-3 + 11t_1) + (1 - 2t_1) = -1 + 20t_1$$

اگر همین معادله را با باقیمانده مثبت حل می کردیم، چنین داشتیم:

$$x = 4 + y + \frac{5 + 9y}{11}$$

و به عنوان معادله بعدی:

$$\frac{5 + 9y}{11} = t \Rightarrow 11t - 9y = 5$$

و روشن است که این معادله بفرنجتر از معادله $11t + 2y = 5$ است

که باکمک باقیمانده منفی، قبلا بدست آوردیم.

مثال ۵. مطلوب است حل معادله: $15x + 28y = 59$

معادله را نسبت به x حل می کنیم (با استفاده از باقیمانده منفی):

$$x = \frac{59 - 28y}{15} = 3 - 2y + \frac{-1 + 2y}{15} = 3 - 2y + t ;$$

$$\frac{-1 + 2y}{15} = t \Rightarrow -1 + 2y = 15t \Rightarrow 2y - 15t = 1$$

$$y = \frac{1 + 15t}{2} = 7t + \frac{1 + t}{2} = 7t + t_1 ;$$

$$\frac{1 + t}{2} = t_1 \Rightarrow 1 + t = 2t_1 \Rightarrow t = 2t_1 - 1$$

و بالاخره خواهیم داشت :

$$y = 7(-1 + 2t_1) + t_1 = -7 + 15t_1$$

$$x = 4 - 2(-7 + 15t_1) + (-1 + 2t_1) = 17 - 28t_1$$

اگر آزمایش کنیم، می بینیم که برای حل معادله هایی که در مثالهای

بالا ذکر کردیم، اگر از راه معمولی و بدون استفاده از نکته های یادشده عمل

می کردیم، عملهای مفصلتر و زیادتری لازم بود.

۹. جوابهای مثبت

همانطور که قبلا هم گفتیم، اغلب پیش می آید که تنها جوابهای مثبت

معادله سیال مورد احتیاج است ، یعنی باید مقادیر صحیح و مثبتی برای y و x پیدا کرد که در معادله سیال صدق کنند. می‌توان پس از پیدا کردن جوابهای عمومی برای x و y مستقیماً جستجو کرد که به ازای چه مقادیری از پارامتر جوابهای مثبت برای x و y بدست می‌آید.

رابطه‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x = \alpha + bt ; y = \beta - at$$

برای اینکه x و y مثبت باشند ، باید مقادیری از t را انتخاب کرد که به ازای آنها داشته باشیم:

$$\alpha + bt > 0 ; \beta - at > 0$$

a را مثبت فرض می‌کنیم (و این به کلی بودن بحث لطمه‌ای نمی‌زند، زیرا قبلاً دیدیم که اگر لازم باشد، می‌توان قرینه a را در رابطه وارد کرد). در این صورت سه حالت خواهیم داشت:

۱. هر دو نامساوی در يك جهت باشند. و این وقتی پیش می‌آید که

منفی باشد. در حقیقت با استفاده از خاصیت نامساویها خواهیم داشت:

$$bt > -\alpha ; at < \beta :$$

$$t < -\frac{\alpha}{b} ; t < \frac{\beta}{a}$$

در این حالت معادله دارای بینهایت جواب مثبت خواهد بود.

مثلاً فرض کنید بدست آوریم:

$$t < \frac{7}{3} ; t < -\frac{3}{5}$$

واضح است که تمام عددهایی که از $-\frac{3}{5}$ کوچکتر باشند ، از $\frac{7}{3}$

کوچکترند و بنابراین به ازای تمام مقادیر t که از $-\frac{3}{5}$ کوچکترند ، معادله جوابهای مثبت خواهد داشت.

و یا اگر مثلاً بدست آوریم

$$t > \frac{7}{15} ; t > \frac{1}{3}$$

واضح است که جواب $t > \frac{1}{3}$ در هر دو نامساوی صدق می‌کند و هر

مقدار بزرگتر از ۳ که به t بدهیم، برای x و y جوابهای مثبت بدست می‌آید.

$$3x - 5y = 11 \quad \text{مثال ۱.}$$

به ترتیب داریم:

$$x = \frac{11 + 5y}{3} = 4 + 2y - \frac{1 + y}{3} = 4 + 2y - t ;$$

$$\frac{1 + y}{3} = t \Rightarrow y = -1 + 3t ;$$

$$x = 4 + 2(-1 + 3t) - t = 2 + 5t$$

و برای اینکه جوابهای مثبت داشته باشیم، باید:

$$-1 + 3t > 0 ; 2 + 5t > 0$$

$$t > \frac{1}{3} ; t > -\frac{2}{5} \quad \text{و یا :}$$

یعنی اگر t را مقادیر صحیح بزرگتر از $\frac{1}{3}$ (و یا بزرگتر از صفر)

انتخاب کنیم، بینهایت زوج جواب مثبت برای x و y بدست می‌آید.

$$8x - 3y + 13 = 0 \quad \text{مثال ۲.}$$

داریم :

$$y = \frac{13 + 8x}{3} = 4 + 3x + \frac{1 - x}{3} = 4 + 2x + t ;$$

$$\frac{1 - x}{3} = t \Rightarrow x = 1 - 3t ; y = 7 - 8t$$

و اگر بخواهیم ریشه‌ها مثبت باشند، باید داشته باشیم :

$$1 - 3t > 0 ; 7 - 8t > 0$$

$$t < \frac{1}{3} ; t < \frac{7}{8} \quad \text{و یا :}$$

یعنی به ازای تمام مقادیر صحیح t که کوچکتر از $\frac{1}{3}$ باشد (یعنی ۰،

۱، ۲، ...) مقادیر صحیح و مثبتی برای x و y بدست می‌آید.

۲. دو نامساوی در خلاف جهت یکدیگر باشند و ضمناً متناقض یکدیگر.

مثلاً اگر به نامساوی زیر برسیم:

$$t < \frac{7}{8} ; t > \frac{1}{3}$$

واضح است که در این صورت نمی‌توان مقداری برای t پیدا کرد که در هر دو نامساوی صدق کند. در این حالت معادله جوابهای مثبت و صحیح ندارد.

$$4x + 5y + 7 = 0 \quad \text{مثال ۳.}$$

پس از حل این معادله خواهیم داشت:

$$x = -2 + 5t ; y = 1 - 4t$$

و از آنجا باید داشته باشیم:

$$-2 + 5t > 0 ; 1 - 4t > 0$$

$$t > \frac{2}{5} ; t < \frac{1}{4} \quad \text{و یا:}$$

نامساویها یکدیگر را نقض می‌کنند و بنابراین معادله دارای جواب مثبت برای x و y نیست.

توضیح. در مورد مثال مورد بحث، از ابتدا هم روشن بود که اگر x و y مثبت باشند، حاصل $4x + 5y$ هم مثبت می‌شود، در حالی که سمت راست تساوی -7 و منفی است.

۳. دو نامساوی در خلاف جهت یکدیگر باشند، ولی یکدیگر را نقض

نکنند.

مثلا فرض کنید به نامساویهای زیر برسیم:

$$t > \frac{1}{4} ; t < \frac{3}{4}$$

تمام مقادیر صحیح t که بین $\frac{1}{4}$ و $\frac{3}{4}$ واقع باشند، یعنی ۵ و ۶ و ۷

برای x و y مقادیر مثبت بدست می‌دهند. بنابراین در این حالت: تعداد ریشه‌های مثبت به اندازه عددهای صحیحی است که بین دو حد بدست آمده t قرار گرفته است.

متذکر می‌شویم که حتی در این حالت ممکن است، معادله جواب مثبت نداشته باشد. زیرا ممکن است بین دو حد بدست آمده t حتی یک عدد صحیح

هم موجود نباشد. مثلاً اگر نامساویهای زیر را داشته باشیم:

$$t > 1\frac{1}{4}; \quad t < 1\frac{7}{8}$$

نامساویها متناقض نیستند، ولی بین $1\frac{1}{4}$ و $1\frac{7}{8}$ يك عدد صحیح هم

وجود ندارد و بنابراین معادله جواب مثبتی پیدا نمی‌کند.

$$3x + 7y = 55 \quad \text{مثال ۴.}$$

معادله را حل می‌کنیم:

$$x = \frac{55 - 7y}{3} = 18 - 2y + \frac{1 - y}{3} = 18 - 2y + t;$$

$$y = 1 - 3t; \quad x = 16 + 7t$$

$$1 - 3t > 0; \quad 16 + 7t > 0 \quad \text{و از آنجا:}$$

$$t < \frac{1}{3}; \quad t > -2\frac{2}{7} \quad \text{و یا:}$$

و واضح است که برای t تنها می‌توان مقادیر $0, -1$ و -2 را انتخاب کرد تا جوابهای x و y مثبت باشد:

t	0	-1	-2
x	16	9	2
y	1	4	7

$$5x + 4y = 3 \quad \text{مثال ۵.}$$

پس از حل خواهیم داشت:

$$x = -1 + 4t; \quad y = 2 - 5t$$

$$t > \frac{1}{4}; \quad t < \frac{2}{5} \quad \text{و از آنجا:}$$

نامساویها متناقض یکدیگر نیستند، ولی بین دو عدد $\frac{1}{4}$ و $\frac{2}{5}$ هم عدد

صحیحی وجود ندارد و بنابراین معادله دارای جواب مثبت نیست.

معادله‌های سیال درجه دوم

معادله سیال کامل درجه دوم به صورت زیر است:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0 \quad (1)$$

برای چنین معادله‌ای راه حل کلی وجود ندارد و ما در اینجا حالت‌های خاص و قابل حل آنرا ذکر می‌کنیم:

$$10. \text{ حل معادله‌های به صورت } y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

در تمام حالت‌هایی که رابطه بین x و y يك رابطه هموگرافيك باشد، می‌توان جواب‌های صحیح و یا جواب‌های صحیح و مثبت معادله را بدست آورد.^۱
حالت اول: وقتی که a مضربی از c باشد. راه حل را با ذکر چند مثال روشن می‌کنیم.

مثال ۱. جواب‌های صحیح معادله زیر را بدست آورید:

$$y = \frac{3x+2}{x-4} \quad (1)$$

حل. معادله (۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$y = \frac{3(x-4)+14}{x-4} = 3 + \frac{14}{x-4}$$

برای اینکه y عددی صحیح باشد باید $\frac{14}{x-4}$ عددی صحیح باشد،

یعنی باید ۱۴ بر $x-4$ قابل قسمت باشد. مقسوم علیه‌های ۱۴ عبارت است

۱- این حالت وقتی بدست می‌آید که در معادله کلی (۱) ضریب‌های x^2 و y^2

مساوی صفر باشند.

از ± 1 ، ± 2 ، ∓ 7 و ± 14 و به ازای هر يك از این مقادیر يك زوج جواب صحیح برای x و y بدست می آید:

$x-4$	-1	1	-2	2	-7	7	-14	14
x	3	5	2	6	-3	11	-10	18
y	-11	17	-4	10	1	5	2	4

و اگر جوابهای مثبت معادله را بخواهیم:

$$\left. \begin{array}{l} x=5 \\ y=17 \end{array} \right\} ; \left. \begin{array}{l} x=6 \\ y=10 \end{array} \right\} ; \left. \begin{array}{l} x=11 \\ y=5 \end{array} \right\} ; \left. \begin{array}{l} x=18 \\ y=4 \end{array} \right\}$$

به این ترتیب اگر باقیمانده تقسیم صورت بر مخرج را بدست آوریم، مقادیر x از اینجا بدست می آید که مخرج را مساوی با مقسوم علیه های مثبت یا منفی این باقیمانده قرار دهیم.

وقتی که ضریب x صورت بر ضریب x مخرج قابل قسمت باشد، باقیمانده تقسیم صورت بر مخرج عددی است صحیح و بنابراین اگر ضریب x در مخرج واحد باشد معادله همیشه دارای جواب است و ضمناً از آنجا که تعداد مقسوم علیه های يك عدد محدود است، تعداد جوابهای چنین معادله ای محدود است و هرگز معادله سیالی از این نوع دارای بینهایت جواب نیست.

مثال ۲. به ازای چه مقادیری از m کسر $\frac{10m-13}{5m-7}$ برابر با عددی

صحیح می شود؟

حل: حاصل کسر را مساوی a می گیریم، بترتیب داریم:

$$a = \frac{2(5m-7)+1}{5m-7} = 2 + \frac{1}{5m-7}$$

برای این که a عددی صحیح باشد، باید $\frac{1}{5m-7}$ مساوی عددی

صحیح باشد، یعنی $5m-7$ باید مساوی ۱ یا -۱ شود:

$$5m - 7 = 1 \Rightarrow m = \frac{8}{5}$$

$$5m - 7 = -1 \Rightarrow m = \frac{6}{5}$$

که در هیچیک از این دو مورد برای m عددی صحیح بدست نمی‌آید.

بنابراین معادله $a = \frac{10m - 13}{5m - 7}$ دارای جواب صحیح نیست.

به این ترتیب وقتی که ضریب مجهول در مخرج کسر برابر واحد نباشد، ممکن است که معادله دارای جواب نباشد.

$$\text{مثال ۳. مطلوب است حل معادله } y = \frac{24x - 78}{2x - 7}$$

حل: باقیمانده تقسیم صورت بر مخرج برابر است با ۶ و داریم:

$$y = 12 + \frac{6}{2x - 7}$$

مقسوم‌علیه‌های ۶ عبارتند از $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

ولی چون x عددی است صحیح $2x - 7$ عددی فرد است و به‌ازای

مقسوم‌علیه‌های ± 2 و ± 6 (که زوج هستند) جواب صحیحی برای x بدست نمی‌آید. به‌ازای مقسوم‌علیه‌های فرد ± 1 و ± 3 داریم.

$$2x - 7 = -1 \Rightarrow x = 3 ; y = 6$$

$$2x - 7 = 1 \Rightarrow x = 4 ; y = 18$$

$$2x - 7 = -3 \Rightarrow x = 2 ; y = 10$$

$$2x - 7 = 3 \Rightarrow x = 5 ; y = 14$$

حالت دوم. وقتی که a مضربی از c نباشد.

مثال ۴. معادله $5x + 5y - 2xy = 8$ را حل کنید.

حل. y را نسبت به x محاسبه می‌کنیم:

$$(2x - 5)y = 5x - 8 \Rightarrow y = \frac{5x - 8}{2x - 5}$$

اگر دوطرف معادله را در ۲ ضرب کنیم می‌شود:

$$2y = \frac{10x - 16}{2x - 5}$$

حالا مثل حالت اول عمل می کنیم ، منتهی در اینجا باید حاصل کسر

یعنی $2y$ عدد زوج باشد تا y عددی صحیح شود. داریم:

$$2y = \frac{5(2x-5)+9}{2x-5} = 5 + \frac{9}{2x-5}$$

مقسوم‌علیه‌های ۹ عبارتند از ± 1 ، ± 3 و ± 9 .

$$2x-5=-1 \Rightarrow x=2 ; y=-2$$

$$2x-5=1 \Rightarrow x=3 ; y=7$$

$$2x-5=-3 \Rightarrow x=1 ; y=1$$

$$2x-5=3 \Rightarrow x=4 ; y=4$$

$$2x-5=-9 \Rightarrow x=-2 ; y=2$$

$$2x-5=9 \Rightarrow x=7 ; y=3$$

و از بین جوابها ، جوابهای مثبت هم به‌سادگی تشخیص داده می‌شود.

$$\text{مثال ۵. مطلوب است حل معادله } y = \frac{2x+47}{6x+5}$$

حل. بترتیب می‌نویسیم:

$$y = \frac{1}{3} \times \frac{6x+141}{6x+5} = \frac{1}{3} \times \frac{6x+5+136}{6x+5} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{136}{6x+5} \right)$$

مقسوم‌علیه‌های ۱۳۶ چنین است:

$$\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8; \pm 17; \pm 34; \pm 68; \pm 136$$

از طرف دیگر برای اینکه $6x+5$ مساوی عددی صحیح شود ، باید

مساوی با عددی باشد که در تقسیم آن بر ۶ باقیمانده‌ای مساوی ۵ یا ۱- بدست آید. بین مقسوم‌علیه‌های فوق تنها عددهای ۱- و ۱۷ دارای چنین خاصیتی هستند و در مورد این دو عدد داریم:

$$6x+5=-1 \Rightarrow x=-1 ; y=-45$$

$$6x+5=17 \Rightarrow x=2 ; y=3$$

و جوابهای مثبت منحصر به $(x=2 ; y=3)$ می‌باشد.

توضیح. بطور کلی می‌توان جوابهای معادله‌های سیال به صورت

$$y = \frac{f(x)}{cx+d} \text{ را با روشهای مذکور در بالا پیدا کرد.}$$

مثال ۶. مطلوب است حل معادله $y = \frac{3x^2 - x + 1}{x - 2}$

حل. $3x^2 - x + 1$ را بر $x - 2$ تقسیم می‌کنیم، خارج قسمت مساوی $3x + 5$ و باقیمانده تقسیم مساوی ۱۶ می‌شود و بنابراین داریم:

$$y = 3x + 5 + \frac{11}{x - 2}$$

برای اینکه y عددی صحیح باشد، باید $\frac{11}{x - 2}$ مساوی عددی صحیح شود. مقسوم علیه‌های ۱۱ عبارتند از ± 1 و ± 11 :

$$x - 2 = -1 \Rightarrow x = 1 ; y = -3$$

$$x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3 ; y = 25$$

$$x - 2 = -11 \Rightarrow x = -9 ; y = -23$$

$$x - 2 = 11 \Rightarrow x = 13 ; y = 39$$

مثال ۷. معادله $y = \frac{x^2 + 1}{2x + 1}$ را برای جوابهای صحیح x و y حل کنید.

حل. $x^2 + 1$ را بر $2x + 1$ تقسیم می‌کنیم، خارج قسمت مساوی: $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}$ و باقیمانده مساوی $\frac{7}{8}$ می‌شود، بنابراین می‌توان نوشت:

$$y = \frac{1}{8} \left(4x^2 - 2x + 1 + \frac{7}{2x + 1} \right)$$

باید 7 بر $2x + 1$ قابل قسمت باشد. مقسوم علیه‌های 7 عبارتند از ± 1 و ± 7 .

$$2x + 1 = -1 \Rightarrow x = -1 ; y = 0$$

$$2x + 1 = 1 \Rightarrow x = 0 ; y = 1$$

$$2x + 1 = -7 \Rightarrow x = -4 ; y = 9$$

$$2x + 1 = 7 \Rightarrow x = 3 ; y = 2$$

و جواب صحیح و مثبت منحصر به $x = 3$ ، $y = 2$ است

۱۱. حل معادله‌های به صورت $a^2x^2 \pm b^2y^2 + cx + dy + e = 0$

در اینگونه معادله‌ها جمله‌های $a^2x^2 + cx$ و $b^2y^2 + dy$ را به مجذور دو جمله‌ای تبدیل می‌کنیم و در یکطرف تساوی قرار می‌دهیم و مقدار ثابت را به طرف دیگر می‌بریم و با تجسس y و x را محاسبه می‌کنیم. حالت اول. ضریبهای x^2 و y^2 هم علامت نیستند.

مثال ۱. به ازای چه مقادیر صحیحی از m ، سه جمله‌ای $m^2 - 6m + 2$ مجذور کامل است.

حل. در حقیقت باید معادله $m^2 - 6m + 2 = n^2$ را حل کنیم.

به ترتیب داریم:

$$(m-3)^2 - n^2 = 7 \Rightarrow (m+n-3)(m-n-3) = 7$$

در سمت چپ تساوی هر یک از پرانتزها عددی است صحیح (زیرا m و n عددهایی صحیح هستند) سمت راست تساوی (یعنی ۷) را تنها می‌توان به صورت 7×1 یا 1×7 نوشت. بنابراین چهار دستگاه زیر را داریم:

$$\begin{cases} m+n-3=7 \\ m-n-3=1 \end{cases} ; \begin{cases} m+n-3=-7 \\ m-n-3=-1 \end{cases} ; \begin{cases} m+n-3=1 \\ m-n-3=7 \end{cases} ; \begin{cases} m+n-3=-1 \\ m-n-3=-7 \end{cases}$$

و جوابها چنین است:

$$\begin{cases} m=7 \\ n=3 \end{cases} ; \begin{cases} m=-1 \\ n=-3 \end{cases} ; \begin{cases} m=7 \\ n=-3 \end{cases} ; \begin{cases} m=-1 \\ n=3 \end{cases}$$

و با توجه به صورت مسأله جوابهای m عبارتند از $m = -1$ و

$m = 7$ و جواب مثبت و صحیح منحصر به $m = 7$ است.

مثال ۲. اگر x و y عددهایی صحیح باشند، معادله زیر را حل کنید:

۱- این حالت وقتی بدست می‌آید که در معادله کلی درجه دوم ضریبهای x^2 و y^2 از لحاظ قدر مطلق مجذور کامل و ضریب xy مساوی صفر باشد.

$$x^2 + 5x + 2 = y^2$$

حل. معادله را بترتیب می‌توان چنین نوشت:

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 2 = y^2 \Rightarrow \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - y^2 = \frac{17}{4};$$

$$(x + y + \frac{5}{2})(x - y + \frac{5}{2}) = \frac{17}{4};$$

دوطرف معادله را در ۴ ضرب می‌کنیم، می‌شود.

$$(2x + 2y + 5)(2x - 2y + 5) = 17 = 1 \times 17 = -1 \times -17$$

و بنابراین چهار دستگاه زیر را داریم:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 5 = 1 \\ 2x - 2y + 5 = 17 \end{cases}; \begin{cases} 2x + 2y + 5 = 17 \\ 2x - 2y + 5 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y + 5 = -1 \\ 2x - 2y + 5 = -17 \end{cases}; \begin{cases} 2x + 2y + 5 = -17 \\ 2x - 2y + 5 = -1 \end{cases}$$

و جوابها چنین‌اند:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = \pm 4 \end{cases}; \begin{cases} x = -7 \\ y = \pm 4 \end{cases}$$

و جوابهای مثبت و صحیح منحصر به $(x=2$ و $y=4)$ است.

مثال ۳. جوابهای صحیح معادله زیر را بدست آورید:

$$4x^2 - y^2 - 20x + y + 6 = 0$$

حل. معادله را بترتیب چنین می‌نویسیم:

$$4(x^2 - 5x) - (y^2 - y) + 6 = 0;$$

$$4\left[\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right] - \left[\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] + 6 = 0;$$

$$(4x - 10)^2 - (2y - 1)^2 = 75;$$

$$(4x + 2y - 11)(4x - 2y - 9) = 75;$$

عدد ۷۵ می‌توان به یکی از صورتهای زیر نوشت:

$$1 \times 75; 3 \times 25; 5 \times 15; -1 \times -75$$

$$-3 \times -25; -5 \times -15$$

دستگاههای مربوطه را تشکیل می‌دهیم و حل می‌کنیم.

جواب:

$$\begin{cases} x=12 \\ y=-18 \end{cases} ; \begin{cases} x=12 \\ y=19 \end{cases} ; \begin{cases} x=-7 \\ y=19 \end{cases} ; \begin{cases} x=-7 \\ y=-18 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} x=6 \\ y=-5 \end{cases} ; \begin{cases} x=6 \\ y=6 \end{cases} ; \begin{cases} x=-1 \\ y=6 \end{cases} ; \begin{cases} x=-1 \\ y=-5 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} x=5 \\ y=-2 \end{cases} ; \begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases} ; \begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases} ; \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases}$$

و اگر جوابهای مثبت و صحیح را بخواهیم چنین‌اند:

$$\begin{cases} x=12 \\ y=19 \end{cases} ; \begin{cases} x=6 \\ y=6 \end{cases} ; \begin{cases} x=5 \\ y=3 \end{cases}$$

حالت دوم. ضریبهای x^2 و y^2 هم علامت‌اند .

مثال ۴. جوابهای صحیح معادله زیر را بدست آورید:

$$x^2 + y^2 - 10x = 100$$

حل. معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(x-5)^2 + y^2 = 125$$

عدد ۱۲۵ را تنها به یک صورت می‌توان به مجموع دو مربع کامل تبدیل

کرد :

$$100 + 25 = (\pm 10)^2 + (\pm 5)^2$$

و بنابراین دستگاههای زیر را خواهیم داشت:

$$\left| \begin{array}{l} (x-5)^2 = 100 \\ y^2 = 25 \end{array} \right| \text{ یا } \left| \begin{array}{l} (x-5)^2 = 25 \\ y^2 = 100 \end{array} \right|$$

که هر یک از این دستگاهها ، خود به چهار دستگاه درجه اول تبدیل می‌شود.

جواب:

$$\left| \begin{array}{l} x=15 \\ y=5 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x=-5 \\ y=-5 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x=10 \\ y=10 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x=0 \\ y=10 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{l} x=15 \\ y=-5 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x=0 \\ y=-10 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x=-5 \\ y=5 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x=10 \\ y=-10 \end{array} \right|$$

و جوابهای صحیح و مثبت $(x=15, y=5)$ یا $(x=10, y=10)$ می‌باشد.

مثال ۵. به ازای چه مقادیر صحیح m عبارت $115 + 14m - 4m^2$ مجذور کامل است ؟

حل. باید معادله زیر را برای مقادیر صحیح m و n حل کنیم:

$$115 + 14m - 4m^2 = n^2 ;$$

که پس از تبدیلهای ساده چنین می‌شود:

$$(4m-7)^2 + 4n^2 = 509 = 484 + 25$$

و بنابراین دستگاههای زیر را خواهیم داشت:

$$\left| \begin{array}{l} (4m-7)^2 = 484 \\ 4n^2 = 25 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} (4m-7)^2 = 25 \\ 4n^2 = 484 \end{array} \right|$$

دستگاه اول جواب صحیح ندارد و جوابهای صحیح دستگاه دوم چنین است :

$$\left| \begin{array}{l} m=3 \\ n=11 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} m=3 \\ n=-11 \end{array} \right|$$

و بنابراین عبارت مفروض تنها به ازای $m=3$ مجذور کامل است.

۱۲. معادله‌هایی که جواب ندارند

واضح است که اگر داشته باشیم $A=B$ ، به شرطی که A و B

عددهایی صحیح باشند، شرط لازم تساوی این است که باقیمانده‌های دو عدد A و B

بر عدد صحیح n با هم برابر باشند.

از این خاصیت می‌توان برای اثبات بدون جواب بودن بعضی از معادله‌ها استفاده کرد.

مثال ۶. ثابت کنید معادله $x^2 + y^2 = 3z^2$ جواب صحیح ندارد.

حل. می‌توان فرض کرد که x و y و z دارای مقسوم علیه مشترکی نیستند، زیرا اگر مقسوم علیه مشترک این سه عدد را k فرض کنیم، می‌توان نوشت:

$$x = kx' ; y = ky' ; z = kz'$$

که پس از قرار دادن در معادله مفروض، بدست می‌آید:

$$x'^2 + y'^2 = 3z'^2$$

که در آن x' و y' و z' مقسوم علیه مشترکی ندارند.

برای هر یک از عددهای x' و y' دو حالت وجود دارد: یا بر ۳ قابل

قسمت‌اند و یا در تقسیم بر ۳ باقیمانده‌ای مساوی ± 1 بدست می‌آید.

(۱) اگر x' و y' هر دو بر ۳ قابل قسمت باشند، $x'^2 + y'^2$ بر ۹

قابل قسمت می‌شود و بنابراین باید $3z'^2$ هم بر ۹، یعنی z' بر ۳ قابل قسمت باشد، در این صورت x' و y' و z' مقسوم علیه مشترکی پیدامی‌کنند که مخالف فرض است.

(۲) در حالتی که یکی از عددهای x' و y' یا هر دو آنها غیر قابل قسمت

بر ۳ باشند، باقیمانده تقسیم $x'^2 + y'^2$ بر ۳ مساوی ۱ و یا ۲ خواهد شد، در

حالی که باقیمانده $3z'^2$ بر ۳ مساوی صفر است.

یعنی x' و y' نمی‌توانند مساوی عددی صحیح باشند.

۱۳. استفاده از تجزیه ناقص

اغلب تجزیه ناقص يك معادله سیال (به نحوی که تنها مقدار ثابت معادله

جدا بماند) وسیله‌ای برای حل معادله می‌شود. به چند مثال زیر توجه فرمایید:

مثال ۱. جوابهای صحیح و غیر منفی معادله زیر را بدست آورید:

$$2xy + 2xz + yz + z^2 - 3 = 0$$

حل. معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(2x + z)(y + z) = 3$$

هر يك از پراکنشهای سمت چپ تساوی عددی صحیح و مثبت هستند و بنابراین دو دستگاه زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 2x + z = 1 \\ y + z = 3 \end{cases} ; \begin{cases} 2x + z = 3 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

که جوابهای صحیح و غیر منفی آنها چنین است:

$$x = 0 ; y = 2 ; z = 1$$

$$x = 1 ; y = 0 ; z = 1$$

مثال ۲. مطلوب است جوابهای صحیح و مثبت معادله زیر :

$$x + y + z + t = xy + zt$$

حل. معادله را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$(x - 1)(y - 1) + (z - 1)(t - 1) = 2$$

عدد ۲ را می‌توان ۱ + ۱ یا ۲ + ۰ در نظر گرفت و بنابراین جواب-

های معادله ، با حل دستگاههای زیر بدست می‌آید :

$$\begin{cases} (x - 1)(y - 1) = 1 \\ (z - 1)(t - 1) = 1 \end{cases} ; \begin{cases} (x - 1)(y - 1) = 0 \\ (z - 1)(t - 1) = 2 \end{cases} ;$$

$$(x - 1)(y - 1) = 2$$

$$(z - 1)(t - 1) = 0$$

و جوابهای زیر را خواهیم داشت:

$$x = 2$$

$$y = 2$$

$$z = 2$$

$$t = 2$$

$$x = 1$$

$$y = \text{عدد دلخواه}$$

$$z = 2$$

$$t = 3$$

$$x = 1$$

$$y = \text{عدد دلخواه}$$

$$z = 3$$

$$t = 2$$

$x = \text{عددی دلخواه}$	$x = \text{عددی دلخواه}$	$x = 2$
$y = 1$	$y = 1$	$y = 2$
$z = 2$	$z = 3$	$z = 1$
$t = 3$	$t = 2$	$t = \text{عددی دلخواه}$
$x = 2$	$x = 2$	$x = 3$
$y = 3$	$y = 3$	$y = 2$
$z = 1$	$z = \text{عددی دلخواه}$	$z = \text{عددی دلخواه}$
$t = \text{عددی دلخواه}$	$t = 1$	$t = 1$

مثال ۳. عددی در مبنای ۱۲ به صورت $\overline{abc}$ و در مبنای مجهولی به صورت $\overline{abc0}$ نوشته شده است. $ab0a$ و $c0b0a$ و مبنای مجهول را پیدا کنید.

حل. مبنای مجهول را x می گیریم، در این صورت باید داشته باشیم:

$$ax^2 + bx^2 + cx = 144a + 12b + c ;$$

معادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$a(x^2 - 144) + b(x^2 - 12) + c(x - 1) = 0 ; \quad (1)$$

x نمی تواند بزرگتر از ۵ باشد، زیرا در این صورت هر سه جمله سمت

چپ تساوی مثبت می شود و مجموع سه مقدار مثبت هم نمی تواند مساوی صفر باشد.

x نمی تواند کوچکتر از ۵ باشد. زیرا اگر مثلاً $x = 4$ انتخاب شود،

بدست می آید:

$$-80a + 4b + 3c = 0$$

b و c از ۴ کوچکترند (زیرا مبنا را ۴ گرفته ایم)، در این صورت

اگر b و c بزرگترین رقم ممکن و a کوچکترین رقم ممکن ($a = 1$) باشد ($a \neq 0$ است، زیرا a رقم سمت چپ عدد است)، باز هم مقدار سمت چپ تساوی منفی و مخالف صفر می شود.

پس اگر معادله (۱) جواب داشته باشد، تنها در حالت $x = 5$ است،

در معادله قرار می دهیم، می شود:

$$-19a + 13b + 4c = 0 \quad (2)$$

که يك معادلهٔ سیال درجهٔ اول سه مجهولی است. ضمناً $a \neq 0$ و b و c رقم‌هایی مثبت و کوچکتر از ۵ هستند. c را (که ضریب کوچکتری دارد) برحسب دو مجهول دیگر بدست می‌آوریم:

$$c = \frac{19a - 13b}{4} = 5a - 3b - \frac{a+b}{4}$$

برای اینکه $\frac{a+b}{4}$ عددی صحیح باشد، باید $a+b$ مضربی از ۴ باشد، باشد، با توجه به اینکه a و b از ۵ کوچکتر و $a \neq 0$ است، پنج حالت پیش می‌آید:

$$\left| \begin{array}{l} a=4 \\ b=4 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{l} a=2 \\ b=2 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{l} a=1 \\ b=3 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{l} a=3 \\ b=1 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{l} a=4 \\ b=0 \end{array} \right|$$

جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

a	۴	۲	۱	۳	۴
b	۴	۲	۳	۱	۰
c	۶	۳	-۵	۱۱	۱۹

و روشن است که تنها جوابهای $a=2, b=2, c=3$ در شرطهای مسأله صدق می‌کنند.

$$۱۴. \text{ حل معادله } x^2 + y^2 = z^2$$

عددهای صحیح و مثبت x و y و z که در رابطه $x^2 + y^2 = z^2$ صدق کنند، عددهای فیثاغورثی نامیده می‌شوند. بنابر قضیهٔ فیثاغورث این عددها می‌توانند ضلعهای يك مثلث قائم‌الزاویه باشند و به‌همین مناسبت y و x را «ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه» و z را «وتر» گویند.

۱- بندهای ۱۴ و ۱۵ با استفاده از کتاب «سرگرمیهای جبر» تألیف برلمان

تنظیم شده است.

واضح است که اگر سه عدد x و y و z عددهای فیثاغورثی باشند، nx و ny و nz هم سه عدد فیثاغورثی خواهند بود (n عددی است صحیح و مثبت). برعکس اگر سه عدد فیثاغورثی مقسوم علیه مشترکی داشته باشند، می توان آنها را به مقسوم علیه مشترکشان کوچک کرد و سه عدد فیثاغورثی جدید بدست آورد. بنابراین در مرحله اول کافی است که سه عدد فیثاغورثی پیدا کنیم که دو به دو نسبت به هم اول باشند (بقیه جوابها با ضرب این سه عدد در هر عدد صحیح دلخواه بدست می آید).

ثابت می کنیم که از سه عدد فیثاغورثی x ، y و z یکی از ضلعهای مجاور به زاویه قائمه زوج و دیگری فرد است. استدلال را به طریق برهان خلف انجام می دهیم. اگر x و y هر دو زوج باشند، $x^2 + y^2$ یعنی وتر هم زوج می شود و سه عدد x و y و z مقسوم علیه مشترکی مساوی ۲ خواهند داشت و این مخالف فرض است که این سه عدد را بدون مقسوم علیه مشترک در نظر گرفتیم، بنابراین لااقل یکی از دو عدد x و y فرد هستند.

امکان دیگری هم وجود دارد: هر دو ضلع مجاور به زاویه قائمه فرد و در نتیجه «وتر» زوج باشد.

به سادگی ثابت می شود که این حالت هم ممکن نیست. در حقیقت اگر «ضلعهای مجاور به زاویه قائمه» هر دو فرد باشند به صورت:

$$2a+1 \text{ و } 2b+1$$

خواهند بود و مجموع مربعات آنها چنین می شود:

$$(4a^2 + 4a + 1) + (4b^2 + 4b + 1) = 4(a^2 + a + b^2 + b) + 2$$

یعنی مجموع این مربعات عددی است که در تقسیم بر ۴ باقیمانده ای مساوی ۲ دارد، در حالی که مجذور کامل هر عدد زوج باید بر ۴ قابل قسمت باشد. به این ترتیب مجموع مربعات دو عدد فرد نمی تواند مجذور کامل باشد، به عبارت دیگر سه عدد فیثاغورثی نمی توانند «وتر» زوج و «دو ضلع مجاور به زاویه قائمه» فرد داشته باشد.

بنابراین از دو عدد x و y (دو ضلع مجاور به زاویه قائمه) یکی فرد و دیگری زوج است، در این صورت عدد $x^2 + y^2$ یعنی «وتر» هم فرد خواهد

بود.

فرض می‌کنیم x عددی فرد و y عددی زوج باشد، از تساوی:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

بدست می‌آید:

$$x^2 = z^2 - y^2 = (z+y)(z-y)$$

عوامل $z+y$ و $z-y$ نسبت به هم اولند، زیرا اگر این دو عدد مقسوم‌علیه مشترکی غیر از واحد داشته باشند، در این صورت مجموع آنها یعنی:

$$(z+y) + (z-y) = 2z$$

$$(z+y) - (z-y) = 2y \quad \text{و تفاضل آنها:}$$

$$(z+y)(z-y) = x^2 \quad \text{و حاصلضرب آنها:}$$

هم برای این مقسوم‌علیه مشترک قابل قسمت خواهند بود، یعنی عددهای $2z$ ، $2y$ و x مقسوم‌علیه مشترکی دارند، این مقسوم‌علیه مشترک نمی‌تواند مساوی ۲ باشد (چون x عددی است فرد) و بنابراین همان مقسوم‌علیه مشترک سه عدد x و y و z می‌شود که چیزی جز واحد نیست. به عبارت دیگر دو عدد $z+y$ و $z-y$ نسبت به هم اولند.

وقتی که حاصلضرب دو عددی که نسبت به هم اولند مجذور کامل باشد، هر يك از آنها مجذور کاملند، یعنی:

$$\begin{cases} z+y = m^2 \\ z-y = n^2 \end{cases}$$

با حل این دستگاه بدست می‌آید:

$$z = \frac{m^2 + n^2}{2} \quad ; \quad y = \frac{m^2 - n^2}{2} \quad ;$$

$$x^2 = (z+y)(z-y) = m^2 n^2 \Rightarrow x = mn$$

بنابراین عددهای فیثاغورثی به صورت زیر هستند:

$$x = mn \quad ; \quad y = \frac{m^2 - n^2}{2} \quad ; \quad z = \frac{m^2 + n^2}{2}$$

nm عددهایی فرد و نسبت به هم اولند. به سادگی معلوم می‌شود که به

ازای هر دو عدد فرد متباین از m و n ، سه عدد فیثاغورثی برای x و y

و z بدست می‌آید ...

عددهای فیثاغورثی خاصیت‌های جالب دیگری هم دارند که ما بدون اثبات، آنها را ذکر می‌کنیم:

- (۱) یکی از «ضلعهای مجاور به زاویه قائمه» مضربی است از ۳.
- (۲) یکی از «ضلعهای مجاور به زاویه قائمه» مضربی است از ۴.
- (۳) یکی از سه عدد فیثاغورثی مضربی است از ۵.

۱۵. معادله سیال درجه سوم

می‌توان سه عدد پیدا کرد که مجموع مکعبهای آنها، خود مکعب کاملی باشد، مثلاً:

$$۳^۳ + ۴^۳ + ۵^۳ = ۶^۳$$

این رابطه به معنای آن است که حجم مکعب به ضلع ۶ سانتیمتر برابر است با مجموع حجمهای سه مکعب با ضلعهای مساوی ۳ سانتیمتر، ۴ سانتیمتر و ۵ سانتیمتر (این رابطه منتسب به افلاطون است).

ببینیم می‌توانیم رابطه‌های عددی دیگری از این قبیل پیدا کنیم، یعنی باید معادله زیر را حل کنیم:

$$x^۳ + y^۳ + z^۳ = u^۳$$

بهتر است $u = -t$ بگیریم؛ در این صورت معادله به صورت زیر درمی‌آید:

$$x^۳ + y^۳ + z^۳ + t^۳ = ۰$$

این معادله هم دارای بی‌نهایت جواب صحیح (مثبت یا منفی) است، فرض کنید a, b, c, d و $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ دو گروه چهار عددی باشند که در معادله فوق صدق کنند، هر یک از چهار عدد گروه دوم را در عدد صحیح k ضرب کرده و به عددهای گروه اول اضافه می‌کنیم. k را چنان می‌گیریم که گروه چهار عددی:

$$a + k\alpha ; b + k\beta ; c + k\gamma ; d + k\delta$$

هم در معادله مفروض صدق کنند. به عبارت دیگر k را چنان می‌گیریم که تساوی زیر برقرار باشد:

$$(a+k\alpha)^2+(b+k\beta)^2+(c+k\gamma)^2+(d+k\delta)^2=0$$

پراترها را باز می‌کنیم و با توجه به اینکه گروه a, b, c, d و گروه $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ در معادله مفروض صدق می‌کنند، یعنی:

$$a^2+b^2+c^2+d^2=0; \quad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=0$$

خواهیم داشت:

$$2a^2k\alpha+2ak^2\alpha^2+2b^2k\beta+2bk^2\beta^2+2c^2k\gamma+2ck^2\gamma^2+2d^2k\delta+2dk^2\delta^2=0$$

و یا:

$$2k[(a^2\alpha+b^2\beta+c^2\gamma+d^2\delta)+k(a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2+d\delta^2)]=0$$

و این عبارت وقتی مساوی صفر می‌شود که یکی از عاملهای آن برابر صفر باشد، اگر هر يك از عاملها را مساوی صفر قرار دهیم، برای k دو مقدار بدست می‌آید. یکی $k=0$ که برای ما جالب نیست، زیرا به معنای این است که اگر به گروه چهار عددی a, b, c, d چیزی اضافه نکنیم، چهار عدد بدست می‌آید که در معادله مفروض ما صدق می‌کنند. بنابراین تنها جواب دوم را در نظر می‌گیریم:

$$k = -\frac{a^2\alpha+b^2\beta+c^2\gamma+d^2\delta}{a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2+d\delta^2}$$

به این ترتیب، اگر دو گروه چهار عددی داشته باشیم که در معادله مفروض صدق کند، می‌توان گروه چهار عددی جدیدی پیدا کرد که جواب معادله مفروض ما باشد.

برای این منظور به عددی گروه اول k برابر عددی گروه دوم را اضافه می‌کنیم، به شرطی که k را از رابطه فوق بدست آورده باشیم.

برای اینکه از این مطلب بتوانیم استفاده کنیم، باید دو گروه چهار عددی از جوابهای معادله مفروض را در دست داشته باشیم. یکی از این گروه‌ها $(3, 4, 5, -6)$ را می‌دانیم. گروه چهار عددی دوم را چگونه پیدا کنیم؟ این گروه را به سادگی می‌توان بدست آورد: برای این گروه می‌توان عددی $r, -r$ و $s, -s$ را انتخاب کرد که روشن است در معادله مفروض صدق می‌کنند، به عبارت دیگر داریم:

$$a=۳, b=۴, c=۵, d=-۶;$$

$$\alpha=r, \beta=-r, \gamma=s, \delta=-s$$

که در این صورت برای محاسبه مقدار k ، رابطه زیر را خواهیم داشت:

$$k = -\frac{-\gamma r - 11s}{\gamma r^2 - s^2} = \frac{\gamma r + 11s}{\gamma r^2 - s^2}$$

و برای عددهای $d+k\delta, c+k\gamma, b+k\beta, a+k\alpha$ به ترتیب

خواهیم داشت:

$$\frac{28r^2 + 11rs - 3s^2}{\gamma r^2 - s^2}; \frac{21r^2 - 11rs - 4s^2}{\gamma r^2 - s^2};$$

$$\frac{35r^2 + 7rs + 6s^2}{\gamma r^2 - s^2}; \frac{-42r^2 - 7rs - 5s^2}{\gamma r^2 - s^2}$$

که طبق آنچه گفتیم این چهار عدد در معادله زیر صدق می کنند:

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$$

و چون در هر چهار عدد، مخرجها برابرند، می توان از مخرجها

صرف نظر کرد (یعنی صورتهای این کسرها هم در معادله صادق خواهند بود)،

به این ترتیب جوابهای معادله ما (به ازای هر مقدار دلخواه r, s) به صورت

زیر هستند:

$$\begin{cases} x = 28r^2 + 11rs - 3s^2; \\ y = 21r^2 - 11rs - 4s^2; \\ z = 35r^2 + 7rs + 6s^2; \\ t = -42r^2 - 7rs - 5s^2 \end{cases}$$

که البته اگر مجموع مکعبهای آنها را حساب کنیم، صحت حکم محقق

می شود. اگر در این رابطه ها r, s را مقادیر صحیح دلخواه فرض کنیم،

جوابهای مختلف معادله مفروض بدست می آید. در حالتی که به ازای مقادیری

از r, s ، جوابهایی بدست آید که مقسوم علیه مشترکی داشته باشند، می توان

آنها را به این مقسوم علیه مشترک تقسیم کرد و جوابهای جدیدی بدست آورد.

مثلا به ازای $r=1, s=1$ برای x, y, z و t مقادیر زیر بدست می آید:

۳۶، ۴۸، ۵۴، - که پس از تقسیم آنها بر ۶، مقادیر ۶، ۸، ۱۰، -۹

بدست می‌آید ، بنابراین داریم :

$$۱۳+۶۳+۸۳=۹۳$$

متذکر می‌شویم که اگر در گروه چهار عددی ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ - جای عددها را عوض کنیم ، رشته جدیدی از جوابها بدست می‌آید ، مثلاً اگر چهار عدد اصلی را به صورت ۳، ۵، ۴، ۶ - بگیریم (یعنی $a=3, b=5, c=4, d=-6$) برای x و y و z و t مقادیر زیر بدست می‌آید :

$$\begin{cases} x=20r^2+10rs-3s^2 ; \\ y=12r^2-10rs-5s^2 ; \\ z=16r^2+8rs+6s^2 ; \\ t=-42r^2-7rs-4s^2 \end{cases}$$

که در این صورت به ازای مقادیر مختلف r و s جوابهای جدیدی بدست می‌آید.

تمرینها

جوابهای صحیح و مثبت معادله‌های زیر را پیدا کنید:

$$7x+5y=157 \quad 343 \quad 3x+2y=10 \quad 342$$

$$8x+11y=13 \quad 345 \quad 5x-11y=17 \quad 344$$

$$15x+28y=185 \quad 347 \quad 7x+9y=35 \quad 346$$

۳۴۸. عدد ۱۰۰ را به دو عدد مثبت چنان تبدیل کنید که یکی از آنها بر ۷ و دیگری بر ۱۱ قابل قسمت باشد.

۳۴۹. برای فرش سطحی که ۳ متر طول دارد ، از دو نوع تخته یکی به عرض ۱۱ سانتیمتر و دیگری به عرض ۱۳ سانتیمتر استفاده کرده‌ایم . طول تخته‌ها با عرض سطح برابر است. از هر نوع تخته چند عدد لازم است؟

۳۵۰. می‌خواهیم ۴۴۰ کیلوگرم گندم را در دو نوع کیسه جا دهیم . يك نوع از کیسه‌ها ۸۰ کیلوگرم و نوع دیگر ۶۰ کیلوگرم گندم می‌گیرند. از هر کیسه چند عدد لازم است؟

۳۵۱. صورت کلی عددهایی را پیدا کنید که در تقسیم بر ۷ باقیمانده ۳ و در تقسیم

بر ۱۱ باقیمانده ۴ بدهند.

۳۵۲. می‌خواهیم با ۵۰ ریال ۲۰ عدد قمبر ۴ ریالی ، ۲/۵ ریالی و ۰/۵ ریالی بخریم. از هر کدام چند عدد می‌توان خرید ؟

۳۵۳. مجموع ، تفاضل ، حاصلضرب و خارج قسمت دو عدد را با هم جمع کرده‌ایم ، عدد ۲۴۳ بدست آمده است . این عدد را پیدا کنید .

۳۵۴. عدد محیط يك مستطیل با عدد مساحت آن یکی است. اگر ضلعهای مستطیل عددهایی صحیح باشند، آنها را بدست آورید.

۳۵۵. در يك مستطیل چهار برابر مجموع طول و عرض و قطر از یکطرف و مساحت از طرف دیگر با يك عدد بیان می‌شوند، بعدهای مستطیل را بدست آورید.

۳۵۶. مطلوب است يك عدد دو رقمی که برابر مربع رقم دهگان به اضافه مکعب رقم یکان خود باشد .

معادله‌های زیر را حل کنید و جوابهای صحیح و مثبت آنها را بدست آورید:

$$2xy - 3x - 5y + 4 = 0 \quad 357$$

$$4x^2 + y^2 = 4x + 6y + 17 \quad 358$$

$$xy + 21 = 5(x + y) \quad 359$$

$$x^2 - xy + 2y = 1 \quad 360$$

$$x^2 - 2x^2 - xy - 3x + 3y = 1 \quad 361$$

$$x^2 - y^2 = 4x - 9 \quad 362$$

$$4x^2 = y^2 + 2x + 21 \quad 363$$

$$x^2 + y^2 = 3x + 4y + 19 \quad 364$$

۳۶۵. می‌خواهیم با ۱۰۰۰۰ ریال جمعی ۱۰۰ حیوان : گوسفند و مرغ و کبوتر ، بخریم. قیمت هر گوسفند ۵۰۰ ریال ، قیمت هر مرغ ۲۰۰ ریال و قیمت هر کبوتر ۱۰ ریال است ، تعداد هر يك از حیوانات را معلوم کنید.

۳۶۶. مطلوب است محاسبه يك عدد چهار رقمی که مساوی توان چهارم مجموع رقمهایش باشد .

۳۶۷. عدد چهار رقمی $\overline{medu}$ را چنان پیدا کنید که داشته باشیم:

$$\overline{medu} = (\overline{me} + \overline{du})^2$$

۳۶۸. عدد شش رقمی $\overline{meduvt}$ را چنان پیدا کنید که داشته باشیم:

$$\overline{meduvt} = (\overline{med} + \overline{uvt})^2$$

۳۶۹. ثابت کنید معادله $\Delta x^2 + 6x + 15 = y^2$ ریشهٔ صحیح ندارد.

۳۷۰. عدد سه رقمی $\overline{med}$ را چنان پیدا کنید که داشته باشیم :

$$m + d = 2c ; \overline{ed} = m^2$$

۳۷۱. ثابت کنید دستگاه
$$\begin{cases} x + y = z \\ 2xy = z \end{cases}$$
 دارای جوابهای صحیح نیست.

۳۷۲. عدد چهاررقمی $\overline{medu}$ را طوری پیدا کنید که حاصل ضرب رقمهای آن مساوی $(c - d)^2$ باشد، (هیچکدام از رقمها مساوی صفر نیستند).

۳۷۳. عدد سه رقمی $\overline{aba}$ را چنان پیدا کنید که مجذور کامل و مضرب ۱۱ باشد.

۳۷۴. جوابهای صحیح معادلهٔ زیر را پیدا کنید:

$$x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y$$

۳۷۵. رشته‌ای از عددهای صحیح و مثبت چنان نوشته‌ایم که از جمله سوم به بعد، هر جمله برابر با قدر مطلق تفاضل دو جملهٔ قبل باشد. اگر هیچیک از جمله‌های این رشته بزرگتر از ۱۹۶۷ نباشد، حداکثر تعداد جمله‌های این رشته چقدر است؟

۳۷۶. عدد شش رقمی $\overline{x\Delta 2yz1}$ را چنان پیدا کنید که هم خود عدد و هم مجموع رقمهای آن بر ۱۱ قابل قسمت باشد.

۳۷۷. به ازای چه مقادیر گویایی از x عبارت $\log_4(x^2 - 4x - 1)$ برابر با عددی صحیح است؟

۳۷۸. اگر p عددی اول باشد، جوابهای صحیح معادلهٔ زیر را بدست آورید:

$$p(x + y) = xy$$

۳۷۹. به ازای چه مقادیر گویایی از x ، حاصل عبارت $\sqrt{8x^2 - 2x - 3}$ گویاست؟

۳۸۰. مقادیر صحیح z و y را بدست آورید :

$$\begin{cases} xz = 2yt \\ x^2 - 2y^2 = 6t^2 - 3z^2 \end{cases}$$

۳۸۱. ثابت کنید معادلهٔ $3x^2 - 4y^2 = 13$ جواب صحیح ندارد.

۳۸۲. عدد چهاررقمی $\overline{abca}$ را چنان پیدا کنید که مساوی $(5c+1)^2$ باشد.
 ۳۸۳. سه عدد صحیح مثبت چنان پیدا کنید که مربعات آنها به تصاعد حسابی باشند و مجموع آنها مساوی ۳۷۶ شود.

۳۸۴. ثابت کنید که اگر عبارت ax^2+bx^2+cx+d به ازای $x=19$ مساوی ۱ و به ازای $x=62$ مساوی ۲ شود، a و b و c و d نمی توانند عددهایی صحیحی باشند.

۳۸۵. ریشه های صحیح و مثبت معادله زیر را پیدا کنید :

$$31(xyzt+xy+xt+zt+1)=40(yzt+y+t)$$

۳۸۶. جوابهای صحیح معادله زیر را بدست آورید :

$$x^4+2x^2y-x^2-y^2=7$$

۳۸۷. ریشه های صحیح دستگاه زیر را بدست آورید :

$$\begin{cases} tx=yz \\ t+x=y+z+2 \end{cases}$$

۳۸۸. ثابت کنید معادله $2x^2-5y^2=7$ جواب صحیح ندارد.

۳۸۹. ثابت کنید که عدد به صورت $121n-3$ نمی تواند به صورت حاصل ضرب دو عدد متوالی درآید.

۳۹۰. جوابهای صحیح و مثبت معادله زیر را بدست آورید:

$$4x^2y(x^2y-x+1)=15x^2+2x-1$$

۳۹۱. ریشه های صحیح دستگاه زیر را بدست آورید:

$$\begin{cases} x^2-y^2-z^2=1 \\ y+z-x=3 \end{cases}$$

۳۹۲. عدد دو رقمی پیدا کنید که مساوی مربع مجموع رقمهایش باشد.

۳۹۳. معادله زیر را حل کنید :

$$(1+2+3+\dots+n)(1^2+2^2+3^2+\dots+n^2)=m^2$$

۳۹۴. عدد سه رقمی $\overline{xyz}$ در مبنای ۷ با عدد $\overline{zyx}$ در مبنای ۹ برابر است. x و y و z را بدست آورید.

۳۹۵. مطلوب است عددی که هم خودش و هم توان چهارمش مساوی مجموع مربعات دو عدد متوالی باشد.

۳۹۶. جوابهای صحیح و مثبت n و m را پیدا کنید:

$$5^{2n-1} \times 2^{n+1} + 3^{n+1} \times 2^{2n-1} = 19m$$

۳۹۷. عدد پنج رقمی $\overline{xzyyx}$ را طوری پیدا کنید که داشته باشیم:

$$\overline{xyz} \times \overline{zyx} = \overline{xzyyx}$$

۳۹۸. تعداد جوابهای صحیح و غیر منفی معادله $5x + 2y + z = 10n$ را بدست آورید.

۳۹۹. جوابهای صحیح معادله زیر را بدست آورید (a و b اعدادی صحیح اند):

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$$

۴۰۰. دستگاه زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x! + y! = z! \\ x + y = z \end{cases}$$

۴۰۱. ثابت کنید معادله $x^2 + y^2 = 4^n$ ریشه صحیح ندارد (n عددی است صحیح).

۴۰۲. عددی در يك مبنای مجهول به صورت زیر است:

$$10111001101$$

n مَرکَبه

می‌دانیم که این عدد در مبنای ۱۰ بر ۶۱ قابل قسمت است. کوچکترین مبنای ممکنه عدد را پیدا کنید.

۴۰۳. این معادله را حل کنید:

$$1! + 2! + 3! + \dots + x! = y^2$$

۴۰۴. مطلوب است عدد n ، بشرطی که اگر عدد n رقمی بر ۷ قابل قسمت باشد، عددی که از آن با جابجا کردن رقمهای اول و آخر بدست می‌آید باز هم بر ۷ قابل قسمت باشد.

۴۰۵. ثابت کنید معادله:

$$x^x + y^y + z^z = t^t$$

برای عددهای طبیعی جواب ندارد.

۴۰۶. با پاره‌خطهای به طولهای ۷ سانتیمتر و ۱۲ سانتیمتر به چند طریق می-

توان پاره خطی به طول يك متر ساخت ؟
۴۰۷. این معادله را حل کنید :

$$\overline{xyztzy} + \overline{zyxyzt} = \overline{yxyztz}$$

۴۰۸. عدد چهار رقمی پیدا کنید که مساوی بامجدور عددی باشد که از دو رقم سمت راست آن تشکیل شده است.

۴۰۹. مسأله دیوفانت: مثلث قائم الزاویه ای با ضلعهای صحیح پیدا کنید به نحوی که تفاضل هر ضلع آن با وتر مساوی مکعب عددی صحیح باشد.



استقراء ریاضی

در کتابهای درسی از روش استقراء ریاضی گفتگویی نشده است، درحالی که بسیاری از مسأله‌های مربوط به ریاضیات مقدماتی (و هم ریاضیات عالی) با کمک این روش حل می‌شوند، بخصوص در مسأله‌های مربوط به خاصیت‌های عددها، روش استقراء ریاضی بطور وسیعی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

از طرف دیگر بسیاری از دانش‌آموزان بطور ناخودآگاه درحل بعضی از مسأله‌ها، به حالت‌های خاص مسأله می‌پردازند و در حقیقت برای بیان مقصود از استقراء ناقص استفاده می‌کنند. به همین مناسبات بحث درباره این روش ضروری بنظر می‌رسد تا هم نقص کتابهای درسی را برطرف کند و هم از استدلال‌های غیر دقیق جلوگیری نماید.

آنها که به بحث مفصل در روش استقراء ریاضی و کاربرد آن در رشته‌های مختلف ریاضی علاقمندند می‌توانند به کتابی که به همین نام ترجمه و چاپ شده است مراجعه کنند.

«ریاضی‌دان هم مانند دانشمند علوم طبیعی، وقتی که یک قانون کلی را در ریاضیات حدس می‌زند، ضمن اینکه بعضی از نتیجه‌های آنرا به محک آزمایش می‌زند، این سؤال را در مقابل طبیعت می‌گذارد «به گمان من این قانون صحیح است، ولی آیا واقعاً صحیح است؟» اگر نتیجه‌ای از قانون با صراحت رد شود قانون نمی‌تواند صحیح باشد، ولی اگر این نتیجه مورد تأیید آزمایش قرارگیرد تنها اشاره‌ای است مبنی بر اینکه ممکن است قانون صحیح باشد.

طبیعت گاهی جواب می‌دهد «بله» و گاهی «نه»؛ ولی «بله» را به صورت نجوا و مشروط می‌گوید، درحالی که «نه» را با صدای بلند و آشکارا.

د. پایا

(ریاضیات و استدلالهای مقرون به حقیقت)

۱. استقراء ناقص

اگر با جمع‌آوری مطالب جدا از هم و تجزیه و تحلیل آنها، بالاخره به یک نتیجه کلی برسیم گویند استقراء انجام گرفته است. وقتی که آزمایشهای متعدد منجر به نتیجه واحد بشود، می‌توان احتمال داد که نتیجه بدست آمده ناشی از یک نتیجه کلی است و در آزمایشهای مشابه دیگر هم، همین نتیجه به دست آید.

ولی آزمایش و جستجوی نتیجه کلی نه تنها در مواردی که آزمایش منحصر به فرد است، بلکه حتی در مواردی که تعداد آنها خیلی زیاد هم باشد، ممکن است منجر به اشتباهاتی بشود، مثلاً اگر کسی بخواهد درباره شرایط زندگی و حیات در روی زمین مطالعه کند، اگر آزمایشهای خود را در جزیره‌ای که

زندگی می‌کند انجام دهد خیلی از حقیقت دور خواهد بود، این که اهالی يك جزیره بتوانند بفهمند که در خارج از جزیره آنها مردمی زندگی می‌کنند که از لحاظ رنگ پوست و یا سایر جهتها با آنها فرق دارند، به همان اندازه درك حرکت زمین به دور خورشید مشکل است. تجربه‌های طولانی بشر کوچکترین تردیدی برای او باقی نگذاشته بود که اولاً پوست همه مردم از يك رنگ است، ثانیاً زمین در مرکز عالم قرار دارد.

و استقراء به علت همین عدم دقتی که در نتیجه گیرهایش بود، برای ریاضیات وسیله غیر قابل اطمینان و به درد نخوری به حساب می‌آمد. ولی با کمک استقراء بسیاری از خاصیت‌های عددها (که اثبات آنها خیلی طولانی و مفصل بود) بدست می‌آمد.

اولر، ریاضیدان مشهور، در مورد یکی از کشفهای خود می‌نویسد: «من هیچ استدلال دیگری بجز استقراء طولانی ندارم، آزمایشهای طولانی که انجام داده‌ام برای من شکی در صحت قانون باقی نگذاشته ... و بنظر می‌رسد که وقتی قانونی مثلاً تا برای ۲۵ مورد متوالی آن صحیح باشد غیر ممکن است برای موارد بعدی نادرست از آب درآید».

نوشته اولر نشان می‌دهد که نه تنها ریاضیدانها گاهی از استقراء استفاده می‌کرده‌اند بلکه این نوع استدلال خود را بی‌عیب هم می‌دانسته‌اند. با وجود این، آنچه که به نظر اولر غیر ممکن است محتمل است.

مثلاً حکم زیر را در نظر بگیرید:

هر عدد صحیح مثبت می‌تواند به صورت مجموع دو عدد نوشته شود که هریک از آنها یا عددی اول باشد و یا مجذور يك عدد صحیح.

اگر شما این حکم را در مورد عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ... آزمایش کنید صحت آن تأیید می‌شود:

$$۱ = ۱^2 + ۰, \quad ۲ = ۱^2 + ۱^2, \quad ۳ = ۲ + ۱^2,$$

$$۴ = ۳ + ۱^2, \quad ۵ = ۳ + ۲, \quad ۶ = ۲ + ۲^2,$$

$$۷ = ۳ + ۲^2, \quad ۸ = ۵ + ۳ = ۲^2 + ۲^2, \dots$$

و شما می‌توانید صحت این حکم را تا ۲۵ و ۵۰ و حتی ۱۰۰ تحقیق کنید. آیا برای عددهای بعداً احتیاجی به تحقیق نیست و می‌توانید نتیجه بگیرید

که این حکم همیشه صحیح است؛ مسلماً نه، مثلاً عدد ۱۲۷ را نمی‌توان به این ترتیب منظم نمود.

به این نمونه هم توجه بفرمایید:

حکم می‌کنیم که عدد $x^2 + x + 41 = A$ به ازای همه مقادیر صحیح و غیر منفی x عددی است اول. این حکم را مورد آزمایش قرار می‌دهیم:

$x=0$ $A=41$	$x=1$ $A=43$	$x=2$ $A=47$	$x=3$ $A=53$
$x=4$ $A=61$	$x=5$ $A=71$	$x=6$ $A=83$	$x=7$ $A=97$
$x=8$ $A=113$	$x=9$ $A=131$	$x=10$ $A=151$	...

و شما می‌توانید تا $x=39$ آزمایش کنید، در هر حال نتیجه $x^2 + x + 41$ عددی است اول. ولی به ازای $x=40$ مقدار $A=41 \times 41$ می‌شود و اول نیست. به ازای $x=41$ هم مقدار $A=41 \times 43$ می‌شود که اول نیست. برای عددهای بزرگتر از ۴۱ هم مثلاً به ازای $x=42$ و $x=43$ مقدار A عددی است اول و به ازای $x=44$ مقدار $A=43 \times 47$ می‌شود و اول نیست. یعنی حتی با صحت ۴۰ آزمایش اولیه هم نمی‌توان به درستی حکم را داد.

نمونه دیگری ذکر کنیم که در عین حال عجیب و باور نکردنی است. ریاضیدان مشهور شوروی «د. آ. گراو» براساس آزمایشهای زیاد و متمادی نتیجه گرفت که عدد $1 - 2p - 1$ به شرط اول بودن عدد p بر p^2 قابل قسمت نیست، ولی ظاهراً این قضیه به شرطی درست است که p کوچکتر از ۱۰۹۳ باشد، زیرا $1 - 2 \times 1093 - 1$ بر 1093^2 قابل قسمت است.

و یا مثلاً $2^n + 1$ (عدد فرما) را در نظر بگیریم. این عدد به ازای مقادیر ۳ و ۲ و ۱ برای n بترتیب عددهای ۱۷ و ۵ و ۲۵۷ را بدست می‌دهد که عددهایی اول هستند. آیا از اینجا می‌توان نتیجه گرفت که عدد فرما به ازای همه مقادیر n عددی است اول. مسلماً نه و مثلاً همانطور که اولر ثابت کرد

به ازای $n=5$ عدد فرما بر ۶۴۱ قابل قسمت است.

۲. استقراء کامل یا استقراء ریاضی

تا میانه‌های قرن هفدهم تعداد زیادی قضیه‌های استقرائی ریاضی که بعضی از آنها اشتباه هم بودند رویهم انباشته شده بود، بنابراین بطور جدی احساس می‌شد که لازم است راهی برای اثبات منطقی پیدا شود تا اگر رابطه و یا قضیه‌ای به ازای $n=1, 2, 3, \dots$ صحیح بود بتوان با قاطعیت حکم کرد که به ازای تمام عددهای طبیعی صحیح است. پس از بحثها و پیشنهادهای فراوان، بالاخره روش اساسی اثبات بدست آمد: «عبور از k به $k+1$ » که معمولاً آن را استقراء ریاضی گویند. در راه رسیدن به این روش، بیش از همه «بلز پاسکال» و «رنه دکارت» و «ژاکوب برنولی» زحمت کشیدند.

اثبات بطریق استقراء ریاضی به ترتیب زیر انجام می‌گیرد.
اولاً نتیجه را با کمک شواهد و قوانینی که وجود دارد حدس می‌زنیم.
ثانیاً صحت نتیجه را برای کوچکترین عدد ممکن (و اغلب $n=1$) آزمایش می‌کنیم.

ثالثاً این قضیه را ثابت می‌کنیم که: اگر نتیجه مورد نظر به ازای $n=k$ صحیح باشد، به ازای $n=k+1$ هم صحیح خواهد بود. با اثبات این قضیه می‌توانیم مطمئن باشیم که نتیجه به ازای هر مقدار دلخواهی از عددهای طبیعی صحیح است، زیرا به ازای ۱ صحیح بود، پس به ازای $2=1+1$ نیز صحیح خواهد بود. چون به ازای ۲ صحیح است پس به ازای $3=2+1$ صحیح خواهد بود و غیره.

ساختمان يك پله‌كان را در نظر خود مجسم كنید. اولین پله بر سطح زمین قرار دارد، روی این پله می‌توانیم پله دوم را بسازیم، وقتی که پله دوم آماده شد، می‌توانیم پله سوم را بنا کنیم و غیره. با آماده بودن هر پله همیشه می‌توان پله بعدی را ساخت. روش استقراء ریاضی ثابت می‌کند که ساختمان پله‌كان می‌تواند تا بی‌نهایت ادامه یابد.

اکنون به ذکر چند مثال می پردازیم که می توان آنها را به کمک روش استقراء ریاضی به نتیجه رسانید. از رابطه عمومی تصاعد حسابی شروع می کنیم:

$$a_1 = a_1, \quad a_2 = a_1 + d, \quad a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d;$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$

تا همین جا کافی است که بتوانیم رابطه کلی را حدس بزنیم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

که صحت آنرا باید به طریق عبور از $n=k$ به $n=k+1$ ثابت کرد.

فرض می کنیم که رابطه مفروض به ازای $n=k$ صحیح باشد:

$$a_k = a_1 + (k-1)d$$

طبق تعریف تصاعد حسابی داریم:

$$a_{k+1} = a_k + d = a_1 + kd$$

و اگر در رابطه جمله عمومی تصاعد حسابی هم بجای n عدد $k+1$

را قرار دهیم همین نتیجه بدست می آید:

$$a_{k+1} = a_1 + (k+1-1)d = a_1 + kd$$

و به این ترتیب رابطه ثابت شد.

مثال دیگری ذکر کنیم، مطلوب است محاسبه مجموع زیر:

$$S_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

ابتدا سعی می کنیم مجموع را حدس بزنیم:

$$S_1 = \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = S_1 + \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$S_3 = S_2 + \frac{1}{3 \times 4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$$

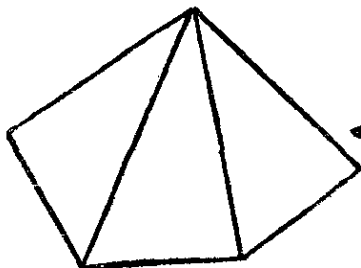
حدس می زنیم: $S_n = \frac{n}{n+1}$ باشد. آیا این حدس صحیح است؟

فرض می‌کنیم $S_k = \frac{k}{k+1}$ باشد، ثابت می‌کنیم $S_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$ است. داریم:

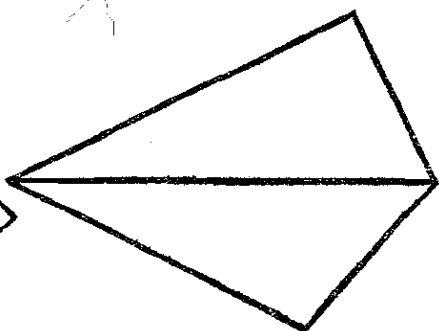
$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

و به این ترتیب حدس به یقین تبدیل می‌شود و ما توانستیم S_n را باروش استقراء ریاضی بدست آوریم.

حالا مثالی از هندسه می‌آوریم. فرض کنید بخواهیم رابطه‌ای برای مجموع زاویه‌های داخلی يك چند ضلعی محدب پیدا کنیم.



شکل ۳



شکل ۲

مجموع زاویه‌های داخلی يك مثلث برابر است با 180° درجه، مجموع زوایای داخلی يك چهار ضلعی برابر است با $2 \times 180^\circ$ درجه، زیرا چهار ضلعی را می‌توان به دو مثلث تبدیل کرد (شکل ۲).

پنج ضلعی را می‌توان به سه مثلث تبدیل کرد (شکل ۳) و بنابراین مجموع زاویه‌های آن برابر است با $3 \times 180^\circ$ درجه و برای شش ضلعی $4 \times 180^\circ$ درجه و غیره. این محاسبه‌ها نشان می‌دهد که رابطه‌ی مربوط به مجموع زاویه‌های داخلی يك n ضلعی محدب باید مساوی $(n-2)180^\circ$ درجه باشد.

این رابطه را ثابت می‌کنیم. فرض کنید که رابطه به ازای $n=k$ صحیح

باشد. يك $(k+1)$ ضلعی در نظر می گیریم و سه رأس متوالی آنرا انتخاب و رأس اول را به رأس سوم وصل می کنیم، به این ترتیب $(k+1)$ ضلعی به يك مثلث و k ضلعی تقسیم می شود و مجموع زاویه های $(k+1)$ ضلعی مساوی مجموع زاویه های k ضلعی و مثلث خواهد بود. مجموع زاویه های داخلی k ضلعی طبق فرض مساوی $180(k-2)$ درجه و مجموع زاویه های مثلث مساوی 180 درجه است و بنابراین مجموع زاویه های داخلی $(k+1)$ ضلعی مساوی :

$$(k-1)180 = 180 + 180(k-2)$$

خواهد بود. به این ترتیب قضیه ثابت شد، زیرا اگر در رابطه مورد حدس هم $n=k+1$ قرار دهیم همین رابطه $180(k-1) = 180 + 180(k-2)$ بدست می آید.

نمونه دیگری از هندسه :

می خواهیم تعداد قطرهای يك n ضلعی را بدست آوریم .

داریم : $0 = \text{تعداد قطرهای سه ضلعی}$

$$2 = \text{تعداد قطرهای چهار ضلعی}$$

$$5 = \text{تعداد قطرهای پنج ضلعی}$$

رابطه کلی برای تعداد قطرهای n ضلعی باید چنان باشد که به ازای $n=3$ برابر صفر شود، بنابراین در رابطه کلی عامل $(n-3)$ وجود دارد. یعنی رابطه کلی به صورت $f(n) = (n-3)$ است. چون تعداد قطرهای چهار ضلعی مساوی ۲ شده است پس باید $f(2) = 2$ شود. اگر $f(n)$ مقدار ثابتی باشد (یعنی به n بستگی نداشته باشد) باید همان عدد ۲ باشد و اگر $f(n)$ نسبت به n درجه اول باشد می تواند مثلاً $\frac{n}{2}$ باشد (که به ازای $n=4$ برابر ۲ شود). $f(n)$ مقدار ثابت ۲ نیست زیرا در این صورت $2(n-3)$ به ازای

$$n=5 \text{ برابر } 5 \text{ نمی شود، ولی اگر } f(n) \text{ را برابر } \frac{n}{2} \text{ بگیریم } \frac{n}{2}(n-3)$$

به ازای $n=5$ برابر ۵ می شود. بنابراین اگر تعداد قطرهای يك n ضلعی را با d_n نشان دهیم. احتمالاً خواهیم داشت:

$$d_n = \frac{n}{2}(n-3)$$

این رابطه را ثابت می‌کنیم. فرض می‌کنیم به‌ازای $n=k$ صحیح باشد:

$$d_k = \frac{k}{2}(k-3)$$

برای اینکه يك k ضلعی به $(k+1)$ ضلعی تبدیل شود، مثلاً می‌توان در طرف بیرون یکی از ضلعها نقطه‌ای انتخاب و به انتهای همان ضلع وصل کرد. در این صورت خود این ضلع یکی از قطرهای $(k+1)$ ضلعی می‌شود و ضمناً می‌توان از رأس جدید به همه رأسهای غیر مجاورش (یعنی $k-2$ رأس) وصل کرد تا بقیه قطرهای جدید بدست آید. در این صورت $k-1$ قطر جدید خواهیم داشت و از آنجا:

$$\begin{aligned} d_{k+1} &= d_k + (k-1) = \frac{k}{2}(k-3) + (k-1) = \\ &= \frac{1}{2}(k^2 - k - 2) = \frac{k+1}{2}[(k+1)-3] \end{aligned}$$

و به‌این ترتیب رابطه $d_n = \frac{n}{2}(n-3)$ ثابت شد.

حالا روش استقراء ریاضی را برای اثبات نامساوی زیر بکار می‌بریم:

$$|\sin nx| \leq n |\sin x|$$

اگر در موارد قبل می‌بایستی رابطه مورد نظر را قبل از اثبات حدس بزنیم، در اینجا رابطه آماده است و ما تنها باید به اثبات صحت آن پردازیم. ابتدا صحت نامساوی را به‌ازای $n=1$ تحقیق می‌کنیم (در نمونه‌های قبل تحقیق صحت رابطه برای کمترین مقدار ضمن «حدس» رابطه اصلی انجام گرفته بود):

$$|\sin x| \leq 1 |\sin x|$$

و به‌این ترتیب قضیه به‌ازای $n=1$ صحیح است.

حالا فرض می‌کنیم که نامساوی به‌ازای $n=k$ برقرار باشد:

$$|\sin kx| \leq k |\sin x|$$

در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} |\sin(k+1)x| &= |\sin kx \cos x + \cos kx \sin x| \leq \\ &\leq |\sin kx \cos x| + |\cos kx \sin x| \leq \\ &\leq |\sin kx| + |\sin x| \leq k |\sin x| + |\sin x| = (k+1) |\sin x| \end{aligned}$$

و به این ترتیب صحت نامساوی اثبات شد. (در اثبات این نامساوی از این مطلب استفاده کردیم که قدر مطلق مجموع چند عدد بزرگتر از مجموع قدر مطلقهای آنها نیست و اینکه کسینوس از لحاظ قدر مطلق از واحد بزرگتر نیست).

۳. اشتباه نکنید

استقراء ریاضی در همه رشته‌های ریاضی: حساب، جبر، هندسه و مثلثات بطور وسیعی مورد استعمال دارد و ریاضیات عالی هم همیشه از کمک استقراء ریاضی برخوردار خواهد بود و به هر حال امروزه استقراء ریاضی یکی از پر قدرت‌ترین روشهای اثبات در ریاضی می‌باشد. ولی فراموش نکنید که استفاده از استقراء ریاضی باید با دقت و در کمال احتیاط انجام گیرد. برای درک این مطلب به «اثبات» این «قضیه» می‌پردازیم که: «در جهان آدم ریشو وجود ندارد».

قضیه را برای $n=1$ آزمایش می‌کنیم. اگر مردی تنها يك مو در صورتش رویده باشد، البته، نمی‌توان گفت که ریش دارد.

فرض می‌کنیم که حکم به‌ازای $n=k$ صحیح باشد واضح است که اگر مردی با k عدد مو بدون ریش باشد با اضافه شدن يك مو هم ریش نخواهد داشت، یعنی به‌ازای $n=k+1$ هم بدون ریش خواهد بود. یعنی بطور کلی مردی که ریش داشته باشد، وجود ندارد.

استدلال بدون اشتباه انجام شد ولی نتیجه آن نادرست است. البته اشتباه در این نیست که موهای ریش یکی پس از دیگری نمی‌رویند (آنطور که در استدلال ریاضی در نظر گرفتیم) بلکه اشتباه در اینجاست که ما استدلال را از نبودن ریش شروع کردیم، بدون اینکه آنرا تعریف کنیم. قبل از همه باید از تعریف ریش شروع کنیم و سپس روش استقراء ریاضی را در مورد آن بکار ببریم. ولی تعریف کمی (یعنی از لحاظ مقدار) برای ریش نمی‌توان پیدا کرد. همچنین نباید تصور کرد که هر حکم کلی مثلاً دربارهٔ عددها را می‌توان

با روش استقراء ریاضی به نتیجه رساند. چه بسیارند حکمهای کلی که یاتن به استقراء ریاضی نمی‌دهند و یا با استفاده از این روش به‌دور تسلسلی برمی‌خورند که عملاً منجر به نتیجه نمی‌شود.

۴. روشهای دیگر استقراء ریاضی

روش استقراء ریاضی در همه موارد ممکن، به‌نحو ساده «عبور از k به $k+1$ » انجام نمی‌گیرد. به دو نمونه زیر توجه بفرمایید.

می‌خواهیم ثابت کنیم مجموع توانهای متشابه ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 + px + q = 0$ بر حسب ضریبها p و q قابل بیان است.

اگر فرض کنیم $x_1^n + x_2^n = S_n$ ، به‌ازای $n=1$ داریم:

$$x_1 + x_2 = -p$$

و به‌ازای $n=2$:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 - 2q$$

اکنون اگر دو طرف معادله درجه دوم را در x^{n-2} ضرب و سپس ریشه‌های x_1 و x_2 را در آن قرار دهیم می‌شود:

$$x_1^n + px_1^{n-1} + qx_1^{n-2} = 0$$

$$x_2^n + px_2^{n-1} + qx_2^{n-2} = 0$$

و از جمع این دو رابطه خواهیم داشت:

$$S_n + pS_{n-1} + qS_{n-2} = 0$$

این رابطه که به رابطه برگشتی (و یا رابطه کاهشی) مشهور است نشان

می‌دهد که اگر S_{n-1} و S_{n-2} بر حسب ضریبها قابل بیان باشد، S_n هم بر حسب این ضریبها قابل بیان خواهد بود.

همانطور که دیده می‌شود در اینجا «عبور از $k-2$ و $k-1$ به k ،

مطرح است، نه «عبور از $k-1$ به k ».

به عنوان نمونه دوم ثابت می‌کنیم که واسطه حسابی n عدد مثبت از

واسطه هندسی آنها کوچکتر نیست، یعنی:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} > \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}$$

ابتدا برای $n=2$ ثابت می‌کنیم:

$$\frac{a_1 + a_2}{2} > \sqrt{a_1 a_2} \Rightarrow (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 > 0$$

که واضح است.

حالا ثابت می‌کنیم که اگر نامساوی برای $n=k$ صحیح باشد، برای

$n=2k$ هم صحیح است.

طبق فرض داریم:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k} > \sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_k}$$

و باید ثابت کنیم:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{2k-1} + a_{2k}}{2k} >$$

$$\sqrt[2k]{a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_{2k-1} a_{2k}}$$

سمت چپ نامساوی را به ترتیب چنین می‌نویسیم:

$$\frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2} + \dots + \frac{a_{2k-1} + a_{2k}}{2}}{k} = A$$

این کسر واسطهٔ حسابی k عدد مثبت است و بنابراین طبق فرض داریم:

$$A > \sqrt[k]{\frac{a_1 + a_2}{2} \times \frac{a_3 + a_4}{2} \times \dots \times \frac{a_{2k-1} + a_{2k}}{2}} >$$

$$> \sqrt[k]{\sqrt{a_1 a_2} \sqrt{a_3 a_4} \dots \sqrt{a_{2k-1} a_{2k}}} = \sqrt[2k]{a_1 a_2 \dots a_{2k}}$$

و چون نامساوی را برای $n=2$ ثابت کردیم پس برای $n=4$ و

$n=8, \dots, n=2k$ صحیح است.

حالا به اثبات نامساوی برای هر مقدار دلخواه n می‌پردازیم. فرض

می‌کنیم:

$$n+q=2k$$

طبق آنچه ثابت کردیم نامساوی برای $(n+q)$ عدد صحیح است:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+q}}{n+q} > \sqrt[n+q]{a_1 a_2 \dots a_n \dots a_{n+q}} \quad (۱)$$

برای سهولت کار فرض می‌کنیم:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = P \quad \text{و} \quad \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = S$$

اگر فرض کنیم: $a_{n+1} = a_{n+2} = \dots = a_{n+q} = S$

نامساوی (۱) به این صورت در می‌آید:

$$\frac{nS + qS}{n+q} > \sqrt[n+q]{P^n \cdot S^q}$$

$$S > \sqrt[n+q]{P^n \cdot S^q} \quad \text{و یا:}$$

که اگر دو طرف را به توان $n+q$ برسانیم پس از ساده کردن چنین

می‌شود:

$$S > P$$

و حکم ثابت است.

تمرینها:

حکهای زیر را با روش استقراء ریاضی ثابت کنید (n عددی طبیعی است).

$$\frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \dots + \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} = \frac{n}{a(a+n)} \quad ۴۱۰$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2 \quad ۴۱۱$$

$$1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \dots + n \times n! = (n+1)! - 1 \quad ۴۱۲$$

$$\cos X \cdot \cos 2X \cdot \cos 4X \cdots \cos 2^n X = \frac{\sin 2^{n+1} X}{2^{n+1} \sin X} \quad .۴۱۳$$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24} \quad (n > 1) \quad .۴۱۴$$

۴۱۵. ثابت کنید که می توان $x^n + \frac{1}{x^n}$ را به صورت کثیر الجمله ای از درجه

n نسبت به توانهای $x + \frac{1}{x}$ نوشت. ضمناً وقتی که n فرد باشد، تمام توانهای چندجمله ای حاصل فرد است و وقتی که n زوج باشد، تمام توانهای چندجمله ای حاصل زوج است.

۴۱۶. آیا $n^2 + n + 17$ به ازای مقادیر صحیح n عددی است اول.

۴۱۷. ثابت کنید عدد $1 + 2^{2^n} + 4^{2^n}$ به ازای مقادیر صحیح و مثبت n بر ۷ قابل قسمت است.

مشتق مرتبه n ام هر يك از تابعهای زیر را بدست آورید :

$$y = \frac{1}{x^2 - a^2} \quad .۴۱۹ \qquad y = \frac{1}{x + a} \quad .۴۱۸$$

$$y = \sin x \quad .۴۲۰$$

ثابت کنید (n عددی طبیعی است) :

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} \quad .۴۲۱$$

$$.۴۲۲$$

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdots \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right] = \frac{n+2}{2(n+1)}$$

$$\frac{0}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n-1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!} \quad .۴۲۳$$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + \cdots + \left(x^n - \frac{1}{x^n}\right)^2 = \quad .۴۲۴$$

$$= \frac{1}{x^2 - 1} \left(x^{2n+2} - \frac{1}{x^{2n}}\right) - 2n - 1$$

$$\frac{1}{1 \times 2 \times 5} + \frac{1}{2 \times 5 \times 7} + \dots + \quad .۴۲۵$$

$$+ \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}$$

$$\frac{1}{1 \times 5} + \frac{1}{5 \times 9} + \frac{1}{9 \times 13} + \dots + \quad .۴۲۶$$

$$+ \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$$

$$\frac{1^2}{1 \times 2} + \frac{2^2}{2 \times 5} + \frac{3^2}{5 \times 7} + \dots + \quad .۴۲۷$$

$$+ \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1 \quad .۴۲۸$$

$$2^{n-1}(a^n + b^n) \geq (a+b)^n \quad .۴۲۹$$

a و b مقادیری مثبت هستند.

۴۳۰. ثابت کنید که مجموع مکعبهای سه عدد متوالی بر ۹ قابل قسمت است.

۴۳۱. ثابت کنید که به ازای هر مقدار x عبارت $x^5 - 5x^3 - 4x$ بر ۱۲۰ قابل قسمت است.

۴۳۲. در تقسیم $1 - x^2$ بر $1 - 2x \cos \alpha + x^2$ ، اگر خارج قسمت را بر حسب توانهای صعودی x منظم کنیم، جمله شامل x^n خارج قسمت را پیدا کنید و صورت کلی باقیمانده را بنویسید.

۴۳۳. ثابت کنید (n عددی طبیعی است):

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 3\alpha + \dots + \operatorname{tg} (n-1)\alpha \operatorname{tg} n\alpha = \frac{\operatorname{tg} n\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} - n$$

ثابت کنید (n عددی است طبیعی):

.۴۳۴

$$1 \times 4 + 2 \times 7 + 3 \times 10 + \dots + n(3n+1) = n(n+1)^2$$

$$\sum_{m=1}^n m(m+1)(m+2)\dots(m+p) = \quad .۴۳۵$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{p+2} n(n+1)(n+2)\dots(n+p+1) \\
 x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n &= \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2} \quad (x \neq 1) \quad .۴۳۶
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{a+1}{2} + \frac{a+3}{4} + \frac{a+5}{8} + \dots + \frac{a+2^n-1}{2^n} &= \frac{(a-1)(2^n-1)}{2^n} + n \quad .۴۳۷
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \dots + \frac{2^n}{1+x^{2^n}} &= \frac{1}{x-1} + \frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}} \quad (|x| \neq 1) \quad .۴۳۸
 \end{aligned}$$

۴۳۹. ثابت کنید عدد $11^{n+2} + 12^{2n+1} + 13^n$ (عددی طبیعی است) بر ۱۳۳ قابل قسمت است.

$$۱^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \text{ثابت کنید :} \quad .۴۴۰$$

۴۴۱. ثابت کنید عدد $3^{2k+1} + 40k - 67$ (عددی طبیعی است) بر ۶۴ قابل قسمت است.

۴۴۲. ثابت کنید عدد $25n+2 + 5n \cdot 3n+2$ بر ۱۷ قابل قسمت است (n عددی طبیعی است).

۴۴۳. ثابت کنید عدد $6^{2n} + 3n+2 + 3^n$ بر ۱۱ قابل قسمت است (n عددی طبیعی است).

۴۴۴. ثابت کنید عدد $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$ بر ۲۴ قابل قسمت است (n عددی طبیعی است).

۴۴۵. ثابت کنید عدد $2n+5 \cdot 3^{2n} + 5^{2n}+1$ بر ۳۷ قابل قسمت است (n عددی طبیعی است).

۴۴۶. ثابت کنید عدد $7^{n+2} + 8^{2n}+1$ بر ۵۷ قابل قسمت است (n عددی طبیعی است).

۴۴۷. ثابت کنید عدد $3^{2n}+2 \cdot 5^{2n} - 3^{2n}+2 \cdot 2^{2n}$ بر ۱۰۵۳ قابل قسمت است (n عددی طبیعی است).

۴۴۸. ثابت کنید عدد $n^6 - 3n^5 + 6n^4 - 7n^3 + 5n^2 - 2n$ بر ۲۴ قابل قسمت است (n عددی طبیعی است).

با فرض $a_0 = 1$ و $a_1 = 1$ و رابطهٔ برکستی $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ به ترتیب عددهای ۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ۲۱، ۳۴، ... بدست می آید که دنبالهٔ فیبوناچی نامیده می شود. برای دنبالهٔ فیبوناچی رابطه های زیر را ثابت کنید:

$$a_{2n+2} = a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2n+1} + 1 \quad .449$$

$$a_n^2 - a_{n-1} \cdot a_{n+1} = (-1)^n \quad .450$$

$$a_{n+2} = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + 1 \quad .451$$

$$a_{2n+1} = 1 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2n} \quad .452$$

$$a_{n+1} = a_{n-1} \cdot a_n + a_n \cdot a_{n-2} \quad .453$$

۴۵۴. دنبالهٔ عددی

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

با شرطهای $a_0 = 2$ و $a_1 = 3$ و $a_{n+1} = a_n \cdot a_{n-1} - a_0$ مشخص شده است ثابت کنید:

$$a_n = 2^n + 1$$

۴۵۵. دنبالهٔ «زوج عددهای» زیر داده شده است:

$$(a, b); (a_1, b_1); (a_2, b_2); \dots; (a_n, b_n)$$

این زوج عددها با شرطهای زیر مشخص شده اند:

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \quad b_1 = \frac{a_1+b}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2},$$

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+1}+b_n}{2}$$

ثابت کنید:

$$a_n = a + \frac{2}{3} \left(b - a \right) \left(1 - \frac{1}{4^n} \right)$$

$$b_n = a + \frac{2}{3} \left(b - a \right) \left(1 + \frac{1}{4 \times 4^n} \right)$$

۴۵۶. دنبالهٔ عددی

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

با شرطهای $a_1 = b$ ، $a_n = a$ و $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$ داده شده است. ثابت کنید :

$$a_n = \frac{a + 2b}{3} + (-1)^{n-1} \cdot \frac{b-a}{3 \times 2^{n-1}}$$

۴۵۷. ثابت کنید :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \dots + \frac{1}{100}$$

۴۵۸. ثابت کنید :

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n)^2 = x^{2n} + 2x^{2n-1} + 3x^{2n-2} + \dots + (n+1)x^n + nx^{n-1} + \dots + 2x^2 + 2x + 1$$

۴۵۹. حاصلضرب زیر را پیدا کنید:

$$P = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{4^4} \cdot \frac{1}{8^8} \cdot \frac{1}{16^{16}} \dots$$

۴۶۰. دنباله عددی

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

با شرطهای $a_1 = 2$ و $a_{n+1} = 3a_n + 1$ داده شده است. ثابت کنید:

$$a_n = \frac{1}{2}(\Delta \cdot 3^{n-1} - 1)$$

۴۶۱. ثابت کنید برای دنباله فیبوناچی رابطه زیر برقرار است :

$$a_n \cdot a_{n+1} = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$$

۴۶۲. ثابت کنید که اگر داشته باشیم : $(2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$ ، به

ازای هر عدد طبیعی n خواهیم داشت : $a_n^2 - 3b_n^2 = 1$

۹

کسره‌های مسلسل

اهمیت اصلی کسره‌های مسلسل در محاسبه‌های تقریبی است. متأسفانه در برنامه دبیرستانی حتی اشاره‌ای هم به آنها نشده است. برای اینکه دانش‌آموزان علاقمند و کنجکاو با روشهای کسره‌های مسلسل آشنا شوند ، ما این بخش را به کتاب افزوده ایم .

۱. تعریف

کسر مسلسل به کسری گفته می‌شود که به صورت زیر باشد:

$$a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

که در آن عدد صحیح a با کسری جمع شده است که صورت آن واحد است و در مخرج عدد صحیح a_1 با کسری جمع شده است که در صورتش واحد و در مخرجش عدد صحیح a_2 جمع شده است با کسر... تا آخر (تمام عددها صحیح، مثبت فرض شده است).

کسرهای $\frac{a}{1}, \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \dots$ را «کسرهای اصلی» می‌نامیم.

کسر مسلسل فوق را به‌طور خلاصه به صورت زیر نمایش می‌دهند:

$$(a, a_1, a_2, a_3, \dots)$$

مثلا کسرهای:

$$3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}} ; \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{17}}}$$

را بطور خلاصه به صورت $(3, 2, 1, 3)$ و $(5, 2, 1, 17)$ می‌نویسیم.

۲. تبدیل کسر مسلسل به کسر معمولی

هر کسر مسلسل را می‌توان به کسر معمولی تبدیل کرد، برای این

منظور کافی است عملیاتی را که در کسر وجود دارد انجام دهیم. مثلاً فرض کنید کسر زیر را داشته باشیم:

$$(2, 3, 1, 4) = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}}$$

باید عملهای زیر را انجام دهیم :

$$1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} ; 1 : \frac{5}{4} = \frac{4}{5} ; 3 + \frac{4}{5} = \frac{19}{5} ;$$

$$1 : \frac{19}{5} = \frac{5}{19} ; 2 + \frac{5}{19} = \frac{43}{19}$$

و این يك کسر معمولی است که مقدار آن دقیقاً برابر است با کسر مسلسل مورد نظر.

۳. تبدیل کسر معمولی به کسر مسلسل

هر کسر معمولی را می‌توان به کسر مسلسل تبدیل کرد، کسر $\frac{A}{B}$ را در نظر می‌گیریم ، ابتدا مقدار صحیح کسر را خارج می‌کنیم (رفع) ، به دست می‌آید :

$$\frac{A}{B} = a + \frac{r}{B}$$

که در آن a خارج قسمت صحیح A بر B و r باقیماندهٔ این تقسیم است (اگر A از B کوچکتر باشد $a=0$ و $r=A$ خواهد شد).

$$\frac{r}{B} = \frac{1}{B : r} = \frac{1}{a_1 + \frac{r_1}{r}}$$

که در آن a_1 خارج قسمت صحیح و r_1 باقیماندهٔ تقسیم B بر r است.

حالا دوباره صورت و مخرج کسر $\frac{r_1}{r}$ را بر r_1 تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{r_1}{r} = \frac{1}{r:r_1} = \frac{1}{a_1 + \frac{r_2}{r_1}}$$

که در آن a_1 خارج قسمت صحیح و r_2 باقیمانده تقسیم r بر r_1 است. با ادامه این روش به ترتیب خواهیم داشت:

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{r_1:r_2} = \frac{1}{a_2 + \frac{r_3}{r_2}};$$

$$\frac{r_3}{r_2} = \frac{1}{r_2:r_3} = \frac{1}{a_3 + \frac{r_4}{r_3}}; \dots$$

و چون داریم:

$$B > r > r_1 > r_2 > r_3 > \dots$$

با ادامه این روش به جایی خواهیم رسید که باقیمانده ای مساوی صفر داشته باشیم. فرض کنید $r_n = 0$ باشد، یعنی:

$$\frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} = \frac{1}{a_n}$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{A}{B} &= a + \frac{r}{B} = a + \frac{1}{a_1 + \frac{r_1}{r}} = a + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{r_2}{r_2}}} = \\ &= a + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}} \end{aligned}$$

از آنچه گفتیم نتیجه می شود که $a, a_1, a_2, \dots, a_n$ خارج قسمتهای صحیحی هستند که به ترتیب از تقسیم A بر B ، سپس B بر اولین باقیمانده و بعد اولین باقیمانده بر باقیمانده دوم و غیره بدست می آید. به عبارت دیگر اینها خارج قسمتهایی است که ضمن جستجوی برگزین مقسوم علیه مشترک بین A و B (از راه تقسیمهای متوالی) بدست می آید. به همین

مناسبت، عددهای $a, a_1, a_2, \dots, a_n$ را خارج قسمتهای کسر مسلسل گویند.

مثال ۱. کسر $\frac{40}{17}$ را به کسر مسلسل تبدیل کنید.

حل. داریم:

$$\begin{array}{r|rr|rr} & 2 & 2 & 1 & 5 \\ \hline 40 & 17 & 6 & 5 & 1 \\ \hline 6 & 5 & 1 & 0 & \end{array}$$

و از آنجا:

$$\frac{40}{17} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}}$$

مثال ۲. کسر $\frac{7}{120}$ را به کسر مسلسل تبدیل کنید.

حل. داریم:

$$\begin{array}{r|rr} & 17 & 7 \\ \hline 120 & 7 & 1 \\ \hline 1 & 0 & \end{array} \Rightarrow \frac{7}{120} = \frac{1}{17 + \frac{1}{7}}$$

۴. کسرهای متقارب

اگر در يك کسر مسلسل، چند حلقه اول را انتخاب کنیم و از بقیه صرف نظر نماییم، خود کسر مسلسلی خواهد بود که اگر آنرا به کسر معمولی تبدیل کنیم کسر متقارب نامیده می شود. اولین کسر متقارب وقتی بدست می آید که تنها حلقه اول را انتخاب کنیم، دومین کسر متقارب با انتخاب دو حلقه اول و غیره بدست می آید. به این ترتیب مثلاً در مورد کسر مسلسل زیر:

$$3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7}}}$$

اولین کسر متقارب برابر است با $\frac{3}{1}$;

دومین کسر متقارب برابر است با : $3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$;

سومین کسر متقارب برابر است با : $3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}} = \frac{10}{3}$;

و در این مثال چهارمین کسر متقارب ، همان مقدار واقعی کسر مسلسل

یعنی $\frac{27}{8}$ است .

وقتی که در یک کسر مسلسل عدد صحیح وجود نداشته باشد ، اولین کسر

مقارب مساوی صفر خواهد بود.

۵. قانون تشکیل کسرهای متقارب

برای کسر متقارب $(a, a_1, a_2, \dots, a_n)$ سه کسر اولیه متقارب را

تشکیل می دهیم:

$$۱) \quad \frac{a}{1} \quad ۲) \quad a + \frac{1}{a_1} = \frac{aa_1 + 1}{a_1} ,$$

$$\begin{aligned} ۳) \quad a + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} &= a + \frac{1}{\frac{a_1 a_2 + 1}{a_2}} = a + \frac{a_2}{a_1 a_2 + 1} = \\ &= \frac{aa_1 a_2 + a + a_2}{a_1 a_2 + 1} = \frac{(aa_1 + 1)a_2 + a}{a_1 a_2 + 1} \end{aligned}$$

با مقایسه کسر متقارب سوم با دو کسر متقارب اول، نتیجه می گیریم که صورت کسر سوم را می توان به این ترتیب بدست آورد که صورت کسر متقارب دوم را در خارج قسمت مربوط (یعنی در a_2) ضرب و به حاصل ضرب، صورت کسر اول را اضافه کنیم. درست به همین ترتیب می توان مخرج کسر سوم را با کمک مخرجهای دو کسر اول بدست آورد.

ثابت می کنیم که این قانون را می توان برای محاسبه همه کسرهای

متقارب بکار برد، یعنی ثابت می‌کنیم که بطور کلی صورت $(n+1)$ امین کسر متقارب را می‌توان به این ترتیب بدست آورد که صورت کسر متقارب n ام را در خارج قسمت مربوط، یعنی در a_n ، ضرب و حاصلضرب را با صورت کسر $(n-1)$ ام جمع کنیم. بهمین ترتیب هم می‌توان مخرج کسر $(n+1)$ ام را با کمک مخرجهای کسره‌های n ام و $(n-1)$ ام بدست آورد. اثبات را با روش استقراء ریاضی انجام می‌دهیم. یعنی ثابت می‌کنیم که اگر این قانون برای کسر n ام صحیح باشد، برای کسر $(n+1)$ ام هم صحیح خواهد بود.

کسره‌های متقارب متوالی را به ترتیب زیر نشان می‌دهیم:

$$\frac{P_1}{Q_1}; \frac{P_2}{Q_2}; \frac{P_3}{Q_3}; \dots; \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}; \frac{P_n}{Q_n}; \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$$

خارج قسمتهای متناظر آنها به ترتیب چنین هستند:

$$a; a_1; a_2; \dots; a_{n-2}; a_{n-1}; a_n$$

فرض می‌کنیم که تساویهای زیر صحیح باشند:

$$\begin{cases} P_n = P_{n-1} \cdot a_{n-1} + P_{n-2} \\ Q_n = Q_{n-1} \cdot a_{n-1} + Q_{n-2} \end{cases} \quad (1)$$

و بنابراین:

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n-1} \cdot a_{n-1} + P_{n-2}}{Q_{n-1} \cdot a_{n-1} + Q_{n-2}} \quad (2)$$

باید ثابت کنیم که در اینصورت خواهیم داشت:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n \cdot a_n + P_{n-1}}{Q_n \cdot a_n + Q_{n-1}} \quad (3)$$

با مقایسه کسره‌های متقارب:

$$\frac{P_n}{Q_n} = a + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}$$

$$\dots + \frac{1}{a_{n-1}}$$

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = a + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}$$

نتیجه می گیریم که برای محاسبه کسر متقارب $(n+1)$ ام باید در کسر

مقارب n ام، عدد a_{n-1} را به مجموع $a_{n-1} + \frac{1}{a_n}$ تبدیل کرد.

بنابراین از رابطه (۲) بدست می آید:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_{n-1} \left(a_{n-1} + \frac{1}{a_n} \right) + P_{n-2}}{Q_{n-1} \left(a_{n-1} + \frac{1}{a_n} \right) + Q_{n-2}}$$

پرانترها را باز و صورت و مخرج را در a_n ضرب می کنیم، می شود:

$$\begin{aligned} \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} &= \frac{P_{n-1} a_n + P_{n-2} + P_{n-1}}{Q_{n-1} a_n + Q_{n-2} + Q_{n-1}} = \\ &= \frac{(P_{n-1} a_n + P_{n-2}) + P_{n-1}}{(Q_{n-1} a_n + Q_{n-2}) + Q_{n-1}} \end{aligned}$$

که اگر رابطه (۱) را در نظر بگیریم، بالاخره بدست می آید:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n a_n + P_{n-1}}{Q_n a_n + Q_{n-1}}$$

و این همان رابطه (۳) است که می خواستیم ثابت کنیم.

به این ترتیب اگر تساوی (۳) برای کسر متقارب n ام صحیح باشد،

برای کسر متقارب $(n+1)$ ام نیز صحیح خواهد بود. ولی بلافاصله دیده

می شود که این تساوی برای کسر متقارب سوم صحیح است، بنابراین طبق

استدلال بالا برای کسر متقارب چهارم و سپس کسر متقارب پنجم و غیره

صحیح خواهد بود.

با استفاده از این قانون همه کسرهای متقارب را در مورد مثال زیر

معین می کنیم:

$$x = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}}}}}$$

نتیجه محاسبه را در جدول زیر منظم کرده ایم :

		۳	۲	۳	۱	۵
۲	۳	۱۱	۲۵	۸۶	۱۱۱	۶۴۱
۱	۱	۴	۹	۳۱	۴۵	۲۳۱

در سطر دوم صورت و در سطر سوم مخرج کسرهای متقارب به ترتیب

نوشته شده است. دو کسر متقارب اول مستقیماً بدست می آید $\frac{2}{1}$ و $\frac{3}{1}$. بقیه

کسرها هم با توجه به قانونی که اثبات کردیم ، محاسبه می شوند .

برای سهولت کار در سطر اول ، مخرجهای صحیح از سوم تا آخر

نوشته شده است .

۶. چند قضیه

قضیه ۱. مقدار دقیق کسر مسلسل بین دو کسر متقارب متوالی قرار

دارد و ضمناً به مقدار کسر بعدی نزدیکتر است تا مقدار کسر قبلی.

اثبات. کسر مسلسل زیر را در نظر می گیریم :

$$(a, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots, a_s) = A$$

که مقدار دقیق آنرا به A نشان داده ایم. سه کسر متقارب متوالی رادر

نظر می گیریم:

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} ; \frac{P_n}{Q_n} ; \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$$

طبق آنچه که قبلاً اثبات کردیم ، داریم:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n a_n + P_{n-1}}{Q_n a_n + Q_{n-1}}$$

اگر در طرف راست این تساوی به جای a_n مقدار $y = (a_n, a_{n+1}, \dots, a_s)$ را قرار دهیم، مقدار دقیق کسر مسلسل، یعنی A بدست می‌آید:

$$A = \frac{P_n y + P_{n-1}}{Q_n y + Q_{n-1}}$$

و از آنجا:

$$\begin{aligned} A Q_n y + A Q_{n-1} &= P_n y + P_{n-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow A Q_n y - P_n y &= P_{n-1} - A Q_{n-1} \end{aligned}$$

$$y Q_n \left(A - \frac{P_n}{Q_n} \right) = Q_{n-1} \left(\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - A \right) \quad \text{یعنی:}$$

از تساوی اخیر می‌توان دو نتیجه زیر را بدست آورد:

(۱) چون عددهای y و Q_n و $n-1$ مثبت هستند، در این صورت تفاضلهایی که در داخل پرانتزها قرار دارند، باید با هم مثبت و یا با هم منفی شوند، یعنی:

$$\text{اگر } A - \frac{P_n}{Q_n} > 0 \text{ باشد، } \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - A > 0 \text{ می‌شود.}$$

$$\text{و اگر } A - \frac{P_n}{Q_n} < 0 \text{ باشد، } \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - A < 0 \text{ می‌شود.}$$

$$\text{یعنی اگر } A > \frac{P_n}{Q_n} \text{ باشد، } \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} > A \text{ و اگر } A < \frac{P_n}{Q_n} \text{ باشد،}$$

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} < A \text{ می‌شود.}$$

(۲) چون $y > 1$ و $Q_n > Q_{n-1}$ و ضمناً عددهای Q_n و Q_{n-1} مثبت

هستند، از همان تساوی نتیجه می‌شود که قدر مطلق مقدار $\left(A - \frac{P_n}{Q_n} \right)$ از

قدر مطلق مقدار $\left(\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - A \right)$ کوچکتر است و از آنجا نتیجه می‌شود که

$$A \text{ به } \frac{P_n}{Q_n} \text{ نزدیکتر است تا به } \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}.$$

توضیح. چون واضح است که $A > a$ یعنی $A > \frac{P_1}{Q_1}$ می باشد، خواهیم داشت :

$$A < \frac{P_2}{Q_2} ; A > \frac{P_3}{Q_3} ; A < \frac{P_4}{Q_4} ; \dots$$

مقدار دقیق کسرمسلسل از همه کسرهای متقارب ردیف فرد بزرگتر و

از همه کسرهای متقارب ردیف زوج کوچکتر است .

قضیه ۲. تفاضل دو کسر متقارب متوالی برابر است با ± 1 تقسیم بر

حاصل ضرب مخرجهای این دو کسرمتقارب.

اثبات. چون داریم:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n+1}Q_n - P_nQ_{n+1}}{Q_nQ_{n+1}}$$

واضح است که مخرج این تفاضل همانست که می خواهیم . بنابراین

کافی است ثابت کنیم که صورت آن مساوی ± 1 است. داریم:

$$P_{n+1} = P_n a_n + P_{n-1} ; Q_{n+1} = Q_n a_n + Q_{n-1}$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} P_{n+1}Q_n - P_nQ_{n+1} &= (P_n a_n + P_{n-1})Q_n - \\ &+ P_n(Q_n a_n + Q_{n-1}) = P_n Q_n a_n + P_{n-1}Q_n - P_n Q_n a_n - \\ &- P_n Q_{n-1} = -(P_n Q_{n-1} - P_{n-1}Q_n) \end{aligned}$$

عبارت داخل پرانتز عبارتست از صورت کسری که از تفاضل کسر $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$

از $\frac{P_n}{Q_n}$ بدست می آید. به این ترتیب ثابت کردیم که قدرمطلق مقدار صورت

کسری که از تفاضل کسر $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ از کسر $\frac{P_n}{Q_n}$ بدست می آید برابر است با

قدرمطلق صورت کسری که از تفاضل $\frac{P_n}{Q_n}$ از $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ بدست می آید. به عبارت

دیگر ، قدرمطلق صورت کسری که از تفاضل دو کسر متقارب متوالی بدست می آید برای همه کسرهای متقارب مقداری است ثابت ، ولی تفاضل بین

کسرهای متقارب اول و دوم را می توانیم حساب کنیم:

$$\left(a + \frac{1}{a_1}\right) - a = \frac{1}{a_1}$$

بنابراین صورت هر کسری که از تفاضل دو کسر متقارب متوالی بدست می‌آید، از لحاظ قدر مطلق برابر واحد است.

مثلا اگر کسری را که در انتهای بند ۵ ذکر کردیم، در نظر بگیریم

داریم:

$$\frac{3}{2} - \frac{2}{1} = \frac{1}{1}; \quad \frac{11}{4} - \frac{3}{1} = -\frac{1}{4}; \quad \frac{25}{9} - \frac{11}{4} = \frac{1}{36};$$

$$\frac{86}{31} - \frac{25}{9} = -\frac{1}{279}, \dots$$

نتیجه‌ها:

(۱) همه کسره‌های متقارب ساده نشدنی هستند، زیرا اگر کسر $\frac{P_n}{Q_n}$

بتواند به مقسوم علیه $m > 1$ کوچک شود، در این صورت تفاضل $P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n$ هم باید بر m قابل قسمت باشد که غیرممکن است، زیرا این تفاضل برابر است با ± 1 .

(۲) اگر بجای مقدار حقیقی کسر مسلسل، کسر متقارب $\frac{P_n}{Q_n}$ را انتخاب

کنیم، اشتباهی کوچکتر از هر يك از سه عدد زیر کرده‌ایم:

$$\frac{1}{Q_n Q_{n+1}}; \quad \frac{1}{Q_n (Q_n + Q_{n-1})}; \quad \frac{1}{(Q_n)^2}$$

زیرا، اگر A مقدار دقیق کسر مسلسل باشد، از لحاظ $A - \frac{P_n}{Q_n}$

مقدار عددی از تفاضل $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n}$ کوچکتر است و تفاضل اخیر از لحاظ

قدر مطلق، طبق آنچه ثابت کردیم، برابر است با $\frac{1}{Q_n Q_{n-1}}$. از طرف

دیگر چون داریم :
 $Q_{n+1} = Q_n a_n + Q_{n-1} \quad (a_n > 1)$
 $Q_{n+1} \geq Q_n + Q_{n-1}$
 خواهیم داشت:
 بنابراین :

$$Q_n Q_{n+1} \geq Q_n (Q_n + Q_{n-1}) \Rightarrow \frac{1}{Q_n Q_{n+1}} \leq \frac{1}{Q_n (Q_n + Q_{n-1})}$$

 و بنابراین قدر مطلق تفاضل $A - \frac{P_n}{Q_n}$ از $\frac{1}{Q_n (Q_n + Q_{n-1})}$ کوچکتر است.

بالاخره چون $Q_{n+1} > Q_n$ است ، $Q_{n+1} Q_n > (Q_n)^2$ خواهد بود و از آنجا :

$$\frac{1}{Q_n Q_{n+1}} < \frac{1}{(Q_n)^2}$$

بنابراین قدر مطلق تفاضل $A - \frac{P_n}{Q_n}$ از $\frac{1}{(Q_n)^2}$ هم کوچکتر است .

از سه مقدار مذکور $\frac{1}{Q_n Q_{n+1}}$ از همه کوچکتر است. وقتی که کسر متقارب

$\frac{P_n}{Q_n}$ را به عنوان مقدار تقریبی کسر مسلسل انتخاب می کنیم ، در حالتی که

مخرج کسر متقارب بعدی معلوم باشد ، خطا را مساوی $\frac{1}{Q_n Q_{n+1}}$ می گیریم،

اگر مخرج کسر متقارب قبلی معلوم باشد $\frac{1}{Q_n (Q_n + Q_{n-1})}$ را در حالتی

که فقط کسر متقارب $\frac{P_n}{Q_n}$ معلوم باشد ، $\frac{1}{(Q_n)^2}$ را به عنوان خطا می گیریم.

مثلا اگر بدانیم که یکی از کسرهای متقارب يك کسر مسلسل برابر $\frac{45}{17}$

است، می توانیم بگوییم که $\frac{45}{17}$ مقدار کسر را تا $\frac{1}{289} = \frac{1}{17^2}$ تقریب معین

می کند . اگر علاوه بر این، بدانیم که مخرج کسر متقارب قبلی برابر ۸

است ، می توانیم بگوییم که $\frac{45}{17}$ ، مقدار کسر مسلسل را با تقریب

$\frac{1}{17(17+8)} = \frac{1}{425}$ بیان می کند.

و بالاخره اگر بدانیم که مخرج کسر متقارب بعدی مثلاً مساوی ۳۷

است، می گوئیم که $\frac{45}{17}$ ، با مقدار واقعی کسر کمتر از $\frac{1}{629} = \frac{1}{17 \times 37}$

اختلاف دارد.

قضیه ۳

کسر متقارب از هر کسر دیگری که مخرجش کوچکتر است به مقدار حقیقی کسر مسلسل نزدیکتر است.

اثبات .

فرض می کنیم کسری مثل $\frac{a}{b}$ وجود داشته باشد که به مقدار حقیقی

کسر مسلسل یعنی A نزدیکتر باشد تا کسر متقارب $\frac{P_n}{Q_n}$ و فرض می کنیم

$P_n < Q_n$ باشد. ثابت می کنیم که این فرض ما را به تناقض می کشاند.

وقتی که $\frac{P_n}{Q_n}$ نسبت به $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ به A نزدیکتر است و $\frac{a}{b}$ هم نسبت به $\frac{P_n}{Q_n}$

به A نزدیکتر است، کسر $\frac{a}{b}$ نسبت به $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ به A نزدیکتر خواهد بود.

از طرف دیگر می دانیم که A بین دو کسر متوالی $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ و $\frac{P_n}{Q_n}$ واقع است،

در اینصورت قدر مطلق تفاضل $\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ باید بزرگتر از قدر مطلق تفاضل

$\frac{a}{b} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ باشد. یعنی (با توجه به مقادیر قدر مطلق) می توانیم بنویسیم :

$$\frac{1}{Q_n Q_{n-1}} > \left| \frac{a Q_{n-1} b P_{n-1}}{b Q_{n-1}} \right|$$

$$Q_n Q_{n-1} > b Q_{n-1}$$

با ضرب این دو نامساوی در یکدیگر، بدست می آید:

$$1 > |a Q_{n-1} - b P_{n-1}|$$

عددهای $a Q_{n-1}$ و $b P_{n-1}$ عددهایی صحیح هستند و بنابراین نامساوی

فوق وقتی امکان دارد که داشته باشیم:

$$aQ_{n-1} - bP_{n-1} = 0 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$$

ولی این تساوی غیر ممکن است ، زیرا طبق فرض $\frac{a}{b}$ به A نزدیک-

تر است تا $\frac{P_n}{Q_n}$. از طرف دیگر طبق آنچه قبلاً ثابت کردیم، $\frac{P_n}{Q_n}$ نسبت به

$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ به A نزدیکتر است . به این ترتیب قضیه ۳ هم اثبات شد.

۷. مقدار تقریبی يك كسر

وقتی که صورت و مخرج کسر حسابی ساده نشدنی مفروضی با عددهای بزرگ بیان شده باشد ، اغلب لازم است که مقدار تقریبی آنرا به ساده ترین صورت ممکن بنویسیم . برای این منظور کافی است که کسر مفروض را به کسر مسلسل تبدیل کنیم و یکی از کسره های متقارب آنرا (بسته به تقریبی که لازم داریم) انتخاب کنیم .

مثال . می دانیم که عدد π ، نسبت محیط دایره بر قطر آن ، بین دو کسر : $3/141592653$ و $3/141592654$ واقع است ، مقدار تقریبی π را به دست آورید.

هر دو کسر را به کسر مسلسل تبدیل می کنیم و قسمتهای مشترك آنها را انتخاب می کنیم ، به دست می آید:

$$\pi = (3, 7, 15, 1, \dots)$$

کسره های متقارب چنین اند:

		۱۵	۱
۳	۲۲	۳۳۳	۳۵۵
۱	۷	۱۰۶	۱۱۳

کسر تقریبی $\frac{22}{7}$ را ارشمیدس پیدا کرده بود، این کسر با تقریب

$\frac{1}{7 \times 106} = \frac{1}{742}$ صحیح است، یعنی مسلماً تا $\frac{1}{100}$ تقریب درست است.

عدد $\frac{355}{113}$ را تسوچونگچی ریاضیدان قرن پنجم چین مقدار صحیح π

می‌دانسته، این کسر با تقریب $\frac{1}{3740526} = \frac{1}{113 \times 33102}$ صحیح است.

یعنی تا یک میلیونیم تقریب.

مقادیر تقریبی ارشمیدس و تسوچونگچی، چون در ردیف زوج کسر-

های مقاربانند، از π بزرگترند.

۸. گرفتن جذر

فرض کنید می‌خواهیم $\sqrt{41}$ را با کمک کسره‌های مسلسل محاسبه کنیم.

به این ترتیب استدلال می‌کنیم: بزرگترین عدد صحیحی که در $\sqrt{41}$ وجود دارد ۶ است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\sqrt{41} = 6 + \frac{1}{x} \quad (1)$$

و از آنجا:

$$\frac{1}{x} = \sqrt{41} - 6 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{41} - 6} = \frac{\sqrt{41} + 6}{5}$$

بزرگترین عدد صحیحی که در $\frac{\sqrt{41} + 6}{5}$ وجود دارد ۲ می‌باشد،

بنابراین فرض می‌کنیم:

$$x = \frac{\sqrt{41} + 6}{5} = 2 + \frac{1}{y} \quad (2)$$

و از آنجا:

$$\frac{1}{y} = \frac{\sqrt{41} + 6}{5} - 2 = \frac{\sqrt{41} - 4}{5};$$

$$y = \frac{5}{\sqrt{41} - 4} = \frac{\sqrt{41} + 4}{5};$$

چون $\sqrt{41} + 4 > 10$ می باشد ، بزرگترین عدد صحیحی که در کسر $\frac{\sqrt{41} + 4}{5}$ وجود دارد ، برابر است با ۴ ، بنابراین داریم :

$$y = \frac{\sqrt{41} + 4}{5} = 2 + \frac{1}{z} ; \quad (3)$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\sqrt{41} - 6}{5} \Rightarrow z = \frac{5}{\sqrt{41} - 6} = \quad \text{و یا :}$$

$$= \frac{5(\sqrt{41} + 6)}{5} = \sqrt{41} + 6 ;$$

بزرگترین عدد صحیحی که در $\sqrt{41} + 6$ وجود دارد ۱۲ می باشد ،
بنابراین می توان فرض کرد :

$$z = \sqrt{41} + 6 = 12 + \frac{1}{v} ; \quad (4)$$

$$\frac{1}{v} = \sqrt{41} - 6 \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{41} - 6}$$

با مقایسه رابطه v با رابطه x بدست می آید : $v = x$ ، با استفاده از
تساویهای (۱) ، (۲) ، (۳) و (۴) بدست می آید :

$$\sqrt{41} = 6 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{12 + \frac{1}{x}}}} =$$

$$= 6 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{12 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{12 + \dots}}}}}}$$

بنابراین $\sqrt{41}$ کسرمسلول متناوبی است که کسره های متقارب آن مقادیر
تقریبی $\sqrt{41}$ خواهند بود :

		۲	۱۲	۲	۲	...
۶	۱۳	۳۲	۳۹۷	۸۲۶	۲۰۴۹	...
۱	۲	۵	۶۲	۱۲۹	۳۲۰	...

به همین ترتیب خواهیم داشت :

$$\sqrt{13} = (3, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, \dots) ;$$

$$\sqrt{29} = (5, 2, 1, 1, 2, 10, \dots)$$

۹. جستجوی جوابهای معادله سیال

با کمک کسرهای مسلسل می‌توان یکی از جوابهای معادله سیال $ax + by = c$ را پیدا کرد و ما این مطلب را ضمن یک مثال روشن می‌کنیم معادله سیال زیر را در نظر می‌گیریم:

$$43x + 15y = 8$$

کسر $\frac{43}{15}$ را در نظر می‌گیریم و آنرا به کسر مسلسل تبدیل می‌کنیم :

$$\frac{43}{15} = 2 + \frac{1}{6 + \frac{1}{7}}$$

حالا کسر متقارب ما قبل آخر را در نظر می‌گیریم. این کسر برابر $\frac{20}{7}$

است. آخرین کسر برابر با مقدار حقیقی کسر یعنی $\frac{43}{15}$ است و $\frac{20}{7}$ هم کسر

مقارب ردیف فرد است ، با توجه به قضیه ۱ می‌توان نوشت :

$$\frac{43}{15} - \frac{20}{7} = \frac{1}{15 \times 7} \Rightarrow 43 + 7 - 15 + 20 = 1$$

که اگر دوطرف تساوی را ۸ برابر کنیم ، می‌شود:

$$43 \times 56 + 15(-160) = 8$$

روشهای جبر

با مقایسه این تساوی و معادله مفروض نتیجه می شود که می توان x را مساوی ۵۶ و y را مساوی ۱۶۰ - گرفت . و همه جوابهای معادله سیال از رابطه های زیر بدست می آیند :

$$\begin{cases} x = 56 - 15t \\ y = -160 + 43t \end{cases}$$

این رابطه ها را می توان ساده کرد ، t را به $t+3$ تبدیل می کنیم:

$$x = 56 - 15(t+3) = 11 - 15t$$

$$y = -160 + 43(t+3) = -31 + 43t$$

مثال ۲. معادله $7x - 19y = 5$ را در نظر می گیریم:

کسر $\frac{7}{19}$ را به کسر مسلسل تبدیل می کنیم :

$$\frac{7}{19} = 0 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}$$

کسر متقارب ما قبل آخر برابر است با $\frac{3}{8}$ و چون کسر متقارب ردیف

زوج است ، داریم :

$$\frac{7}{9} - \frac{3}{8} = \frac{-1}{19 \times 8}$$

$$7 \times 8 - 19 \times 3 = -1 \quad \text{و از آنجا:}$$

دو طرف تساوی را در ۵ ضرب می کنیم :

$$7 \times 40 - 19 \times 15 = -5 \Rightarrow 7(-40) - 19(-15) = 5$$

یعنی می توان x را مساوی ۴۰ - و y را مساوی ۱۵ - گرفت در

این صورت :

$$\begin{cases} x = -40 + 19t \\ y = -15 + 7t \end{cases}$$

که با تبدیل t به $t+2$ ، این رابطه ها ساده می شوند:

$$\begin{cases} x = -40 + 19(t+2) = -2 + 19t \\ y = -15 + 7(t+2) = -1 + 7t \end{cases}$$

۱۰. محاسبه تئاریتم

فرض کنید می‌خواهیم $\log 2$ را محاسبه کنیم (درمبنای ۱۰)، به عبارت دیگر می‌خواهیم معادله $10^x = 2$ را حل کنیم. ابتدا برای x نزدیکترین عددهای صحیح را پیدا می‌کنیم. چون $10^0 = 1$ و $10^1 = 10$ می‌باشد، بنابراین x بین صفر و یک قرار گرفته است. در این صورت می‌توان فرض کرد: $x = \frac{1}{z}$ و نوشت:

$$10^{\frac{1}{z}} = 2 \Rightarrow 10 = 2^z$$

به سادگی دیده می‌شود که z بین ۳ و ۴ قرار گرفته است، بنابراین می‌توان فرض کرد: $z = 3 + \frac{1}{z_1}$ و نوشت:

$$10 = 2^{3 + \frac{1}{z_1}} = 2^3 \times 2^{\frac{1}{z_1}} = 8 \times 2^{\frac{1}{z_1}}$$

واز آنجا:

$$2^{\frac{1}{z_1}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} \Rightarrow 2 = \left(\frac{5}{4}\right)^{z_1}$$

با جستجو روشن می‌شود که z_1 بین ۳ و ۴ قرار گرفته است، یعنی می‌توان فرض کرد:

$$z_1 = 3 + \frac{1}{z_2} ; 2 = \left(\frac{5}{4}\right)^{3 + \frac{1}{z_2}} = \left(\frac{5}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{z_2}}$$

و از آنجا:

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{z_2}} = 2 : \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{128}{125} \Rightarrow \left(\frac{128}{125}\right)^{z_2} = \frac{5}{4}$$

با تجسس روشن می شود که z_4 بین ۹ و ۱۰ قرار گرفته است و این روش را می توان به همین ترتیب ادامه داد. اگر مقدار تقریبی z_4 را در نظر بگیریم می توان $z_4 = 9$ گرفت، بنابراین:

$$z_1 = 3 + \frac{1}{9} ; z = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{9}} ; x = \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{9}}}$$

و اگر این کسر مسلسل را به کسر معمولی تبدیل کنیم، می شود:

$$x = \frac{28}{93} = 0.30107$$

و این مقدار تا رقم چهارم بعد از ممیز صحیح است. مقدار دقیق x چنین است:

$$x = 0.30103...$$

تمرینها

۴۶۳. کسر $\frac{73}{43}$ را به کسر مسلسل تبدیل کنید.

۴۶۴. تقارب پنجم کسر مسلسل زیر را بدست آورید:

$$\frac{2}{3 - \frac{2}{3 - \frac{2}{3 - \frac{2}{3 - \frac{2}{3}}}}}$$

۴۶۵. یادآور می شویم که يك ماه قمری از $29/53$ روز و یکسال شمسی از

$365/24$ روز تشکیل می شود. به کمک تقاربهایی متوالی نشان دهید که تقریباً

235 ماه قمری در 19 سال شمسی قرار دارد.

۴۶۶. مقدار کسر مسلسل زیر را حساب کنید:

$$\frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \dots}}}}$$

۴۶۷. اگر a, b, x و y عددهایی حقیقی باشند طوری که :

$$x = \frac{a}{1 + \frac{b}{1 + \frac{a}{1 + \frac{b}{1 + \dots}}}} \quad y = \frac{b}{1 + \frac{a}{1 + \frac{b}{1 + \frac{a}{1 + \dots}}}}$$

ثابت کنید : $x - y = a - b$

۴۶۸. به فرض آنکه عددهای a, b, c, x و y حقیقی باشند طوری که .

$$x = \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \dots}}}}}}$$

$$y = \frac{1}{b + \frac{1}{a + \frac{1}{c + \frac{1}{b + \frac{1}{a + \frac{1}{c + \dots}}}}}}$$

ثابت کنید : $x - y = \frac{a - b}{1 + ab}$

۴۶۹. اگر a_i عددی حقیقی باشد و داشته باشیم

$$x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}}}$$

$$y = \frac{1}{2a_1 + \frac{1}{2a_2 + \frac{1}{2a_3 + \frac{1}{2a_4 + \dots}}}}$$

$$z = \frac{1}{2a_1 + \frac{1}{2a_2 + \frac{1}{2a_3 + \frac{1}{2a_4 + \dots}}}}$$

ثابت کنید: $x(y^2 - z^2) + 2y(z^2 - x^2) + 2z(x^2 - y^2) = 0$

۴۷۰. اگر r عددی طبیعی و $\frac{P_r}{Q_r}$ تقارب r ام کسر زیر باشد:

$$\frac{a}{b + \frac{a}{b + \frac{a}{b + \dots}}}$$

ثابت کنید $P_{n+1} = aQ_n$ (n عددی طبیعی است).

۴۷۱. اگر a_i و n عددهایی حقیقی باشند، ثابت کنید:

$$na_1 + \frac{1}{na_2 + \frac{1}{na_3 + \frac{1}{na_4 + \dots}}} \equiv$$

$$\equiv n(a_1 + \frac{1}{n^2a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{n^2a_4 + \dots}}})$$

۴۷۲. تقارب n ام کسر مسلسل زیر را بدست آورید:

$$\frac{1}{2 + \frac{1 \times 3}{4 + \frac{3 \times 5}{4 + \frac{5 \times 7}{4 + \dots}}}}$$

۴۷۳. تقارب n ام کسر مسلسل متناوب زیر را بایک عنصر برگشتی بدست آورید:

$$a + \frac{b}{c + \frac{b}{c + \frac{b}{c + \dots}}}$$

۴۷۴. تقارب n ام کسر مسلسل متناوب زیر را بدست آورید :

$$1 + \frac{3}{2 + \frac{3}{2 + \frac{3}{2 + \dots}}}$$

۴۷۵. $\sqrt{43}$ را به کسر مسلسل تبدیل کنید.

۴۷۶. $\sqrt{a^2 + 2a}$ را به کسر مسلسل تبدیل کنید (a عددی حقیقی است).

۴۷۷. ثابت کنید که هر رشته را می‌توان به صورت کسر مسلسل بیان کرد.

۴۷۸. مطلوب است محاسبه مقدار :

$$S = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{2 + \frac{3}{3 + \frac{4}{4 + \dots}}}}}$$

۴۷۹. اگر $\frac{P_r}{Q_r}$ تقارب r ام $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ باشد ، ثابت کنید :

$$P_r + P_5 + \dots + P_{2n-1} = P_{2n} - P_r \quad \text{و}$$

$$Q_r + Q_5 + \dots + Q_{2n-1} = Q_{2n} - Q_r$$

۴۸۰. اگر $\sqrt{N}$ به کسر مسلسل تبدیل شود n تعداد خارج قسمتها در تناوب

باشد ثابت کنید :

$$Q_{2n} = 2P_n Q_n \text{ و } P_{2n} = 2P_n^2 + (-1)^{n+1}$$

۴۸۱. اگر $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ به تصاعد توافقی باشند، ثابت کنید:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \dots}}}$$

$$\cdot \frac{1}{2 - \frac{a_2}{a_1}}$$

۴۸۲. ثابت کنید حاصلضرب کسرهای مسلسل زیر مساوی ۱- است:

$$x = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{a + \dots}}}}$$

$$y = -d + \frac{1}{-c + \frac{1}{-b + \frac{1}{-a + \frac{1}{-d + \dots}}}}$$

۴۸۳. اگر a عددی حقیقی و تابع $\varphi(x)$ بوسیله:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & 1 + \frac{a}{x} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{a^2}{x(x+1)} + \\ & + \frac{1}{3!} \cdot \frac{a^3}{x(x+1)(x+2)} + \dots \end{aligned}$$

تعریف شده باشد، ثابت کنید:

$$\frac{a\varphi(x+1)}{x\varphi(x)} = \frac{a}{x} + \frac{a}{x+1} + \frac{a}{x+2} + \dots$$

۱۰

تقارن در جبر

بسیاری از مسأله‌های جبر، با توجه به تقارن عبارتهای جبری، با سادگی بیشتری حل می‌شوند. ولی در چند صفحه نمی‌توان از عهده بحث کامل درباره این مبحث جالب و مهم جبر برآمد. با وجود این «کاجی بهتر از هیچی است» کسانی که علاقمند به بحث وسیع‌تر در این باره هستند می‌توانند از کتاب مستقل «تقارن در جبر» استفاده کنند.

۱. تعریف

چند جمله‌ای که نسبت به x و y وضع مشابهی داشته باشد، چند جمله‌ای متقارن نسبت به x و y نامیده می‌شود. به عبارت دقیق‌تر، عبارتی را نسبت به x و y متقارن گوئیم که با تبدیل x به y و y به x تغییر نکند. مثلاً عبارت $x^2y + xy^2$ نسبت به x و y متقارن است، درحالی که عبارت $x^2 - y$ نسبت به این مجهولها متقارن نیست، زیرا با تبدیل x به y و y به x به چند جمله‌ای $y^2 - x$ تبدیل می‌شود که با چند جمله‌ای اصلی یکی نیست.

xy و $x + y$ ساده‌ترین عبارتهای متقارن نسبت به x و y هستند. به مناسبت اهمیت این دو عبارت معمولاً آنها را با علامتهای σ_1 و σ_2 نشان می‌دهیم.

بطور کلی عبارتی را نسبت به n مجهول $x, y, z, \dots, t$ متقارن گوئیم که با تبدیل هر دو مجهول دلخواه آن به یکدیگر تغییر نکند. مثلاً عبارت $x^2 + y^2 + z^2$ نسبت به x, y, z و عبارت $xy + xz + xt + yz + yt + zt$ نسبت به t, z, y, x متقارن است. درحالی که عبارت $xz + yt$ نسبت به این مجهولها متقارن نیست.^۱

۲. مجموع توانهای متشابه

اگر $x^n + y^n = S_n$ فرض کنیم، یعنی $S_1 = x + y$ ، $S_2 = x^2 + y^2$ ، $\dots$ ، $S_3 = x^3 + y^3$ ، $\dots$ را می‌توان به سادگی بر حسب σ_1 و σ_2 بدست آورد:

۱- عبارت $xz + yt$ نسبت به x, y, z, t عبارت دوری است، یعنی با تبدیل x به y و y به z و z به t و t به x تغییر نمی‌کند، ولی متقارن نیست. هر عبارت متقارنی دوری هست ولی یک عبارت دوری ممکن است متقارن باشد و ممکن است متقارن نباشد.

$$S_0 = x^0 + y^0 = 2$$

$$S_1 = x + y = \sigma_1$$

$$S_2 = x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$

$$S_3 = x^3 + y^3 = (x+y)[(x+y)^2 - 3xy] = \sigma_1(\sigma_1^2 - 3\sigma_2)$$

ثابت می‌کنیم که هر مجموعی به شکل S_n را می‌توان به صورت چند جمله‌ای از σ_1 و σ_2 بیان کرد، داریم:

$$\sigma_1 S_{k-1} = (x+y)(x^{k-1} + y^{k-1}) =$$

$$= x^k + y^k + xy(x^{k-2} + y^{k-2}) = S_k + \sigma_2 S_{k-2}$$

$$S_k = \sigma_1 S_{k-1} - \sigma_2 S_{k-2} \quad \text{و از اینجا:}$$

با استفاده از این رابطه (که به رابطه کاهشی ویا رابطه برعکشی موسوم است)، می‌توان مقادیر S_4 ، S_5 ، ... را برحسب σ_1 و σ_2 محاسبه کرد، مثلاً:

$$S_4 = \sigma_1 \cdot S_3 - \sigma_2 \cdot S_2 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2 \sigma_2 + 2\sigma_2^2;$$

$$S_5 = \sigma_1 \cdot S_4 - \sigma_2 \cdot S_3 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3 \sigma_2 + 5\sigma_1 \sigma_2^2; \dots$$

قضیه فوق را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد.

هر عبارتی که نسبت به x و y متقارن باشد، برحسب σ_1 و σ_2 قابل بیان است.

برای اثبات این قضیه کافی است، جمله‌های متقارن به صورت $ax^k y^l$ و $ax^l y^k$ را دوبدو باهم در نظر بگیریم. اگر فرض کنیم $k < l$ ، می‌توان بین این دو جمله از $ax^k y^k = ax^k y^k$ عامل مشترک گرفت، در این صورت در داخل پرانتز عبارتی به صورت $x^{l-k} + y^{l-k}$ به دست خواهد آمد که خود قابل بیان برحسب σ_1 و σ_2 است. مثلاً:

$$\begin{aligned} 2x^4 y - 3x^3 y^2 - 3x^2 y^3 + 2xy^4 &= (2x^4 y + 2xy^4) + \\ &+ (-3x^3 y^2 - 3x^2 y^3) = 2xy(x^3 + y^3) - 3x^2 y^2(x+y) = \\ &= 2\sigma_2 S_3 - 3\sigma_2^2 S_1 = 3\sigma_1^3 \sigma_2 - 9\sigma_1 \sigma_2^2 \end{aligned}$$

در مورد عبارتهایی که نسبت به سه مجهول x و y و z متقارن هستند، اگر فرض کنیم:

$$\begin{cases} \sigma_1 = x + y + z, \\ \sigma_2 = xy + xz + yz, \\ \sigma_3 = xyz \end{cases}$$

و $x^n + y^n + z^n = S_n$ بگیریم ، با توجه به رابطهٔ برگشتی زیر (که به سادگی بدست می‌آید):

$$S_k = \sigma_1 S_{k-1} - \sigma_2 S_{k-2} + \sigma_3 S_{k-3}$$

می‌توان مجموع توانهای مشابه x و y و z را برحسب σ_1 ، σ_2 و σ_3 بدست آورد :

$$S_0 = 3 ;$$

$$S_1 = \sigma_1 ;$$

$$S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 ;$$

$$S_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 ;$$

$$S_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3 ;$$

$$S_5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 + 5\sigma_1^2\sigma_3 - 5\sigma_2\sigma_3 ;$$

$$S_6 = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3 + 6\sigma_1^3\sigma_3 - 12\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 6\sigma_3^2 ;$$

$$x^5y + xy^5 + x^5z + xz^5 + y^5z + yz^5 = \sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_3 ; \quad \text{و همچنین:}$$

$$x^4y^2 + x^2y^4 + y^4z^2 = \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3 ;$$

$$x^3y^2 + xy^3 + x^3z^2 + xz^3 + y^3z^2 + yz^3 = \sigma_1^2\sigma_2 - 2\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3.$$

۳. حل دستگاهها

مثال ۱. مطلوب است حل دستگاه زیر:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x + xy + y = 2 \end{cases}$$

حل. از آنجا که سمت چپ تساوی در هر يك از معادله‌ها نسبت به x

و y متقارن است ، می‌توان دستگاه را بر حسب مجهولهای جدید σ_1 و σ_2

نوشت :

$$x^2 + xy + y^2 = (x+y)^2 - xy = \sigma_1^2 - \sigma_2$$

$$x + xy + y = \sigma_1 + \sigma_2$$

و در نتیجه دستگاه زیر را خواهیم داشت :

$$\begin{cases} \sigma_1^2 - \sigma_2 = 4 \\ \sigma_1 + \sigma_2 = 2 \end{cases}$$

از جمع این معادله ها ، به معادله درجه دوم $\sigma_1^2 + \sigma_1 - 6 = 0$ می‌رسیم که دوجواب آن -3 و 2 $\sigma_1 = 2$ می‌باشد و به سادگی 5 و $\sigma_2 = 0$ بدست می‌آید . به این ترتیب دستگاه اصلی به دو دستگاه زیر تبدیل می‌شود :

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x \cdot y=0 \end{cases} ; \begin{cases} x+y=-3 \\ x \cdot y=5 \end{cases}$$

که از حل آنها چهاردسته جواب زیر به دست می‌آید :

$$\begin{cases} x_1=2 \\ y_1=0 \end{cases} ; \begin{cases} x_2=0 \\ y_2=2 \end{cases} ; \begin{cases} x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{-11}}{2} \\ y_{3,4} = \frac{-3 \mp \sqrt{-11}}{2} \end{cases}$$

مثال ۲. دستگاه زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x^5+y^5=275 \end{cases}$$

حل. داریم :

$$x^5 + y^5 = S_5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2$$

و دستگاه مفروض به دستگاه زیر تبدیل می‌شود :

$$\begin{cases} \sigma_1 = 5 \\ \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 = 275 \end{cases}$$

که اگر در معادله دوم بجای σ_1 عدد 5 را قرار دهیم ، به معادله درجه دوم $25\sigma_2^2 - 625\sigma_2 + 2875 = 0$ می‌رسیم که از آن جوابهای 6 و 19 $\sigma_2 = 19$ بدست می‌آید و بنابراین حل دستگاه مفروض منجر به حل دستگاههای زیر می‌شود :

$$\left| \begin{array}{l} x+y=5 \\ x \cdot y=19 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x+y=5 \\ x \cdot y=6 \end{array} \right|$$

که به سادگی قابل حل هستند .

انتخاب مجهولهای جدید σ_1 و σ_2 باعث می شود که درجه معادله ها پایین بیاید (زیرا $\sigma_1 = xy$ نسبت به مجهولهای x و y از درجه دوم است) . مثلاً در مثال فوق معادله از درجه پنجم به معادله ای از درجه دوم تبدیل می شود.

مثال ۳. مطلوب است حل دستگاه زیر :

$$\begin{cases} x+2y-3z=a \\ x^2+4y^2+9z^2=b^2 \\ x^3+8y^3-27z^3=a^3 \end{cases}$$

حل. فرض می کنیم :

$$x=u ; 2y=v ; -3z=w$$

در این صورت دستگاه معادله های مفروض به صورت زیر در می آید :

$$\begin{cases} u+v+w=a ; \\ u^2+v^2+w^2=b^2 ; \\ u^3+v^3+w^3=a^3 \end{cases}$$

حالا دستگاه را با مجهولهای جدید می نویسیم :

$$\begin{cases} u+v+w=\sigma_1 ; \\ uv+uw+vw=\sigma_2 ; \\ uvw=\sigma_3 \end{cases}$$

با توجه به رابطه هایی که در بند ۲ محاسبه کردیم، به دستگاه زیر می رسم :

$$\begin{cases} \sigma_1=a ; \\ \sigma_1^2-2\sigma_2=b^2 ; \\ \sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3=a^3 \end{cases}$$

که از آنجا بدست می آید:

$$\begin{cases} \sigma_1 = a \\ \sigma_2 = \frac{1}{r}(a^2 - b^2) \\ \sigma_3 = \frac{1}{r}a(a^2 - b^2) \end{cases}$$

و بنابراین u و v و w ریشه‌های معادله درجه سوم زیر هستند :

$$t^3 - at^2 + \frac{1}{r}(a^2 - b^2)t - \frac{1}{r}a(a^2 - b^2) = 0$$

سمت چپ این معادله را می‌توان تجزیه کرد:

$$(t-a) \left[t^2 + \frac{1}{r}(a^2 - b^2) \right] = 0 ;$$

$$t_1 = a ; t_2 = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{r}} ; t_3 = -\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{r}}$$

و از آنجا :

$$u = a ; v = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{r}} ; w = -\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{r}}$$

و یا پنج دسته جواب دیگر . در نتیجه جوابهای x و y و z چنین است :

$$۱) x = a ; y = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{r}} ; z = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{r}} ;$$

$$۲) x = a ; y = -\frac{1}{r}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{r}} ; z = -\frac{1}{r}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{r}} ;$$

$$۳) x = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{r}} ; y = \frac{a}{r} ; z = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{r}} ;$$

$$۴) x = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{r}} ; y = -\frac{1}{r}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{r}} ; z = -\frac{a}{r} ;$$

$$۵) x = -\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{r}} ; y = \frac{a}{r} ; z = -\frac{1}{r}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{r}} ;$$

$$۶) x = -\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{r}} ; y = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{b^2 - a^2}{r}} ; z = -\frac{a}{r}$$

۴. حل معادله‌های گنگ

از قضیهٔ مربوط به عبارتهای متقارن می‌توان برای حل معادله‌های گنگ هم استفاده کرد. مثلاً معادلهٔ گنگ زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{97-x} = 5$$

اگر فرض کنیم $\sqrt[4]{x} = y$ و $\sqrt[4]{97-x} = z$ ، معادلهٔ مفروض به صورت $y + z = 5$ در می‌آید و ضمناً داریم:

$$y^4 + z^4 = x + (97 - x) = 97$$

در نتیجه حل معادلهٔ گنگ به حل دستگاه زیر منجر می‌شود:

$$\begin{cases} y + z = 5 \\ y^4 + z^4 = 97 \end{cases}$$

که اگر $\sigma_1 = y + z$ و $\sigma_2 = y \cdot z$ فرض کنیم، دستگاه مفروض به دستگاه

زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 5 \\ \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 = 97 \end{cases}$$

و از آنجا معادلهٔ درجهٔ دوم زیر برای σ_2 بدست می‌آید:

$$2\sigma_2^2 - 100\sigma_2 + 528 = 0$$

از حل این معادله $\sigma_2 = 6$ یا 44 به دست می‌آید و در نتیجه مسأله منجر

به حل دستگاههای سادهٔ زیر می‌شود:

$$\begin{cases} y + z = 5 \\ y \cdot z = 6 \end{cases} ; \begin{cases} y + z = 5 \\ y \cdot z = 44 \end{cases}$$

اولین دستگاه، جوابهای:

$$y_1 = 2 ; z_1 = 3 \text{ و } y_2 = 3 ; z_2 = 2$$

را بدست می‌دهد و چون $y = \sqrt[4]{x}$ بود، برای x جوابهای $x_1 = 16$ و

$x_2 = 81$ بدست می‌آید و به سادگی روشن می‌شود که جوابهای دستگاه دوم

عددهای مختلط هستند.

۵. تجزیه عبارتهای جبری

از قضیهٔ مربوط به چند جمله‌ایهای متقارن، برای تجزیهٔ عبارتهای جبری هم می‌توان استفاده کرد.

مثال ۱. عبارت زیر را به صورت ضرب عوامل اول تجزیه کنید:

$$f(x, y) = 10x^4 - 27x^2y - 110x^2y^2 - 27xy^3 + 10y^4$$

حل. داریم:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 10(x^4 + y^4) - 27xy(x^2 + y^2) - 110x^2y^2 = \\ &= 10S_4 - 27\sigma_1 S_2 - 110\sigma_1^2 \end{aligned}$$

که با استفاده از مقادیر S_4 و S_2 به سادگی خواهیم داشت:

$$f(x, y) = 10\sigma_1^4 - 67\sigma_1^2\sigma_2 - 36\sigma_2^2$$

این عبارت نسبت به σ_2 از درجهٔ دوم و دارای جوابهای $\frac{5}{36}\sigma_1^2$ و $2\sigma_1^2$

می‌باشد، بنابراین به صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -36(\sigma_2 + 2\sigma_1^2)(\sigma_2 - \frac{5}{36}\sigma_1^2) = \\ &= (2\sigma_1^2 + \sigma_2)(5\sigma_1^2 - 36\sigma_2) \end{aligned}$$

که اگر بجای σ_1 و σ_2 مقادیرشان را قرار دهیم، چنین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= [2(x+y)^2 + xy][5(x+y)^2 - 36xy] = \\ &= (2x^2 + 5xy + 2y^2)(5x^2 - 36xy + 5y^2) \end{aligned}$$

هر يك از پرانتزهای اخیر هم قابل تجزیه هستند و $f(x, y)$ به صورت

زیر در می‌آید:

$$f(x, y) = (2x + y)(x + 2y)(x - 5y)(5x - y)$$

البته اگر پس از تبدیل $f(x, y)$ به عبارتی بر حسب σ_1 و σ_2 چند جمله‌ای

درجهٔ دومی بدست آید که دارای ریشه‌های موهومی باشد، روش بالا نمی‌تواند

برای تجزیهٔ عبارت مورد استفاده قرار گیرد. در این مورد برای تبدیل

$f(x,y)$ به صورت ضرب عبارتهایی که دارای ضریبهای حقیقی باشند، از روش دیگری استفاده می‌کنیم.

این روش براین اساس قرار دارد که يك عبارت درجه چهارم متقارن می‌تواند به صورت ضرب دو عبارت تجزیه شود که هریک از دو عبارت نسبت به x و y متقارن نباشند ولی با تبدیل x به y و y به x هر يك از دو عامل به عامل دیگر تبدیل شود. به عبارت دیگر هر عبارت درجه چهارم متقارن نسبت به y و x را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f(x,y) = (Ax^2 + Bxy + Cy^2)(Cx^2 + Bxy + Ay^2)$$

که در آن A و C ضریبهای نامعینی هستند. در حقیقت از روش ضریبهای نامعین^۱ برای عبارتهای متقارن استفاده می‌کنیم. به عنوان نمونه به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۴. عبارت زیر را به صورت ضرب عوامل تجزیه کنید:

$$f(x,y) = 2x^4 + 3x^3y + 6x^2y^2 + 3xy^3 + 2y^4$$

حل. $f(x,y)$ نسبت به y و x متقارن است و می‌توان آنرا به صورت

زیر نوشت:

$$f(x,y) = (Ax^2 + Bxy + Cy^2)(Cx^2 + Bxy + Ay^2)$$

برای محاسبه ضریبهای A و B و C توجه می‌کنیم که این رابطه باید به ازای همه مقادیر y و x برقرار باشد، بنابراین می‌توان مقادیر عددی دلخواهی بجای y و x قرار داد. مثلاً فرض می‌کنیم $x=y=1$ ، بدست می‌آید:

$$(A+B+C)^2 = 16 \Rightarrow A+B+C = \pm 4$$

متذکر می‌شویم که ضریبهای A و B و C با تقریب يك علامت بدست خواهند آمد، زیرا اگر تمام ضریبهای A و B و C را تغییر علامت دهیم، حاصل عبارت تغییر نمی‌کند. بنابراین بدون اینکه به عمومی بودن مسأله لطمه‌ای وارد شود می‌توان $A+B+C=4$ فرض کرد. حالا اگر $x=y=-1$ بگیریم به تساوی زیر می‌رسیم:

$$(A-B+C)^2 = 4 \Rightarrow A-B+C = \pm 2$$

و بالاخره اگر $x=0$ و $y=1$ فرض کنیم $AC=2$ می‌شود. به

۱- به بخش تجزیه عبارتهای جبری مراجعه شود.

این ترتیب برای محاسبه ضریبها باید دستگاه زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} A+B+C=4 \\ A-B+C=\pm 2 \\ AC=2 \end{cases}$$

اگر در معادله دوم دستگاه، علامت مثبت را اختیار کنیم، از دو معادله اول $A+C=3$ و $B=1$ بدست می‌آید که با استفاده از معادله سوم خواهیم داشت:

$$A=1 ; C=2 \text{ یا } A=2 ; C=1$$

و در نتیجه تجزیه عبارت مفروض چنین می‌شود:

$$f(x,y) = (x^2 + xy + 2y^2)(2x^2 + xy + y^2)$$

که اگر پراکنشهای سمت راست تساوی را باز کنیم، صحت تساوی محقق می‌شود.

اگر سمت راست معادله دوم دستگاه را با علامت منفی اختیار کنیم، دستگاهی با ریشه‌های موهومی بدست می‌آید و بنابراین در این حالت نمی‌توان عبارت را به صورت ضرب عوامل حقیقی تبدیل کرد.

مثال ۳. عبارت زیر را ساده کنید:

$$a(b+c-a)^2 + b(c+a-b)^2 + c(a+b-c)^2 + (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

حل. عبارت مفروض را به ترتیب چنین می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} & a(\sigma_1 - 2a)^2 + b(\sigma_1 - 2b)^2 + c(\sigma_1 - 2c)^2 + \\ & \quad + (\sigma_1 - 2a)(\sigma_1 - 2b)(\sigma_1 - 2c) = \\ & = (a+b+c)\sigma_1^2 - 4\sigma_1(a^2 + b^2 + c^2) + \\ & \quad + 4(a^2 + b^2 + c^2) + \sigma_1^3 - 2\sigma_1^2(a+b+c) + \\ & \quad + 4\sigma_1(ab+ac+bc) - 8abc = \\ & = \sigma_1^3 - 4\sigma_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_1) + 4(\sigma_1^2 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) + \\ & \quad + \sigma_1^3 - 2\sigma_1^2 + 4\sigma_1\sigma_2 - 8\sigma_3 = 4\sigma_3 = 4abc \end{aligned}$$

تمرینها

۴۸۴. معادله درجه دوم $x^2 + 3x - 10 = 0$ مفروض است، معادله درجه دوم جدیدی تشکیل دهید که:

اولا ریشه‌های آن توان چهارم ریشه‌های این معادله باشد.

ثانیا ریشه‌های آن $\frac{1}{x_1^3}$ و $\frac{1}{x_2^3}$ باشد.

ثالثا ریشه‌های آن $x_1^2 + x_2^4, x_1^4 + x_2^2$ باشد.

دستگاههای زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 12 & \cdot 486 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 15 \\ x + y + x^2 + y^2 = 42 \end{cases} \cdot 485$$

$$\begin{cases} \frac{x^5 + y^5}{x^2 + y^2} = \frac{31}{7} & \cdot 488 \\ x^2 + xy + y^2 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} xy(x + y) = 20 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{4} \end{cases} \cdot 487$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy(x + y) = 13 \\ x^2 y^2 (x^2 + y^2) = 468 \end{cases} \cdot 489$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy^2 - x^2 y = 1 \end{cases} \cdot 490$$

$$\begin{cases} 3xyz - x^2 - y^2 - z^2 = b^2 \\ x + y + z = 2b \\ x^2 + y^2 - z^2 = b^2 \end{cases} \cdot 491$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \frac{v^2}{\lambda} \\ xy + xz + yz = x + y + z \\ xyz = 1 \end{cases} \cdot 492$$

معادله‌های زیر را حل کنید:

$$\sqrt[5]{\frac{1}{2}+x} + \sqrt[5]{\frac{1}{2}-x} = 1 \quad .۴۹۳$$

$$x + \sqrt{17-x^2} + x\sqrt{17-x^2} = 9 \quad .۴۹۴$$

$$x\sqrt[3]{25-x^2}(x+\sqrt[3]{25-x^2}) = 30 \quad .۴۹۵$$

$$\sqrt[3]{a-x} + \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{a} \quad .۴۹۶$$

$$(z^2+1)^2 - (z^2-1)^2 = 2^2 \quad .۴۹۷$$

۴۹۸. اگر ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2+px+q=0$ را α و β فرض

کنیم، مطلوب است محاسبه $\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{\beta}$

۴۹۹. ثابت کنید که اگر داشته باشیم $a+b>c$ خواهیم داشت:

$$a^2+b^2>\frac{c^2}{2}; \quad a^4+b^4>\frac{c^4}{8}; \quad a^8+b^8>\frac{c^8}{128}$$

این عبارتها را به صورت ضرب عوامل تجزیه کنید:

$$2x^4+7x^3y+9x^2y^2+7xy^3+2y^4 \quad .۵۰۰$$

$$3x^4-8x^3y+14x^2y^2-8xy^3+3y^4 \quad .۵۰۱$$

$$6x^4-11x^3y-11x^2y^2-11xy^3+6y^4 \quad .۵۰۲$$

۵۰۳. کسر $\frac{(x+y)^5 - x^5 - y^5}{(x+y)^5 - x^5 - y^5}$ را ساده کنید:

۵۰۴. عبارت $2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2-x^4-y^4-z^4$ را به صورت

ضرب عوامل درجه اول تجزیه کنید.

۵۰۵. ثابت کنید که اگر داشته باشیم:

$$x+y+z=x^2+y^2+z^2=x^3+y^3+z^3=1$$

خواهیم داشت:

$$xyz=0$$

۵۰۶. ثابت کنید که اگر داشته باشیم:

$$\begin{cases} x+y+z=u+v+w \\ x^2+y^2+z^2=u^2+v^2+w^2 \\ x^3+y^3+z^3=u^3+v^3+w^3 \end{cases}$$

به ازای هر مقدار صحیح n خواهیم داشت:

$$x^n + y^n + z^n = u^n + v^n + w^n$$

۵۰۷. صحت اتحاد زیر را تحقیق کنید:

$$\begin{aligned} (a-b)^6 + (b-c)^6 + (c-a)^6 - 9(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 = \\ = 2(a-b)^2(a-c)^2 + 2(b-c)^2(b-a)^2 + 2(c-a)^2(c-b)^2 \end{aligned}$$

۵۰۸. مخرج کسر زیر را گویا کنید:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{c}}$$

۵۰۹. ریشه‌های صحیح معادله زیر را بدست آورید:

$$x + y = x^2 - xy + y^2$$

۵۱۰. ثابت کنید که اگر $a + b + c = 0$ باشد، داریم:

$$\frac{a^7 + b^7 + c^7}{7} = \frac{a^5 + b^5 + c^5}{5} \times \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

۵۱۱. ریشه‌های صحیح معادله زیر را بدست آورید:

$$\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} = 2$$

۱۱

محاسبة بعضى مجموعها

محاسبهٔ مجموع Π جمله از يك تصاعد حسابی و یاهندسی
 برای هر دانش آموز دبیرستانی روشن است ، ولی در بسیاری موارد،
 وبخصوص در جبر و مثلثات ، به مجموعهایی برمی خوریم که
 استفاده از روش تصاعدها برای حل آنها کافی نیست .
 در این بخش کوشش شده است تنها از روشهایی صحبت شود
 که اولاً با ریاضیات مقدماتی قابل بیان باشد ، ثانیاً در ریاضیات
 متوسطه مورد استفاده داشته باشد . و در این زمینه ، جبر و مثلثات
 هر دو مورد نظر بوده است .
 باید به خاطر داشت که بحث دربارهٔ مجموعهها ، در حالت های
 کلی تر ، به مبحثهایی برمی خورد که خارج از برنامهٔ متوسطه است
 و طبیعی است که جای بحث آنها در اینجا نیست .

۱. محاسبهٔ مجموع توانهای متشابه عددهای صحیح متوالی

می‌خواهیم دربارهٔ مجموع:

$$S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$$

مطالعه کنیم و طریقه‌های محاسبهٔ آنرا بررسی نماییم.

در حالت $k=1$ ، مجموع مفروض به مجموع n جملهٔ متوالی از يك
تصادد حسابی تبدیل می‌شود که جملهٔ اول آن ۱، قدر نسبت آن ۱ و تعداد
جمله‌هایش n می‌باشد و بنابراین خواهیم داشت:

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

ولی این مجموع را به دو طریق زیر هم می‌توان بدست آورد:
روش اول. اتحاد زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

این اتحاد به ازای همهٔ مقادیر x برقرار است، اگر x را به ترتیب
مساوی عددهای صحیح متوالی ۰، ۱، ۲، ...، n بگیریم، بدست می‌آید:

$$\begin{array}{r}
 1^2 = 1 \\
 2^2 = 1^2 + 2 \times 1 + 1 \\
 3^2 = 2^2 + 2 \times 2 + 1 \\
 4^2 = 3^2 + 2 \times 3 + 1 \\
 \dots \\
 (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1
 \end{array}$$

$$(n+1)^2 = 2(1+2+3+\dots+n) + n + 1$$

$$2S_1 = (n+1)^2 - (n+1) \quad \text{و یا:}$$

$$S_1 = \frac{1}{2}n(n+1)$$

روش دوم. مسأله. تابع $f(x)$ را از درجهٔ دوم چنان پیدا کنید که اولاً

$f(0)=0$ و ثانیاً $f(x)-f(x-1)\equiv x$ باشد و ثابت کنید در این صورت $f(n)$ مجموع n عدد صحیح متوالی است.

حل. با توجه به اینکه $f(x)$ از درجه دوم و $f(0)=0$ است داریم:

$$f(x)=ax^2+bx$$

$$f(x-1)=a(x-1)^2+b(x-1) \quad \text{و از آنجا:}$$

و بنابراین طبق فرض مسأله باید داشته باشیم:

$$(ax^2+bx)-[a(x-1)^2+b(x-1)]\equiv x$$

$$2ax+(b-a)\equiv x \quad \text{و یا:}$$

و از آنجا با کمک دستگاه زیر مقادیر a و b بدست می آید:

$$\begin{cases} 2a=1 \\ b-a=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=\frac{1}{2}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}x(x+1) \quad \text{و بنابراین:}$$

اکنون اگر در اتحاد $f(x)-f(x-1)\equiv x$ به ترتیب مقادیر $1, 2, 3, \dots, n$ را بجای x قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\begin{array}{l} f(1)-f(0)=1 \\ f(2)-f(1)=2 \\ + f(3)-f(2)=3 \\ \dots \dots \dots \\ f(n)-f(n-1)=n \\ \hline f(n)-f(0)=1+2+3+\dots+n \end{array}$$

و چون $f(0)=0$ است، خواهیم داشت:

$$S_1=f(n)=\frac{1}{2}n(n+1)$$

روشهایی را که برای محاسبه S_1 بکار بردیم، می توان عمومیت داد و

برای محاسبه $S_2, S_3, \dots$ نیز مورد استفاده قرار داد.

محاسبه S_r

روش اول. از اتحاد زیر استفاده می‌کنیم:

$$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

اگر n و $\dots$ و 2 و 1 و $x=0$ فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{array}{r}
 1^3 = 1 \\
 2^3 = 1^3 + 3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1 \\
 3^3 = 2^3 + 3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1 \\
 4^3 = 3^3 + 3 \times 3^2 + 3 \times 3 + 1 \\
 \dots \\
 (n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\
 \hline
 (n+1)^3 = 3S_r + 3S_1 + (n+1)
 \end{array}$$

که اگر $S_1 = \frac{1}{2}n(n+1)$ قرار دهیم، بدست می‌آید:

$$S_r = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

روش دوم. مسأله. تابع $f(x)$ از درجه سوم را با شرطهای $f(0)=0$ و

$f(x) - f(x-1) \equiv x^2$ پیدا کنید و ثابت کنید که $f(n)$ برابر است با مجموع مربعات n عدد صحیح متوالی.

حل. تابع $f(x)$ با توجه به اینکه $f(0)=0$ است به این صورت است:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$$

و بنابراین با توجه به شرط دوم مسأله باید داشته باشیم:

$$(ax^3 + bx^2 + cx) - [a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1)] \equiv x^2$$

و از آنجا دستگاه زیر برای محاسبه مقادیر a و b و c بدست می‌آید:

$$\begin{array}{l}
 \left| \begin{array}{l}
 3a = 1 \\
 3a - 2b = 0 \\
 a - b + c = 0
 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l}
 a = \frac{1}{3} \\
 b = \frac{1}{2} \\
 c = \frac{1}{6}
 \end{array}
 \end{array}$$

و بنابراین:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x = \frac{1}{6}x(x+1)(2x+1)$$

از طرف دیگر با توجه به اتحاد $f(x) - f(x-1) \equiv x^2$ به ترتیب داریم

$$\begin{array}{r}
 f(1) - f(0) = 1^2 \\
 f(2) - f(1) = 2^2 \\
 + \quad f(3) - f(2) = 3^2 \\
 \hline
 \hline
 f(n) - f(n-1) = n^2 \\
 \hline
 f(n) - f(0) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2
 \end{array}$$

$$S_4 = f(n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad \text{واز آنجا:}$$

روش دوم يك برتری نسبت به روش اول دارد و آن این است که باروش اول محاسبه S_4 منجر به محاسبه S_1 می شود در حالیکه با روش دوم مقدار S_4 مستقیماً بدست می آید. با روش دوم می توان مثلاً بطور مستقیم مقدار S_5 را بدست آورد، در حالیکه برای محاسبه S_5 باروش اول باید قبلاً S_1 ، S_2 و S_3 را محاسبه کرد.

اکنون مسأله را با کمک روش دوم در حالت کلی مطرح می کنیم.

مسأله. ثابت کنید که رابطه S_k دارای شرطهای زیر است:

اولاً نسبت به n چند جمله ای است از درجه $k+1$.

ثانیاً این چند جمله ای فاقد مقدار ثابت است.

ثالثاً سه ضریب اولیه این چند جمله ای به ترتیب عبارتست از: $\frac{1}{1+k}$

$$\frac{k}{12} \text{ و } \frac{1}{2}$$

حل. تابع $f(x)$ از درجه $k+1$ را بطوری تعیین می کنیم که در شرطهای

$$f(0) = 0 \text{ و } f(x) - f(x-1) \equiv x^k \text{ صدق کند.}$$

به سادگی می توان ثابت کرد که در این صورت تابع $f(n)$ همان S_k خواهد

بود. در اتحاد:

$$f(x) - f(x-1) \equiv x^k$$

به جای x به ترتیب مقادیر $1, 2, 3, \dots, n$ را قرار می دهیم:

$$\begin{array}{r} f(1) - f(0) = 1^k \\ f(2) - f(1) = 2^k \\ + \quad f(3) - f(2) = 3^k \\ \dots \dots \dots \\ f(n) - f(n-1) = n^k \\ \hline f(n) - f(0) = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k \end{array}$$

در نتیجه با توجه به شرط $f(0) = 0$ خواهیم داشت :

$$S_k = f(n)$$

حالا $f(x)$ را محاسبه می کنیم . $f(x)$ از درجه $k+1$ است:

$$f(x) = ax^{k+1} + bx^k + cx^{k-1} + \dots + lx \quad (1)$$

(با توجه به شرط $f(0) = 0$ برای $f(x)$ مقدار ثابت منظور نکردیم)

$$\begin{aligned} f(x-1) &= a(x-1)^{k+1} + b(x-1)^k + \dots + l(x-1) \\ &+ c(x-1)^{k-1} + \dots + l(x-1) \end{aligned} \quad (2)$$

با توجه به رابطه های (1) و (2) اتحاد $f(x) - f(x-1) \equiv x^k$

به صورت زیر در می آید :

$$\begin{aligned} a(k+1)x^k + \left[-\frac{a}{1}(k+1)k + bk \right] x^{k-1} + \\ \left[\frac{a}{2}(k+1)k(k-1) - \frac{b}{1}k(k-1) + \right. \\ \left. + c(k-1) \right] x^{k-2} + \dots \equiv x^k \end{aligned}$$

و دستگاه زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a(k+1) = 1 \\ -\frac{a}{1}(k+1)k + bk = 0 \\ \frac{a}{2}(k+1)k(k-1) - \frac{b}{1}k(k-1) + c(k-1) = 0 \end{cases}$$

که از آنجا بدست می آید:

$$a = \frac{1}{k+1} \text{ و } b = \frac{1}{2} \text{ و } c = \frac{k}{12}$$

یعنی خواهیم داشت :

$$f(x) = \frac{1}{k+1} x^{k+1} + \frac{1}{2} x^k + \frac{k}{12} x^{k-1} + dx^{k-2} + \dots + lx$$

باتوجه به آنچه گفتیم می توان S_k را در هر مورد مشخص محاسبه کرد .

محاسبه S_3 ($k=3$)

$$S_3 = \frac{1}{4} n^4 + \frac{1}{2} n^3 + \frac{1}{4} n^2 + An$$

کافی است مقدار A را محاسبه کنیم. در اتحاد :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4} n^4 + \frac{1}{2} n^3 + \frac{1}{4} n^2 + An$$

$n=1$ می گیریم:

$$1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + A \Rightarrow A = 0$$

و بنابراین :

$$S_3 = \frac{1}{4} n^4 + \frac{1}{2} n^3 + \frac{1}{4} n^2 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$$

محاسبه S_4 ($k=4$)

$$S_4 = \frac{1}{5} n^5 + \frac{1}{2} n^4 + \frac{1}{3} n^3 + An^2 + Bn$$

در اتحاد:

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \frac{1}{5} n^5 + \frac{1}{2} n^4 + \frac{1}{3} n^3 + An^2 + Bn$$

به ترتیب $n=1$ و $n=2$ قرار می دهیم:

$$\begin{cases} 1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + A + B \\ 17 = \frac{32}{5} + 8 + \frac{8}{3} + 4A + 2B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -\frac{1}{30} \end{cases}$$

و بنا براین :

$$S_r = \frac{1}{\Delta} n^{\Delta} + \frac{1}{r} n^r + \frac{1}{r} n^r - \frac{1}{r_0} n =$$

$$= \frac{1}{r_0} n(n+1)(rn+1)(rn^r+rn-1)$$

۲. مجموعه‌هایی که با S_k بدست می‌آیند

هر مجموعه‌ای که از جمله p ام به بعد دارای جمله عمومی به صورت یک چند جمله‌ای بر حسب n باشد، با کمک S_k قابل محاسبه است.

مثال ۱. مطلوب است محاسبه مجموع زیر :

$$A = 1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + 3 \times 4 \times 5 + \dots + \\ + n(n+1)(n+2)$$

حل. جمله عمومی یعنی $n(n+1)(n+2)$ را به صورت چند جمله ای

می نویسیم۔

$$n(n+1)(n+2) = n^3 + 3n^2 + 2n \quad (1)$$

حالا در دو طرف اتحاد (۱) به ترتیب بجای n عددهای صحیح متوالی

را قرار می دهیم و با هم جمع می کنیم:

$$\begin{array}{r}
 1 \times 2 \times 3 = 1^2 + 3 \times 1^2 + 2 \times 1 \\
 2 \times 3 \times 4 = 2^2 + 3 \times 2^2 + 2 \times 2 \\
 + \quad 3 \times 4 \times 5 = 3^2 + 3 \times 3^2 + 2 \times 3 \\
 \hline
 n(n+1)(n+2) = n^2 + 3n^2 + 2n \\
 \hline
 A = S_r + rS_r + rS_r
 \end{array}$$

و حالا اگر بجای S_1 ، S_2 و S_3 مقادارهایشان را قرار دهیم، مقدار A بدست می آید :

$$A = \frac{n^r(n+1)^r}{r} + r \times \frac{n(n+1)(r+1)}{2} + r \times \frac{n(n+1)}{2}$$

و یا پس از ساده کردن خواهیم داشت :

$$A = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

مثال ۲. اگر جمله عمومی يك مجموع به صورت $u_n = n^2 + n + 2$ باشد، مجموع n جمله آنرا بدست آورید:

حل. بترتیب داریم:

$$\begin{array}{r}
 u_1 = 1^2 + 1 + 2 \\
 u_2 = 2^2 + 2 + 2 \\
 + \quad u_3 = 3^2 + 3 + 2 \\
 \dots \dots \dots \\
 u_n = n^2 + n + 2 \\
 \hline
 S = S_1 + S_2 + 2n
 \end{array}$$

(مجموع $S = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ فرض کردیم). از آنجا:

$$S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} + 2n$$

و یا پس از ساده کردن: $S = \frac{1}{3}n(n^2 + 9n + 2)$

۳. مجموعهایی که جمله عمومی آنها به صورت $f(n+\alpha) - f(n)$ باشد.

بررسی اینگونه مجموعهها را با ذکر چند مثال روشن می کنیم.

مثال ۱. مطلوب است محاسبه مجموع زیر:

$$0 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{2+\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$$

حل. جمله عمومی این مجموع به صورت $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$

است که آنرا می توان چنین نوشت:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$$

که اگر $f(n) = \frac{1}{2}\sqrt{n}$ بگیریم جمله عمومی به صورت:

$u_n = f(n+2) - f(n)$ است. اگر به جای n به ترتیب عددهای متوالی از صفر تا n را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 & u_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 0) \\
 & u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1) \\
 + & u_2 = \frac{1}{2+\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(2-\sqrt{2}) \\
 & u_3 = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3}) \\
 & \dots \\
 & u_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})
 \end{aligned}$$

بعد از جمع این تساویها بایکدیگر بدست می آید:

$$s = \frac{1}{2}(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} - 1)$$

مثال ۲. اولاً اگر جمله عمومی یک مجموع به صورت $u_n = \log\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

باشد، مجموع n جمله آنرا (به ازای n ، $3, \dots, 2$) بدست آورید.
ثانیاً حد مجموع این جملهها را وقتی که n به سمت بی نهایت میل کند بدست آورید.

حل. اولاً جمله عمومی را می توان چنین نوشت:

$$u_n = \log \frac{n^2 - 1}{n^2} = \log \frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}} = \log \frac{n+1}{n} - \log \frac{n}{n-1}$$

و بنابراین جمله عمومی به صورت $f(n+1) - f(n)$ است. اگر بجای n مقادیر متوالی ۲، ۳، ۴، ... و n را قرار دهیم:

$$\begin{array}{l}
 u_1 = \log \frac{3}{2} - \log 2 \\
 + u_2 = \log \frac{4}{3} - \log \frac{3}{2} \\
 \hline
 u_n = \log \frac{n+1}{n} - \log \frac{n}{n-1} \\
 \hline
 \sigma_n = \log \frac{n+1}{n} - \log 2
 \end{array}$$

ثانیاً به سادگی داریم:

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\log \frac{n+1}{n} - \log 2 \right) = \log 1 - \log 2 = -\log 2$$

مثال ۳. حد مجموع زیر را وقتی که n به سمت بی نهایت میل کند پیدا کنید:

$$\sigma_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

حل. جمله عمومی این مجموع، یعنی $\frac{1}{n(n+1)}$ ، را می توان چنین نوشت:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n(n+1)} &= \frac{(n+1) - n}{n(n+1)} = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \\
 &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}
 \end{aligned}$$

اگر در دو طرف اتحاد $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ به ترتیب بجای

n مقادیر صحیح متوالی ۱ تا n را قرار دهیم و با هم جمع کنیم، بدست می آید:

$$\sigma_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

و بنابراین داریم:

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

مثال ۴. مجموع زیر مفروض است:

$$A_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

که در آن $u_n = \frac{4n}{n^4 + 2n^2 + 9}$ می باشد، A_n را محاسبه کنید و مقدار $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ را بدست آورید.

حل. ابتدا مخرج کسر u_n را تجزیه می کنیم:

$$\begin{aligned} n^4 + 2n^2 + 9 &= (n^2 + 2)^2 - 4n^2 = \\ &= (n^2 + 2n + 3)(n^2 - 2n + 3) \end{aligned}$$

و حالا کوشش می کنیم کسر u_n را به دو کسر ساده تر تبدیل کنیم، فرض می کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{4n}{n^4 + 2n^2 + 9} &= \frac{4n}{(n^2 + 2n + 3)(n^2 - 2n + 3)} = \\ &= \frac{a}{n^2 + 2n + 3} + \frac{b}{n^2 - 2n + 3} \end{aligned}$$

در اتحاد فوق a و b را محاسبه می کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} \frac{a}{n^2 + 2n + 3} + \frac{b}{n^2 - 2n + 3} &= \\ &= \frac{(a+b)n^2 + 2(b-a)n + 3(a+b)}{n^4 + 2n^2 + 9} \end{aligned}$$

و باید داشته باشیم:

$$4n = (a+b)n^2 + 2(b-a)n + 3(a+b)$$

و از آنجا:

$$\begin{cases} a+b=0 \\ b-a=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$$

یعنی داریم:

$$u_n = \frac{4n}{n^4 + 2n^2 + 9} = \frac{1}{(n-1)^2 + 2} - \frac{1}{(n+1)^2 + 2}$$

همانطور که می بینیم u_n به صورت $f(n) - f(n+2)$ می باشد و از آنجا به سادگی بدست می آید:

$$A_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n^2 + 2} - \frac{1}{(n+1)^2 + 2}$$

و روشن است که :

$$A = a_{n \rightarrow \infty} \rightarrow A_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

مثال ۵. محاسبه $\sum \sin n\alpha$ و $\sum \cos n\alpha$
می‌خواهیم مجموعهای زیر را محاسبه کنیم.

$$۱) \quad \sum_{k=1}^n \sin kx = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx$$

$$۲) \quad \sum_{k=1}^n \cos kx = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx$$

حل. جمله عمومی $\sin nx$ را می‌توان چنین نوشت:

$$\sin nx = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \cdot 2 \sin nx \sin \frac{x}{2} =$$

$$= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left[\cos \left(n - \frac{1}{2} \right) x - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x \right]$$

که اگر بجای n به ترتیب عددهای صحیح ۱ تا n قرار دهیم و باهم جمع کنیم، می‌شود:

$$\sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left[\cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x \right] = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x \sin \frac{n}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}$$

و به همین ترتیب بدست می‌آید:

$$\sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left[\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x - \sin \frac{x}{2} \right] =$$

$$= \frac{\sin \frac{n}{2} x \cos \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}}$$

۱- منظور از $\sum_{n=1}^n f(n)$ یعنی مجموع $f(1) + f(2) + \dots + f(n)$

۴. استفاده از مشتق و تابع اولیه

مجموع زیر را در نظر می گیریم:

$$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1} \quad (۱)$$

این مجموع را می توان بدین طریق محاسبه کرد. ابتدا دوطرف رابطه

(۱) را در x ضرب می کنیم:

$$xf(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots + (n-1)x^{n-1} + nx^n \quad (۲)$$

و رابطه (۲) را از رابطه (۱) کم می کنیم ، می شود :

$$f(x) - xf(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} - nx^n \quad (۳)$$

n جمله اول مجموع (۳) تشکیل تصاعد هندسی می دهند و بنابراین داریم:

$$(1-x)f(x) = \frac{x^n - 1}{x - 1} - nx^n = \frac{-nx^{n+1} + (1+n)x^n - 1}{x - 1}$$

$$f(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2} \quad \text{و از آنجا:}$$

و همچنین می توان مجموع (۱) را به طریق زیر هم محاسبه کرد. اگر

تابع اولیه $f(x)$ را $F(x)$ بنامیم ، داریم:

$$F(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + c = \frac{x(x^n - 1)}{x - 1} + c$$

و حالا برای محاسبه $f(x)$ باید مشتق $F(x)$ را بدست آورد :

$$F'(x) = f(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$$

مثال ۴. مطلوب است محاسبه مجموع زیر :

$$\varphi(x) = \sin x + 3 \sin 2x + 5 \sin 3x + \dots + (2n-1) \sin (2n-1)x$$

اگر تابع اولیه $\varphi(x)$ را $\Phi(x)$ فرض کنیم ، داریم:

$$-\Phi(x) = \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \dots + \cos (2n-1)x + c$$

و با توجه به اتحاد :

$$\cos (2n-1)x = \frac{1}{2 \sin x} [\sin 2nx - \sin 2(n-1)x]$$

خواهیم داشت:

$$\Phi(x) = -\frac{\sin^2 nx}{2 \sin x} + c$$

و چون $\varphi(x)$ مشتق $\Phi(x)$ است، به سادگی بدست می‌آید:

$$\varphi(x) = \frac{\sin^2 nx \cos x - 2n \cos^2 nx \sin x}{2 \sin^2 x}$$

مثال ۳. مجموع بی‌نهایت جمله زیر را با شرط $|x| < 1$ بدست آورید

و از آنجا راهی برای معرفی π به صورت یک مجموع پیدا کنید:

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots \quad (1)$$

حل. این مجموع عبارت است از مجموع بی‌نهایت جمله از یک تصاعد

هندسی نزولی با جمله اول ۱ و قدرنسبت $-x^2$ ، و بنابراین دارای حدی

$$\text{است مساوی } \frac{1}{1+x^2}$$

از طرف دیگر می‌دانیم $\frac{1}{1+x^2}$ مشتق $\text{Arctg} x$ است و بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \text{Arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots + \\ + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

[از عبارت (۱) نسبت به x تابع اولیه گرفته‌ایم].

اکنون اگر در اتحاد (۲)، $x=1$ فرض کنیم، بدست می‌آید:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \dots$$

$$\pi = 4 \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \dots \right] \quad \text{و یا:}$$

تمرینها

مطلوب است محاسبه مجموعهای زیر :

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1)$$

۵۱۲

$$۳ + ۳۳ + ۳۳۳ + \dots + \underbrace{۳۳\dots ۳}_n \text{ رقم} \quad .۵۱۳$$

$$\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \quad .۵۱۴$$

$$\sin^r x + \sin^r 2x + \sin^r 3x + \dots + \sin^r nx \quad .۵۱۵$$

$$\cos^r x + \cos^r 2x + \cos^r 3x + \dots + \cos^r nx \quad .۵۱۶$$

$$\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{3^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \dots + \frac{1}{n^2-1} \quad .۵۱۷$$

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \frac{7}{144} + \dots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \quad .۵۱۸$$

$$k! + k \cdot k! + (k+1)(k+1)! + \dots + (n-1)(n-1)! \quad .۵۱۹$$

$$\sin^r \alpha + \frac{1}{4} \sin^r 2\alpha + \frac{1}{16} \sin^r 4\alpha + \dots + \frac{1}{4^n} \sin^r 2^n \alpha \quad .۵۲۰$$

$$\frac{3}{1!+2!+3!} + \frac{4}{2!+3!+4!} + \dots + \frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!} \quad .۵۲۱$$

$$\frac{n}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} + \dots + \frac{n+p}{(n+p+1)!} \quad .۵۲۲$$

$$.۵۲۳ \text{ اگر } u_1 = 1 \text{ و } u_n = k + u_{n-1} \text{ باشد ، ثابت کنید:}$$

$$u_n + u_{n+1} = (n+1)^2$$

$$.۵۲۴ \text{ ثابت کنید:}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{9999}{10000} < 0.01$$

$$.۵۲۵ \text{ ثابت کنید:}$$

$$n + 2(n-1) + 3(n-2) + \dots + n = \frac{1}{2} [n(n+1) + (n-1)n + (n-2)(n-1) + \dots + 2 \times 1]$$

$$.۵۲۶ \text{ اگر } a_1 = 1 \text{ و برای } k \geq 2 \text{ داشته باشیم: } a_k = 3a_{k-1} + 2^{k-1} \text{ جمله } a_n \text{ را بر حسب } n \text{ پیدا کنید.}$$

$$.۵۲۷ \text{ مجموع يك رشته عددهای فرد متوالی مساوی } ۷^3 \text{ شده است ، این رشته}$$

را معین کنید.

۵۲۸. اگر داشته باشیم:

$$a_{k+1} = \frac{3a_k - 1}{-a_k + 3} \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

مطلوب است محاسبه a_n بر حسب a_1 و حد آن وقتی که n به سمت

بی نهایت میل کند.

۵۲۹. اگر فرض کنیم :

$$S_k = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k$$

و بدانیم :

$$S_1 = 3 ; S_2 = 6 ; S_3 = 11 ; S_4 = 18 ; S_5 = 27 ; \dots$$

مطلوب است تعیین u_n و S_n .

۵۳۰. اگر $u_n = \text{Arctg} \frac{1}{n^2 + n + 1}$ باشد، مطلوب است محاسبه:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

و حد S_n وقتی که n به سمت بی نهایت میل کند.

۵۳۱. مطلوب است محاسبه مجموع:

$$S_n = \log \cos \frac{x}{2} + \log \cos \frac{x}{4} + \dots + \log \cos \frac{x}{2^n}$$

و حد S_n وقتی n به سمت بی نهایت میل کند.

در هر يك از تمرینهای زیر با در دست داشتن u_n اولاً

$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ را وقتی n به سمت بی نهایت میل کند، پیدا کنید :

$$u_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{2^{n+1}} \quad ۵۳۲ \quad u_n = \frac{x^{2^n}}{1 - x^{2^{n+1}}} \quad ۵۳۳$$

$$u_n = \frac{\sin \frac{1}{n(n+1)}}{\cos \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n+1}} \quad ۵۳۴$$

$$u_n = \frac{(-1)^{n-1} \cos^{2^n} 2^{n-1} \alpha}{2^{n-1}} \quad ۵۳۵$$

$$u_n = \frac{2n+1}{(n^2+2n+2)(n^2+1)} \quad .536$$

$$u_n = \frac{2n-3}{n(n^2-4)} \quad .537$$

$$(u_1=0 \text{ با فرض }) u_n = \frac{2n+2}{(n-1)n(n+1)} \quad .538$$

$$u_n = (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) \quad .539$$

$$u_n = \frac{2n+3n}{9n} \quad .540$$

$$u_n = \frac{2n-1}{2n} \quad .542 \quad u_n = \frac{1}{(2n-2)(2n+1)} \quad .541$$

.543 اگر داشته باشیم:

$$a_1=1; a_2=\frac{1}{1+a_1}; a_3=\frac{1}{1+a_2}; \dots; a_n=\frac{1}{1+a_{n-1}}$$

حد a_n را وقتی n به سمت بی نهایت میل کند، پیدا کنید:

.544 اگر داشته باشیم:

$$a_1=1; a_2=\frac{4-a_1}{3-a_1}; a_3=\frac{4-a_2}{3-a_2}; \dots; a_n=\frac{4-a_{n-1}}{3-a_{n-1}}$$

مطلوب است تعیین جمله a_n بر حسب n و حد آن وقتی n به سمت بی نهایت میل کند.

.545 (a) دنباله‌ای با رابطه برگشتی زیر داده شده است:

$$a_n = a_{n-1} \cos x + \cos(n-1)x \quad (n \geq 2)$$

اگر $a_1=1$ باشد، جمله عمومی آنرا پیدا کنید.

(b) دنباله‌ای با رابطه برگشتی زیر داده شده است:

$$a_n = 2a_{n-1} \cos x + a_{n-2} \quad (n \geq 3)$$

اگر $a_1=1$ و $a_2=2 \cos x$ باشد، جمله عمومی آنرا بدست آورید.

.546 صحت این اتحاد را تحقیق کنید:

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{(2n-2k+1)(2n-k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

.547 دو دنباله زیر مفروض است:

$$a_k = 3^{2k+1} + 3^{k+1} + 4 \quad \text{و} \quad b_k = 3^{2k+1} - 3^{k+1} + 4$$

ثابت کنید برای هر عدد طبیعی k ، یکی از دو عدد a_k و b_k مضرب ۵ هستند.
 ۵۴۸. دو دنباله عددهای حقیقی $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ به صورت زیر داده شده است:

$$1 < a_1 < b_1 \text{ و } a_n = \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} \text{ و } b_n = \frac{b_{n-1} - 1}{a_{n-1} - 1} \quad (n \geq 2)$$

به ازای چه مقادیری از a_1 و b_1 هر دو دنباله متقارنند؟
 ۵۴۹. ثابت کنید که اگر يك تصاعد هندسی از عددهای طبیعی مختلف تشکیل شده و بیش از دو جمله داشته باشد، مجموع جمله‌های آن نمی‌تواند توانی از ۳ باشد.

۵۵۰. اگر n عددی طبیعی باشد، مجموع زیر را محاسبه کنید:

$$S = a + 2a^3 + 2a^5 + \dots + na^{2n-1}$$

۵۵۱. مطلوب است محاسبه حاصلضرب زیر بر حسب x و n :

$$P = \left(x + \frac{1}{x} - 1\right) \left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 1\right) \left(x^4 + \frac{1}{x^4} - 1\right) \dots \left(x^{2^n} + \frac{1}{x^{2^n}} - 1\right)$$

۵۵۲. اگر داشته باشیم:

$$S_n = \frac{3}{1 \times 2 \times 3} + \frac{5}{2 \times 3 \times 4} + \frac{7}{3 \times 4 \times 5} + \dots + \frac{2n+1}{n(n+1)(n+2)}$$

اولا S_n را محاسبه کنید. ثانياً وقتی که n به سمت بی نهایت میل کند،

حد S_n چقدر است؟

۱۲

نامعادله‌ها و نامساویها

بحث نامساویها یکی از دلکش‌ترین و درعین حال دشوارترین بحث‌های ریاضیات مقدماتی است. همراه نامساویها، می‌توان از نامعادله‌ها نام برد که بحث کلی آنها منجر به تعیین علامت یک تابع می‌شود و باز هم در حالت‌های کلی‌تر، وضعی بفرنج پیدامی‌کند. با وجودی که دستگاه‌های خطی نامعادله‌ها (نا حالت دو مجهولی) و نامعادله‌های گنگ (در حالت‌های ساده) جزئی از ریاضیات مقدماتی است، در کتاب‌های درسی دبیرستانی ذکر آن‌ها به میان نیامده است.

در این بخش کوشش شده است با ذکر مثال‌های ساده، لااقل روش حل موارد ساده اینگونه نامعادله‌ها روشن و بعضی از نکته‌های لازمی که در کتاب‌های درسی وجود ندارد برای دانش آموز علاقمند به میان گذاشته شود.

I. نامعادله‌ها

۱. حل نامعادله‌های مضاعف

روشن است که اگر داشته باشیم: $-a < u < a$ ($a > 0$ فرض شده است)، می‌توان آنرا به یکی از دو صورت زیر هم نوشت:

$$|u| < a \text{ و } u^2 < a^2$$

به این ترتیب با رسیدن به نامعادله $u^2 < a^2$ ، نامعادله مضاعف (یا بهتر بگوییم دستگاه نامعادله‌های) $-a < u < a$ به یک نامعادله تبدیل می‌شود. مثال ۱. x را طوری پیدا کنید که داشته باشیم:

$$-1 < \frac{x^2 - x}{x^2 - 2x - 35} < 1$$

حل. این دستگاه نامعادله‌ها با نامعادله زیر هم ارز است:

$$\frac{(x^2 - x)^2}{(x^2 - 2x - 35)^2} < 1 \Rightarrow \frac{(x^2 - x)^2 - (x^2 - 2x - 35)^2}{(x^2 - 2x - 35)^2} < 0$$

با شرط $x \neq -5$ و $x \neq 7$ (ریشه‌های مخرج کسر هستند)

و تجزیه عبارت صورت کسر بدست می‌آید:

$$(x + 35)(2x^2 - 3x - 35) < 0$$

$$x + 35 = 0 \Rightarrow x = -35$$

$$2x^2 - 3x - 35 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{2} \text{ و } 7$$

x	$-\infty$	-35	$-\frac{5}{2}$	7	$+\infty$
$x + 35$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2x^2 - 3x - 35$	$+$	$+$	0	$-$	$+$
$(x + 35)(2x^2 - 3x - 35)$	$-$	0	$+$	$-$	$+$

و بنابراین جوابهای x چنین است:

$$x < -۳۵ \text{ و } -\frac{۷}{۲} < x < ۵$$

در حالتی که نامعادله مضاعف به صورت $a < u < b$ باشد ($a < b$)

فرض شده است)، اگر واسطه عددی a و b ، یعنی $\frac{a+b}{۲}$ را از هر سه عضو

نامعادله مضاعف کم کنیم، به نامعادله مضاعفی از نوع قبل می‌رسیم:

$$a < u < b \Rightarrow a - \frac{a+b}{۲} < u - \frac{a+b}{۲} < b - \frac{a+b}{۲}$$

که پس از ساده کردن، چنین می‌شود:

$$\frac{a-b}{۲} < u - \frac{a+b}{۲} < \frac{b-a}{۲}$$

و همانطور که دیده می‌شود $\frac{a-b}{۲}$ و $\frac{b-a}{۲}$ قرینه یکدیگرند.

مثال ۲. مطلوب است حل این دستگاه نامعادله‌ها:

$$-۱ < \frac{۲x^2 + x + ۱}{۲x + ۱} < ۲$$

حل. واسطه عددی -۱ و ۲ یعنی $\frac{۱}{۲}$ را از هر سه جمله نامعادله مضاعف

کم می‌کنیم:

$$-۱ - \frac{۱}{۲} < \frac{۲x^2 + x + ۱}{۲x + ۱} - \frac{۱}{۲} < ۲ - \frac{۱}{۲} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -۳ < \frac{۴x^2 + ۱}{۲x + ۱} < ۳$$

و از آنجا خواهیم داشت:

$$\frac{(۴x^2 + ۱)^2}{(۲x + ۱)^2} < ۹ \Rightarrow \begin{cases} (۴x^2 + ۱)^2 - ۹(۲x + ۱)^2 < ۰ \\ x \neq -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

نامعادله را ساده می‌کنیم:

$$(۴x^2 - ۶x - ۲)(۴x^2 + ۶x + ۴) < ۰$$

عبارت $4x^2 + 6x + 4$ ریشه‌هایی موهومی دارد و بنابراین همیشه مثبت است. جوابهای نامعادله چنین است:

$$\frac{3 - \sqrt{17}}{4} < x < \frac{3 + \sqrt{17}}{4}$$

مثال ۳. این نامعادله مضاعف را حل کنید:

$$x < \frac{4x - 3}{x} < x + 2$$

حل. واسطه‌عددی x و $x + 2$ (یعنی $x + 1$) را از سه جمله نامعادله مضاعف کم می‌کنیم، می‌شود:

$$-1 < \frac{4x - 3}{x} - (x + 1) < 1 \Rightarrow -1 < \frac{-x^2 + 3x - 3}{x} < 1;$$

$$\begin{cases} (x^2 - 3x + 3)^2 - x^2 < 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow 1 < x < 3$$

مثال ۴. مطلوب است حل نامعادله مضاعف زیر:

$$3x - 5 < \frac{1}{x + 1} < x - 1$$

حل. واسطه‌عددی $3x - 5$ و $x - 1$ مساوی $2x - 3$ است، بنابراین به ترتیب داریم:

$$x - 2 < \frac{1}{x + 1} - (2x - 3) < -(x - 2);$$

$$\left(\frac{-2x^2 + x + 4}{x + 1} \right)^2 < (x - 2)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (-2x^2 + x + 4)^2 - (x^2 - x - 2)^2 < 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

نامعادله این دستگاه مختلط به این صورت ساده می‌شود:

$$(3x^2 - 2x - 6)(x^2 - 2) < 0$$

و جوابهای دستگاه اصلی چنین می‌شود:

$$-\sqrt{2} < x < -\frac{\sqrt{19} - 1}{3} \text{ و } \sqrt{2} < x < \frac{\sqrt{19} + 1}{3}$$

۲. نامعادله‌های شامل پارامتر

مثال ۱. مطلوب است حل نامعادله $\frac{x+3a}{ax-2} < 1$

حل. بعد از ساده کردن نامعادله بدست می‌آید:

$$\frac{(1-a)x+3a+2}{ax-2} < 0 \quad (1)$$

$$(1-a)x+3a+2=0 \Rightarrow x=\frac{3a+2}{a-1}$$

$$ax-2=0 \Rightarrow x=\frac{2}{a}$$

برای اینکه بدانیم از دو مقدار $\frac{3a+2}{a-1}$ و $\frac{2}{a}$ کدام بزرگ‌ترند، تفاضل

آنها را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{3a+2}{a-1} - \frac{2}{a} = \frac{a(3a+2)-2(a-1)}{a(a-1)} = \frac{3a^2+2}{a(a-1)}$$

صورت این کسر همیشه مثبت است (زیرا ریشه‌های موهومی دارد) و مخرج

آن به ازای $0 < a < 1$ منفی و به ازای $a < 0$ یا $a > 1$ مثبت است. یعنی داریم:

$$0 < a < 1 \Rightarrow \frac{3a+2}{a-1} < \frac{2}{a}$$

$$a < 0 \text{ یا } a > 1 \Rightarrow \frac{2}{a} < \frac{3a+2}{a-1}$$

برای جوابهای نامعادله (۱) (که هم ارز نامعادله اصلی است) این

حالتها را داریم:

(۱) $0 < a < 1$ ؛ در این حالت ضریبهای x در صورت و مخرج هم

علامت‌اند، زیرا $a(1-a)$ به ازای $0 < a < 1$ مثبت است بنابراین داریم:

$$0 < a < 1 \Rightarrow \frac{3a+2}{a-1} < x < \frac{2}{a}$$

(۲) $a < 0$ یا $a > 1$ ؛ در این حالت ضریبهای x در صورت و مخرج

کسر سمت چپ نامعادله (۱) با علامتهای مختلف‌اند و داریم:

$$a < 0 \text{ یا } a > 1 \Rightarrow x < \frac{2}{a} \text{ یا } x > \frac{3a+2}{a-1}$$

(۳) $a=0$ ؛ در این حالت نامعادله (۱) به صورت $\frac{x+2}{-2} < 0$ و یا

$$x > -2 \text{ در می‌آید.}$$

(۴) $a=1$ ؛ در این حالت نامعادله (۱) به صورت $\frac{5}{x-2} < 0$ و یا

$$x < 2 \text{ در می‌آید.}$$

جوابهای نامعادله را در جدول زیر منظم کرده‌ایم:

مقدار پارامتر	جوابهای نامعادله
$0 < a < 1$	$\frac{3a+2}{a-1} < x < \frac{2}{a}$
$a < 0 \text{ یا } a > 1$	$x < \frac{2}{a} \text{ یا } x > \frac{3a+2}{a-1}$
$a=0$	$x > -2$
$a=1$	$x < 2$

مثال ۲. این نامعادله را حل کنید: $\frac{2ax+3}{5x-4a} < 4$

حل. عدد ۴ را به سمت چپ می‌بریم و ساده می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$\frac{2(a-10)x+16a+3}{5x-4a} < 0 \quad (1)$$

جواب صورت کسر $x = -\frac{16a+3}{2(a-10)}$ و جواب مخرج کسر

$x = \frac{4a}{5}$ است. این دو مقدار را مقایسه می‌کنیم.

$$\frac{4a}{5} - \left[-\frac{16a+3}{2(a-10)} \right] = \frac{4a}{5} + \frac{16a+3}{2(a-10)} = \frac{8a^2+15}{10(a-10)}$$

سه حالت خواهیم داشت:

$$(1) \ a < 10, \text{ در این صورت } \frac{4a}{5} < -\frac{16a+3}{2(a-10)} \text{ و جوابهای}$$

نامعادله (۱) چنین می شود.

$$a < 10 \Rightarrow x < \frac{4a}{5} \text{ یا } x > -\frac{16a+3}{2(a-10)}$$

$$(2) \ a > 10, \text{ در این صورت } -\frac{16a+3}{2(a-10)} < \frac{4a}{5} \text{ و جوابهای نا-}$$

معادله (۱) چنین است:

$$a > 10 \Rightarrow -\frac{16a+3}{2(a-10)} < x < \frac{4a}{5}$$

$$(3) \ a = 10, \text{ در این حالت نامعادله (۱) به صورت } \frac{163}{5(x-8)} < 0$$

در می آید و داریم:

$$a = 10 \Rightarrow x < 8$$

۳. دستگاه نامعادله‌ها

الف) دستگاه نامعادله‌های شامل یک مجهول .

مثال ۱. به ازای چه مقادیری از x تابع زیر حقیقی است؟

$$y = \sqrt{21+4x-x^2} + \sqrt{\frac{x^2-16}{x}}$$

حل. برای اینکه هردو رادیکال حقیقی باشند، باید دستگاه نامعادله-

های زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} -x^2+4x+21 \geq 0 \\ \frac{x^2-16}{x} \geq 0 \end{cases}$$

$$-x^2 + 4x + 21 = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ و } 7$$

$$x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x = \pm 4$$

جدول علامتها را تشکیل می‌دهیم:

x	$-\infty$	-4	-3	0	4	7	$+\infty$
$-x^2+4x+21$		-	- 0 +	+	+	0 -	
x^2-16		+	0 -	-	- 0 +	+	
x		-	-	- 0 +	+	+	
$\frac{x^2-16}{x}$		-	0 +	+	0 -	+	
x							

روی جدول دیده می‌شود که وقتی x بین -3 و 4 و 7

واقع باشد هم عبارت $-x^2 + 4x + 21$ و هم کسر $\frac{x^2 - 16}{x}$ مثبت اند،

بنابراین جواب چنین است:

$$-3 < x < 4 \text{ یا } 4 < x < 7$$

مثال ۲. به ازای چه مقادیری از m عبارت درجه دوم زیر همواره منفی

می‌شود:

$$y = (2m + 3)x^2 - 3(m + 2)x + 4m + 3$$

حل. برای اینکه یک عبارت درجه دوم علامت ثابتی داشته باشد باید

مبین آن منفی باشد. در چنین صورتی (یعنی اگر مبین عبارت درجه دوم منفی

باشد) علامت عبارت، همان علامت ضرب درجه دوم است؛ بنابراین برای اینکه

علامت این عبارت همواره منفی باشد، باید ضمناً ضریب درجه دوم آن نیز

منفی باشد. به این ترتیب دستگاه نامعادله‌های زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9(m+2)^2 - 4(2m+3)(4m+3) < 0 \\ 2m+3 < 0 \end{cases}$$

که پس از ساده کردن چنین می‌شود:

$$\begin{cases} -23m^2 - 36m < 0 \Rightarrow m < -\frac{36}{23} \text{ یا } m > 0 \\ 2m + 3 < 0 \Rightarrow m < -\frac{3}{2} \end{cases}$$

که جواب مشترک آنها $m < -\frac{36}{23}$ است. یعنی به ازای هر مقدار

m که از $-\frac{36}{23}$ کوچکتر باشد عبارت y همواره (یعنی به ازای همه مقادیر x) منفی می شود.

ب) دستگاه نامعادله‌های شامل دو مجهول

مثال ۱. دستگاه نامعادله‌های زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} 2x + 5y < 7 \\ 3x - 4y < 1 \end{cases}$$

حل. در هر دو نامعادله y را بر حسب x پیدا می کنیم :

$$y < \frac{7-2x}{5} \text{ و } y > \frac{3x-1}{4}$$

از این دو نامعادله نتیجه می شود : $\frac{3x-1}{4} < y < \frac{7-2x}{5}$

نامعادله $\frac{3x-1}{4} < \frac{7-2x}{5}$ را حل می کنیم که از آنجا جواب

$x < \frac{33}{23}$ بدست می آید. بنابراین جوابهای دستگاه چنین است:

$$x < \frac{33}{23} \text{ و } \frac{3x-1}{4} < y < \frac{7-2x}{5}$$

می توانستیم از ابتدا x را بر حسب y حساب کنیم:

$$\begin{cases} 2x + 5y < 7 \\ 3x - 4y < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{7-5y}{2} \\ x < \frac{1+4y}{3} \end{cases}$$

در اینجا، یعنی وقتی که جهت نامساویها یکی است، دو مقدار

$\frac{7-5y}{2}$ و $\frac{1+4y}{3}$ را با هم مقایسه می کنیم :

$$\frac{1+4y}{3} - \frac{7-5y}{2} = \frac{23y-19}{6}$$

و بنابراین داریم:

$$y < \frac{19}{23} \Rightarrow \frac{1+4y}{3} < \frac{7-5y}{2}$$

$$y > \frac{19}{23} \Rightarrow \frac{1+4y}{3} > \frac{7-5y}{2}$$

و بنابراین جوابهای دستگاه را می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{cases} x < \frac{1+4y}{3} \\ y < \frac{19}{23} \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x < \frac{7-5y}{2} \\ y > \frac{19}{23} \end{cases}$$

مثال ۴. این دستگاه را حل کنید:

$$y - 4x > 0 \quad \text{و} \quad y - x^2 < 0$$

حل. اگر y را بر حسب x بدست آوریم، می‌شود

$$\begin{cases} y > 4x \\ y < x^2 \end{cases} \Rightarrow 4x < x^2 \Rightarrow x(2-x)(2+x) < 0$$

جوابهای این نامعادله چنین است:

$$-2 < x < 0 \quad \text{یا} \quad x > 2$$

و بنابراین جوابهای دستگاه را می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} -2 < x < 0 \\ 4x < y < x^2 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x > 2 \\ 4x < y < x^2 \end{cases}$$

۴. نامعادله‌های سخت

مثال ۱. این نامعادله را حل کنید:

$$\sqrt{x^2 - 7x + 6} - x + 2 > 0$$

حل. نامعادله را به صورت $\sqrt{x^2 - 7x + 6} > x - 2$ می‌نویسیم.

دو حالت پیش می‌آید:

(۱) $0 < x - 2 < x$ یعنی $x < 2$ ، در این صورت نامعادله به شرط حقیقی بودن رادیکال برقرار است (زیرا سمت چپ عددی مثبت و سمت راست عددی منفی است و عدد مثبت همیشه از عدد منفی بزرگتر است). بنابراین باید ببینیم به ازای چه مقادیری از x ، مقدار رادیکال حقیقی است.

$$x^2 - 7x + 6 \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \text{ یا } x \geq 6$$

که با توجه به شرط این حالت ($x < 2$) معلوم می‌شود به ازای $x \leq 1$ نامعادله برقرار است.

(۲) $0 < x - 2$ یا $x > 2$. در این حالت چون هر دو طرف نامعادله مثبت‌اند، می‌توان آنرا مجذور کرد که می‌شود:

$$x^2 - 7x + 6 > (x - 2)^2 \Rightarrow -3x + 2 > 0 \Rightarrow x < \frac{2}{3}$$

اما این جواب با شرط $x > 2$ متناقض است.

به این ترتیب تنها $x \leq 1$ جواب نامعادله است.

مثال ۳. این نامعادله را حل کنید:

$$\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+3} < \sqrt{x-4}$$

حل. برای حقیقی بودن رادیکالها باید $x \geq 4$ باشد. نامعادله را به

این صورت می‌نویسیم:

$$\sqrt{2x+1} < \sqrt{x+3} + \sqrt{x-4}$$

چون دوطرف نامساوی غیر منفی است، می‌توان دو طرف را مجذور کرد که بعد از ساده کردن چنین می‌شود:

$$\sqrt{x^2 - x - 12} > 1$$

دوباره دوطرف نامساوی را مجذور می‌کنیم، به نامعادله زیر می‌رسیم.

$$x^2 - x - 13 > 0 \Rightarrow x < \frac{1 - \sqrt{53}}{2} \text{ یا } x > \frac{1 + \sqrt{53}}{2}$$

که با توجه به شرط $x \geq 4$ جواب نامعادله چنین می‌شود:

$$x > \frac{1 + \sqrt{53}}{2}$$

مثال ۳. این نامعادله را حل کنید :

$$\sqrt{\frac{x+a}{2x-a}} < a-2$$

حل. چون سمت چپ نامعادله غیرمنفی است، بنابراین برای وجود جواب باید $a > 2$ باشد. از طرف دیگر برای اینکه مقدار رادیکال حقیقی باشد، باید $x \leq -a$ یا $x > \frac{a}{2}$ باشد.

دو طرف نامعادله غیرمنفی است و می‌توانیم آنرا مجذور کنیم.

$$\frac{x+a}{2x-a} < a^2 - 4a + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(-2a^2 + 8a - 7)x + a(a^2 - 4a + 5)}{2x-a} < 0.$$

$$\frac{(2a^2 - 8a + 7)x - a(a^2 - 4a + 5)}{2x-a} > 0 \quad (1) \quad \text{و یا:}$$

دو حالت در نظر می‌گیریم (با توجه به شرطهای $x \leq -a$ یا $x > \frac{a}{2}$):

حالت اول: $x > \frac{a}{2}$. در این حالت مخرج کسر سمت چپ نامعادله (۱) مثبت است و خواهیم داشت:

$$(2a^2 - 8a + 7)x > a(a^2 - 4a + 5) \quad (1)'$$

ریشه‌های عبارت $2a^2 - 8a + 7$ مساوی $\frac{4 \pm \sqrt{2}}{2}$ است، بنابراین:

$$\text{الف) } \frac{4 - \sqrt{2}}{2} < a < \frac{4 + \sqrt{2}}{2} \quad \text{که با توجه به شرط } a > 2 \text{ به}$$

$$\text{صورت } 2 < a < \frac{4 + \sqrt{2}}{2} \text{ در می‌آید. با این شرط عبارت } 2a^2 - 8a + 7$$

منفی می‌شود و نامعادله (۱)'، با توجه به شرط $x > \frac{a}{2}$ ، به این صورت در می‌آید:

$$\frac{a}{2} < x < \frac{a(a^2 - 4a + 5)}{2a^2 - 8a + 7}$$

در اینجا باید داشته باشیم:

$$\frac{a}{2} < \frac{a(a^2 - 4a + 5)}{2a^2 - 8a + 7} \Rightarrow \frac{-3a}{2(2a^2 - 8a + 7)} < 0$$

که صحیح نیست، زیرا صورت و مخرج هردو منفی و خارج قسمت آنها مثبت است. از ابتدا هم معلوم بود که $\frac{a}{2} > 1$ و $\frac{a(a^2 - 4a + 5)}{2a^2 - 8a + 7} < 0$ است و نامساوی صحیح نیست، بنابراین جوابی را که بدست آورده‌ایم قابل قبول نیست.

ب) $a > \frac{4 + \sqrt{2}}{2}$. با این شرط عبارت $2a^2 - 8a + 7$ مثبت است و از نامعادله (۱) بدست می‌آید:

$$x > \frac{a(a^2 + 4a + 5)}{2a^2 - 8a + 7}$$

ولی ضمناً باید $x > \frac{a}{2}$ باشد، این دو مقدار را با هم مقایسه می‌کنیم:

$$\frac{a}{2} - \frac{a(a^2 - 4a + 5)}{2a^2 - 8a + 7} = \frac{-3a}{2(2a^2 - 8a + 7)} < 0 \Rightarrow \frac{a}{2} < \frac{a(a^2 - 4a + 5)}{2a^2 - 8a + 7}$$

و بنابراین همان $x > \frac{a(a^2 - 4a + 5)}{2a^2 - 8a + 7}$ جواب این حالت است.

$$c) a = \frac{4 + \sqrt{2}}{2}. \text{ برای این حالت هم، با توجه به شرط } x > \frac{a}{2},$$

نامعادله جواب ندارد.

حالت دوم: $x \leq -a$. مخرج سمت چپ نامعادله (۱) منفی می‌شود و نامعادله به این صورت در می‌آید:

$$(2a^2 - 8a + 7)x < a(a^2 - 4a + 5) \quad (۱)''$$

الف) $2 < a < \frac{4 + \sqrt{2}}{2}$. نامعادله (۱)'' چنین می‌شود (بسیار توجه

به شرط $x \leq -a$):

$$-a > x > \frac{a(a^2 - 4a + 5)}{2a^2 - 8a + 7}$$

دو طرف نامعادله مضاعف اخیر را مقایسه می‌کنیم:

$$\frac{a(a^2 - 4a + 5)}{2a^2 - 8a + 7} + a = \frac{3a(a-2)^2}{2a^2 - 8a + 7} < 0$$

و بنابراین جواب اخیر قابل قبول است.

ب) $a > \frac{4 + \sqrt{2}}{2}$. نامعادله "۱) به این صورت درمی‌آید:

$$x < \frac{a(a^2 - 4a + 5)}{2a^2 - 8a + 7}$$

و چون شرط $x \leq -a$ هم وجود دارد، دو مقدار را با هم مقایسه می‌کنیم:

$$\frac{a(a^2 - 4a + 5)}{2a^2 - 8a + 7} + a = \frac{3a(a-2)^2}{2a^2 - 8a + 7} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a(a^2 - 4a + 5)}{2a^2 - 8a + 7} > -a$$

بنابراین جواب این حالت $x \leq -a$ خواهد بود.

ج) $a = \frac{4 + \sqrt{2}}{2}$. به ازای این مقدار a نامعادله "۱) همیشه

برقرار است که با توجه به شرط $x \leq -a$ جواب نامعادله در این حالت $x \leq -\frac{4 + \sqrt{2}}{2}$ می‌شود.

نتیجه بحث را در جدول زیر نشان می‌دهیم:

مقدار پارامتر	جواب نامعادله
$a \leq 2$	نامعادله جواب ندارد
$2 < a < \frac{4 + \sqrt{2}}{2}$	$\frac{a(a^2 - 4a + 5)}{2a^2 - 8a + 7} < x \leq -a$
$a = \frac{4 + \sqrt{2}}{2}$	$x \leq -\frac{4 + \sqrt{2}}{2}$
$a > \frac{4 + \sqrt{2}}{2}$	$x > \frac{a(a^2 - 4a + 5)}{2a^2 - 8a + 7}$ یا $x \leq -a$

۵. بحث کلی در حل نامعادله‌ها

روشن است که هر نامعادله‌ای را می‌توان به صورت $f(x) > 0$ یا $f(x) < 0$ تبدیل کرد و بنابراین حل نامعادله در حالت کلی، منجر به تعیین علامت $f(x)$ می‌شود.

حالا در این زمینه مطالعه می‌کنیم که $f(x)$ در چه مواردی تغییر علامت می‌دهد. به این چند مثال توجه کنید:

مثال ۰۱. عبارت $2x - 5$ را در نظر می‌گیریم، می‌دانیم این عبارت

به ازای مقادیر $x < \frac{5}{2}$ منفی و به ازای مقادیر $x > \frac{5}{2}$ مثبت است و در $x = \frac{5}{2}$ مساوی صفر می‌شود:

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$2x - 5$	$-$	0	$+$

بنابراین: اگر $f(x)$ از صفر عبور کند ممکن است تغییر علامت بدهد.

گفتیم «ممکن است تغییر علامت بدهد»، زیرا اگر مثلاً عبارت

$(2x - 5)^2$ را در نظر بگیریم در نقطه $x = \frac{5}{2}$ مساوی صفر می‌شود، در حالی که تغییر علامت نمی‌دهد.

در حالتی که a ریشه ساده یا ریشه تکراری از مرتبه فرد $f(x)$ باشد:

$f(x)$ با عبور از نقطه $x = a$ تغییر علامت می‌دهد؛ ولی اگر a ریشه مضاعف

یا بطور کلی ریشه تکراری از مرتبه زوج $f(x)$ باشد، $f(x)$ با عبور از نقطه

$x = a$ تغییر علامت نمی‌دهد.

مثال ۰۲. به کسر $\frac{1}{2x - 5}$ توجه کنیم، این کسر در نقطه $x = \frac{5}{2}$ منفصل

است و ضمناً در همین نقطه تغییر علامت می‌دهد.

x	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$2x-5$	$-$	∞	$+$

بنابراین: اگر $f(x)$ از بی‌نهایت عبور کند، ممکن است تغییر علامت

بدهد.

در اینجا هم اگر a ریشه ساده و یاریشه تکراری از مرتبه فرد مخرج کسر باشد، کسر در نقطه $x=a$ تغییر علامت می‌دهد، ولی اگر a ریشه تکراری از مرتبه زوج مخرج کسر باشد، کسر در نقطه $x=a$ تغییر علامت نمی‌دهد.

مثال ۳. عبارت $f(x) = 2x - 1 - 2\sqrt{x^2 - x - 6}$ را تعیین علامت

کنید.

حل. $f(x)$ از نقطه بی‌نهایت عبور نمی‌کند؛ $f(x)$ همچنین از صفر هم

عبور نمی‌کند:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 2\sqrt{x^2 - x - 6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 4x^2 - 4x - 24$$

و تساوی اخیر غیرممکن است، یعنی $f(x) \neq 0$.

$f(x)$ به ازای مقادیر $3 < x < -2$ موهومی است. به جدول زیر

توجه کنید:

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$2x - 1 - 2\sqrt{x^2 - x - 6}$	$-$	0	0	$+$

بنابراین: اگر $f(x)$ از یک منطقه موهومی عبور کند ممکن است تغییر

علامت بدهد.

مثال ۴. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^4 + x^2}}$ را در نظر می‌گیریم. روشن است که

$f(x)$ به ازای مقادیر منفی x منفی و به ازای مقادیر مثبت x مثبت است

(زیرا مخرج کسر همیشه مثبت است):

۱- در این بند نقطه‌های انفصالی را که به ازای ریشه‌های مخرج بدست

آید، نقطه‌های بی‌نهایت می‌نامیم.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{x}{\sqrt{x^4+x^2}}$	$-$	$+$	

ولی نقطه $x=0$ چه نقطه‌ای از $f(x)$ است، $f(x)$ را می‌توان چنین نوشت:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2}} = \frac{x}{|x|\sqrt{x^2+1}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} & (x > 0) \\ \frac{-1}{\sqrt{x^2+1}} & (x < 0) \end{cases}$$

اگر صفر را جزو مقادیر مثبت به حساب آوریم $f_+(0) = 1$ و اگر جزو مقادیر منفی به حساب آوریم $f_-(0) = -1$ می‌شود. در حقیقت اگر x از طرف مقادیر مثبت به سمت صفر میل کند $f(x)$ به سمت $+1$ میل می‌کند و اگر x از جهت مقادیر منفی به سمت صفر میل کند، $f(x)$ به سمت -1 میل می‌کند. $f(x)$ در نقطه $x=0$ نامعین است.

بنابراین: اگر $f(x)$ از يك مرز نامعین عبور کند ممکن است تغییر

علامت بدهد^۱.

ثابت می‌کنند که اگر $f(x)$ بخواهد تغییر علامت بدهد باید از صفر یا بی‌نهایت، يك منطقهٔ موهومی، و یا يك مرز نامعین عبور کرده باشد.

البته عکس این مطلب همیشه درست نیست، یعنی ممکن است $f(x)$ از یکی از این نقطه‌ها عبور کند، بدون اینکه تغییر علامت بدهد. به این ترتیب برای تعیین علامت يك عبارت باید ابتدا نقطه‌هایی را که در آنجا ممکن است این عبارت تغییر علامت بدهد پیدا کنیم و سپس با جستجو علامت آنرا در هر فاصله مشخص نماییم.

۱- سه حالت اخیر را، یعنی وقتی را که تابع از نقطهٔ بی‌نهایت عبور کند، یا از يك منطقهٔ موهومی یا از يك مرز نامعین، می‌توان حالتی دانست که تابع از نقطهٔ انفصال خود عبور می‌کند. ما در اینجا برای روشن‌تر بودن مطلب آنها را در سه حالت مختلف از هم جدا کردیم.

مثال ۵. این نامعادله را حل کنید:

$$f(x) = \frac{x(x-1)(x+3+\sqrt{x^2+6x+8})}{(x+7)\sqrt{x^2-x^3-x+1}} < 0$$

حل. $f(x)$ را به این صورت می‌نویسیم:

$$f(x) = \frac{x(x-1)[x+3+\sqrt{(x+2)(x+4)}]}{(x+7) |x-1| \sqrt{x^2+x+1}}$$

$f(x)$ در $x=0$ از نقطه صفر، در $x=-7$ از نقطه بی‌نهایت، در فاصله $-2 < x < -4$ از یک منطقه موهومی و در $x=1$ از یک مرزنامعین عبور می‌کند. بنابراین داریم:

x	$-\infty$	-7	-4	-2	0	1	$+\infty$
$f(x)$	+	∞	-	+	0	-	+

علامتها را با جستجو پیدا کرده‌ایم. مثلاً به ازای $x=-8$ حاصل $f(x)$ عددی مثبت می‌شود، به ازای $x=-4$ حاصل $f(x)$ عددی منفی می‌شود و غیره.

به این ترتیب جوابهای نامعادله چنین است:

$$-7 < x < -4 \quad \text{و} \quad 0 < x < 1$$

۶. دو نکته

الف) آیا می‌توان دوطرف نامساوی را معکوس کرد؟

اگر بدانیم دوطرف نامساوی مثبت یا هر دو طرف نامساوی منفی است،

با معکوس کردن دو طرف آن جهت نامساوی عوض می‌شود:

$$5 < 7 \Rightarrow \frac{1}{5} > \frac{1}{7} ; \quad -6 < -2 \Rightarrow -\frac{1}{6} > -\frac{1}{2}$$

ولی اگر یکطرف نامساوی منفی و طرف دیگر مثبت باشد، بامعکوس

کردن دو طرف نامساوی جهت تغییر نمی‌کند:

$$-5 < 2 \Rightarrow -\frac{1}{5} < \frac{1}{2}$$

بنابراین: درحالتی که از علامت دوطرف نامساوی اطلاعی نداریم بهتر است از معکوس کردن دو طرف آن صرفنظر کنیم.

ب) آیا می‌توان دو طرف نامساوی را به توان زوج رساند؟
اگر هر دو طرف نامساوی مثبت باشد، توان زوج آنها هم در يك نامساوی با همان جهت صدق می‌کند. اگر هر دو طرف نامساوی منفی باشد، توان زوج آنها در يك نامساوی با جهت مخالف صدق می‌کند:

$$5 < 7 \Rightarrow 25 < 49 ; -7 < -5 \Rightarrow 49 > 25$$

ولی اگر دو طرف نامساوی هم علامت نباشند، توان زوج آنها گاهی جهت نامساوی را تغییر می‌دهد و گاهی تغییر نمی‌دهد.

$$-5 < 2 \Rightarrow 25 > 4 ; -5 < 7 \Rightarrow 25 < 49$$

بنابراین: اگر از هم علامت بودن دو طرف نامساوی اطلاعی نداشته باشیم، بهتر است از توان زوج آنها استفاده نکنیم.

II. نامساویها

به نامساویها، نامعادله‌های اتحادی هم می‌گویند و منظور نامساویهایی است که به‌ازای هر مقدار دلخواه از حروفها، در فاصله‌هایی که تعیین شده است، برقرار باشند.

مثلاً: نامساوی $a^2 + b^2 > 2ab$ با شرط $a \neq b$ يك نامعادلهٔ اتحادی است و یا نامساوی $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ به‌ازای مقادیر غیر منفی a و b و c همیشه برقرار است.

صحت اثبات نامساویها (یا نامعادله‌های اتحادی) روش کلی ندارد و بسته به نوع مسأله فرق می‌کند، و ما در اینجا تنها به ذکر نامساویهای مربوط به واسطه‌ها (که در جبر مقدماتی اهمیت زیادی دارند) می‌پردازیم:

۷. نامساویهای مربوط به واسطه‌ها^۱

$a_1, a_2, \dots, a_n$ را عدد حقیقی مفروض در نظر می‌گیریم، هر عددی مانند M که بزرگتر از حداکثر و کوچکتر از حداقل عددهای مفروض a_i نباشد، واسطه نامیده می‌شود:

$$\min a \leq M \leq \max a$$

که در آن $\min a$ و $\max a$ به ترتیب حداقل و حداکثر از عددهای a_i می‌باشد.

نظریه واسطه‌ها، علاوه بر نقشی که در ریاضیات محاسبه‌ای دارند، مورد استفاده فراوانی در نظریه احتمالات و آمار ریاضی، برای ارزیابی ریاضی نتیجه‌های مشاهده دارد.

تعریف ۱) واسطه حسابی n عدد $a_1, a_2, \dots, a_n$ عبارت است از

$$\frac{1}{n} \text{ مجموع آنها:}$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{1}{n} \sum a_i$$

۲) واسطه هندسی عددهای مثبت $a_1, a_2, \dots, a_n$ عبارت است از

ریشه n ام حاصلضرب آنها:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = \sqrt[n]{\prod a_i}$$

۳) واسطه توافقی عددهای مثبت $a_1, a_2, \dots, a_n$ عبارت است از عکس

واسطه حسابی عکس این عددها:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} = \frac{n}{\sum \frac{1}{a_i}}$$

۴) واسطه مربعی n عدد $a_1, a_2, \dots, a_n$ عبارت است از جذر واسطه

۱- قضیه‌های مربوط به اثبات نامساویهای واسطه‌ها بطور عمده و با جزئی تفاوت از کتاب «دوره اختصاصی جبر مقدماتی» به ترجمه نویسنده همین کتاب برداشته شده است.

حسابی مربع این عددها:

$$\sqrt[n]{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} = \sqrt[n]{\sum_{i=1}^n a_i^2}$$

قضیه مربوط به واسطه‌های حسابی و هندسی. واسطه حسابی عددهای مثبت، کوچکتر از واسطه هندسی آنها نیست^۱. یعنی به شرطی که عددهای $a_1, a_2, \dots, a_n$ مثبت باشند داریم:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} > \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

تساوی برای حالت $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ است.

اثبات (بر اساس روش استقراء ریاضی). صحت نامساوی برای حالت

$n=2$ واضح است.

برای اثبات نامساوی در حالت کلی به چند نامساوی کمکی نیاز داریم.

اگر x_1 و x_2 عددهایی غیر منفی باشند، در صورتی که $x_1 < x_2$ باشد $x_1^k < x_2^k$ (عدد k است طبیعی) خواهد بود. بنابراین برای عددهای غیر منفی x_1 و x_2 داریم:

(تساوی برای حالت $x_1 = x_2$) $(x_1^{n-1} - x_2^{n-1})(x_1 - x_2) \geq 0$ که بعد از جزیی تغییر به این صورت در می آید:

$$x_1^n + x_2^n \geq x_1 x_2^{n-1} + x_2 x_1^{n-1}$$

n عدد غیر منفی $x_1, x_2, \dots, x_n$ را در نظر می گیریم و نامساویهای

مربوطه را برای دوبه دوی آنها می نویسیم و با هم جمع می کنیم، بدست می آید:

$$\begin{aligned} & (x_1^n + x_2^n) + (x_1^n + x_3^n) + \dots + (x_1^n + x_n^n) + \\ & + (x_2^n + x_3^n) + \dots + (x_2^n + x_n^n) + \\ & + \dots \dots \dots + \\ & + (x_{n-1}^n + x_n^n) > \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & > (x_1 x_2^{n-1} + x_2 x_1^{n-1}) + (x_1 x_3^{n-1} + x_3 x_1^{n-1}) + \\ & + \dots + (x_1 x_n^{n-1} + x_n x_1^{n-1}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + (x_2 x_3^{n-1} + x_3 x_2^{n-1}) + \dots + (x_2 x_n^{n-1} + x_n x_2^{n-1}) + \\ & + \dots \dots \dots + \end{aligned}$$

۱- اثبات دیگری از این قضیه در فصل استقراء ریاضی آمده است.

$$+(x_{n-1}x_n^{n-1}+x_nx_{n-1}^{n-1})$$

حالت تساوی برای $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ (است) . با ساده کردن این نامساوی بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} (n-1)(x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n) &\geq x_1(x_2^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1}) + \\ &+ x_2(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1}) + \\ &+ \dots + x_n(x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1}) \end{aligned} \quad (1)$$

فرض می‌کنیم که برای $n-1$ عدد مثبت، واسطه حسابی کوچکتر از واسطه هندسی نباشد، بنابراین خواهیم داشت:

$$x_2^{n-1} + x_3^{n-1} + \dots + x_n^{n-1} > (n-1)x_2x_3 \dots x_n$$

$$x_1^{n-1} + x_3^{n-1} + \dots + x_n^{n-1} > (n-1)x_1x_3 \dots x_n$$

$$x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1} > (n-1)x_1x_2 \dots x_{n-1}$$

با استفاده از این نامساویها، می‌توان نامساوی (۱) را به صورت زیر

نوشت:

$$(n-1)(x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n) \geq n(n-1)x_1x_2 \dots x_n$$

و اگر در نامساوی اخیر $x_1^n = a_1, x_2^n = a_2, \dots, x_n^n = a_n$ بگیریم، بدست می‌آید:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} > \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

که تساوی مربوط به حالت $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ است.

بنابراین اگر برای $n-1$ عدد مثبت، واسطه حسابی از واسطه هندسی کوچکتر نباشد، برای n عدد مثبت هم همان نامساوی برقرار است. از طرف دیگر درستی نامساوی را برای حالت $n=2$ ثابت کردیم و در نتیجه برای هر عدد $n > 2$ درست است.

قضیه مربوط به واسطه‌های توافقی و هندسی. واسطه توافقی چند عدد مثبت از واسطه هندسی آنها بزرگتر نیست:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \quad (۱)$$

اثبات. بنابر قضیه واسطه های حسابی و هندسی، نامساوی زیر واضح

است:

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n} > \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \dots \frac{1}{a_n}}$$

که اگر دو طرف این نامساوی را معکوس کنیم به همان نامساوی (۱)

می‌رسیم (حالت تساوی مربوط به $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ است).

قضیه مربوط به واسطه های مربعی و حسابی. واسطه مربعی چند عدد

کوچکتر از قدر مطلق واسطه حسابی آنها نیست:

$$\frac{|a_1 + a_2 + \dots + a_n|}{n} \leq \sqrt[n]{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

(تساوی برای حالت $a_1 = a_2 = \dots = a_n$)

اثبات. اتحاد زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + \\ + 2a_1 a_2 + 2a_1 a_3 + \dots + 2a_{n-1} a_n$$

با استفاده از نامساوی $2a_1 a_2 \leq a_1^2 + a_2^2$ هر یک از جمله های مربوط

به دو برابر حاصلضربها را به مجموع مربعاتی عاملهای آن تبدیل می‌کنیم،

بدست می‌آید:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$$

اگر دو طرف این نامساوی را بر n^2 تقسیم کنیم و سپس از دو طرف ریشه

دوم بگیریم، نامساوی مطلوب بدست می‌آید.

واسطه حسابی بین حداقل و حداکثر مقادیر عددها قرار دارد، زیرا

اگر در مجموع $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ هر یک از جمله ها را به کوچکترین

آنها و سپس به بزرگترین آنها تبدیل کنیم، بدست می‌آید:

$$n \cdot \min a \leq a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq n \cdot \max a$$

$$\text{Min} a \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \text{Max} a \quad \text{واز آنجا:}$$

شبه همین استدلال را در مورد واسطه هندسی و واسطه توافقی هم می‌توان کرد و نتیجه گرفت:

$$\text{Min} a \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \text{Max} a,$$

$$\text{Min} a \leq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \text{Max} a$$

واسطه مربعی بین حداقل و حداکثر قدره‌ط‌های عددهای مفروض قرار دارد:

$$\text{Min} |a| \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \leq \text{Max} |a|$$

برای عددهای مثبت، واسطه توافقی، واسطه هندسی، واسطه حسابی و واسطه مربعی در نامساویهای زیر صدق می‌کنند:

$$\text{Min} a \leq \frac{n}{\sum \frac{1}{a_i}} \leq \sqrt[n]{\prod a_i} \leq \frac{1}{n} \sum a_i \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum a_i^2} \leq \text{Max} a$$

* * *

مثال ۱. بسیاری از نامساویهای مربوط به واسطه‌ها را در حالت‌های خاص می‌توانیم با روش‌های ساده‌ای ثابت کنیم، بدون آنکه به رابطه کلی آنها متوسل شویم، به عنوان مثال نامساوی مربوط به واسطه‌های حسابی و هندسی را در حالت‌های $n=3$ ، $n=4$ و $n=5$ ثابت می‌کنیم.

۱) $n=3$ ، باید ثابت کنیم که برای عددهای مثبت a_1 ، a_2 و a_3 :

داریم:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$$

برای سهولت کار فرض می‌کنیم: $\sqrt[3]{a_1} = x$ ، $\sqrt[3]{a_2} = y$ و $\sqrt[3]{a_3} = z$

نامساوی به این صورت در می‌آید:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0$$

عبارت سمت چپ نامساوی قابل تجزیه است:

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x+y+z)(x^2 + y^2 + \\ &+ z^2 - xy - xz - yz) = \frac{1}{4}(x+y+z)[(x-y)^2 + \\ &+ (y-z)^2 + (z-x)^2] \end{aligned}$$

و غیرمنفی بودن عبارت اخیر واضح است. تنها در حالت $x=y=z$ حاصل این عبارت مساوی صفر می شود.

(۲) $n=4$ ، باید ثابت کنیم که برای عددهای مثبت a_1, a_2, a_3, a_4 داریم:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \geq \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}$$

به ترتیب داریم :

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} &= \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2}}{2} > \\ &> \sqrt{\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_3 + a_4}{2}} > \\ &\geq \sqrt{\sqrt{a_1 a_2} \cdot \sqrt{a_3 a_4}} = \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4} \end{aligned}$$

تبصره. باهمین روشی که نامساوی مربوط به واسطه‌های حسابی و هندسی را برای حالت $n=4$ اثبات کردیم (با استفاده از حالت $n=2$)، می توانیم برای حالت $n=6$ (با استفاده از حالت‌های $n=2$ و $n=3$) ثابت کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6}{6} &= \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2} + \frac{a_5 + a_6}{2}}{3} > \\ &> \sqrt{\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_3 + a_4}{2} \cdot \frac{a_5 + a_6}{2}} > \\ &> \sqrt{\sqrt{a_1 a_2} \cdot \sqrt{a_3 a_4} \cdot \sqrt{a_5 a_6}} = \\ &= \sqrt[6]{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6} \end{aligned}$$

(۲) $n=5$ ، باید ثابت کنیم (برای عددهای مثبت):

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{5} \geq \sqrt[5]{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$$

با $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{5} = S$ و $\sqrt[5]{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5} = P$ می‌گیریم. با

توجه به تبصره حالت قبل برای ۶ عدد مثبت a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 و S می‌توان نوشت:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + S}{6} \geq \sqrt[6]{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 S}$$

این نامساوی به‌سادگی به این‌صورت در می‌آید:

$$S \geq \sqrt[6]{P^5 \cdot S} \Rightarrow S^6 \geq P^5 \cdot S \Rightarrow S^5 \geq P^5$$

$$S \geq P$$

و در نتیجه

مثال ۲. صحت نامساوی زیر را برای عددهای مثبت $a_1, a_2, \dots, a_n$

a_n ثابت کنید:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$$

حل. نامساوی‌های زیر واضح است (نامساوی‌های مربوط به واسطه‌های

حسابی و هندسی):

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \\ \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq n \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \dots \frac{1}{a_n}} \end{cases}$$

از ضرب این نامساوی‌ها در یکدیگر به‌همان نامساوی مورد نظر می‌رسیم.

این نامساوی را به این ترتیب هم می‌شد ثابت کرد، داریم:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

اگر واسطه هندسی عددها را کنار بگذاریم و در نامساوی که بدست می‌آید

دو طرف را در $n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$ ضرب کنیم به نامساوی مطلوب

می‌رسیم.

مثال ۳. ثابت کنید در هر مثلث با زاویه‌های حاده بین زاویه‌های A و B و C آن نامساوی زیر برقرار است:

$$\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C > 9$$

حل. اگر دوطرف این نامساوی را در

$$\cotg A \cdot \cotg B + \cotg A \cdot \cotg C + \cotg B \cdot \cotg C$$

ضرب کنیم درستی آن روشن می‌شود، به‌خاطر بیاورید که در هر مثلث بازایه‌های A و B و C داریم:

$$\cotg A \cdot \cotg B + \cotg A \cdot \cotg C + \cotg B \cdot \cotg C = 1$$

مثال ۴. ثابت کنید برای عددهای مثبت a و b و c داریم:

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} \geq 8$$

حل. به ترتیب می‌نویسیم:

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}, \quad b+c \geq 2\sqrt{bc}, \quad c+a \geq 2\sqrt{ca}$$

از ضرب این سه نامساوی در یکدیگر به نامساوی حکم می‌رسیم.

تمرینها

صحت نامساویهای زیر را تحقیق کنید:

$$\sqrt[n]{43} < \sqrt[n]{3} + \sqrt[n]{9} < \sqrt[n]{44} \quad .553$$

$$1 < \sqrt[n]{n + \sqrt[n]{n + \sqrt[n]{n + \dots}}} < 2 \quad : n > 1 \text{ با شرط} \quad .554$$

$$a_n = \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{4 + \dots + \sqrt{n}}}} \quad .555 \text{ اگر داشته باشیم:}$$

$$1/9 < \lim_{n \rightarrow \infty} a_n < 2 \quad \text{ثابت کنید}$$

۵۵۶. اگر a و b و c مقادیری غیر منفی باشند، ثابت کنید:

$$a^r + b^r + c^r > a^r \sqrt{bc} + b^r \sqrt{ac} + c^r \sqrt{ab}$$

$$(\sec^n \alpha - 1)(\operatorname{cosec}^n \alpha - 1) > (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 \quad ۵۵۷$$

$$\frac{1}{\log_3 3} + \frac{1}{\log_5 3} > 2 \quad ۵۵۸$$

۵۵۹. a و b و c ضلعها، S مساحت و R و r به ترتیب شعاع دایره‌های محیطی و محاطی يك مثلث‌اند، ثابت کنید:

$$a^r + b^r + c^r > 8S(R - r)$$

۵۶۰. با شرط مثبت بودن a و b و c ثابت کنید:

$$(a+b-c)(a+c-a)(c+a-b) \leq abc$$

۵۶۱. اگر $x+y=a$ باشد، ثابت کنید: $x^n + y^n > \frac{a^n}{2^n - 1}$ ($a > 0$)

و n عددی صحیح است).

۵۶۲. اگر a و b و c طول ضلعهای يك مثلث و x و y و z طول ضلعهای مثلث ارتفاعیه باشند، ثابت کنید:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \geq \frac{3}{4}$$

$$\frac{t^2 + t}{t-1} > 2(2 + \sqrt{3}) \quad ۵۶۳$$

با شرط $t > 1$ ثابت کنید:

۵۶۴. ثابت کنید برای $n > 1$ و $0 < a_i < 1$ داریم:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n) - a_1 a_2 \dots a_n < n + 1$$

۵۶۵. ثابت کنید برای مقادیر حقیقی a و b و c و d داریم:

$$\sqrt{(a-b)^2 + (c-d)^2} \leq \sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + d^2}$$

۵۶۶. به ازای همه مقادیر طبیعی n ثابت کنید:

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \dots + \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n} < 2$$

۵۶۷. ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2$$

۵۶۸. ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2$$

۵۶۹. ثابت کنید قدر مطلق مجموع چند عدد از مجموع قدرمطلقهای آنها بزرگتر نیست، یعنی:

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| < |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

این نامعادله‌ها را حل کنید:

$$\sqrt{3-x} > x-2 \quad ۵۷۰$$

$$2x+1 > \sqrt{4x^2+4x-3} \quad ۵۷۱$$

$$4(x-1) < \sqrt{(x+5)(3x+4)} \quad ۵۷۲$$

$$2x-a < 2ax-x^2-2 \quad ۵۷۳$$

$$\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} > a \quad ۵۷۴ \quad \text{با شرط } a > 0$$

۵۷۵. تابع زیر به ازای چه مقادیری از x حقیقی است.

$$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x^2-5x+6}} + \sqrt{x^2-x^2}$$

$$|x^2-5x-4| < 10 \quad ۵۷۷ \quad \frac{2ax+3}{5x-4a} < 4 \quad ۵۷۶$$

$$|x| + |y| < 1 \quad ۵۷۸$$

$$(x^2+y^2)^2 < a^2(x^2-y^2) \quad (a > 0) \text{ (با شرط)} \quad ۵۷۹$$

$$\frac{x^2+y^2-1}{y^2-x^2} > 0 \quad ۵۸۰$$

$$\frac{(a-x)y^2-x^2}{a-x} > 0 \quad (a > 0) \quad ۵۸۱$$

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{2x-5} > \sqrt{x+1} \quad ۵۸۲$$

$$\sqrt{\frac{2x+a}{x-a}} < a-1 \quad ۵۸۳$$

۵۸۴. ثابت کنید که اگر داشته باشیم: $a < \sqrt{N} < a+1$ ، خواهیم داشت:

$$\frac{a(a^2+3N)}{3a^2+N} < \sqrt{N} < \frac{(a+1)[(a+1)^2+3N]}{3(a+1)^2+N}$$

۵۸۵. ثابت کنید که در هر مثلث داریم:

$$\sqrt{h_a} + \sqrt{h_b} + \sqrt{h_c} \leq \frac{3}{\sqrt{3}} \sqrt{6R}$$

۵۸۶. اگر S مساحت یک چهارضلعی و m_1 و m_2 و m_3 و m_4 قطعه‌هایی باشند که وسطهای ضلعها روبرو و وسطهای دو قطر را بهم وصل می‌کند، داریم:

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 \geq 2S$$

۵۸۷. مطلوب است مقدار k ، برای اینکه به ازای همه مقادیر x نامساوی زیر برقرار باشد:

$$(2k-1)x^2 + (7k+2)x - 2k > (k+2)x^2 + 5(k+1)x - 4(k+1)$$

۵۸۸. صحت نامساوی زیر را تحقیق کنید (نامساوی بونیاکوسکی):

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$

۵۸۹. ثابت کنید که اگر $a > b > 0$ و $m > n$ باشد داریم:

$$\frac{a^m - b^m}{a^m + b^m} > \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$$

صحت نامساویهای زیر را تحقیق کنید:

$$\left(\frac{x^2}{y}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{y^2}{x}\right)^{\frac{1}{2}} > \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad ۵۹۱ \quad \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} > 2 \quad ۵۹۰$$

$$(c > 0, b > 0, a > 0) a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a+b+c) \quad ۵۹۲$$

۵۹۳. اگر $a_1, a_2, \dots, a_n$ عددهایی غیر منفی باشند، ثابت کنید:

$$\sqrt{a_1a_2} + \sqrt{a_1a_3} + \dots + \sqrt{a_{n-1}a_n} \leq \frac{n-1}{2}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

۵۹۴. اگر $a_1, a_2, \dots, a_n$ عددهایی مثبت و $a_1a_2 \dots a_n = 1$ باشد، ثابت کنید:

$$(1+a_1)(1+a_2) \dots (1+a_n) \geq 2^n$$

صحت نامساویهای زیر را تحقیق کنید: ($n > 1$):

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad ۵۹۶ \quad 2^n > 1 + n\sqrt{2^{n-1}} \quad ۵۹۵$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} < 3 \quad .597$$

$$\sqrt[n]{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n} \geq \sqrt[n]{n} \quad .598$$

.599 ثابت کنید که در هر مثلث نامساوی زیر برقرار است:

$$\frac{1}{(p-a)^2} + \frac{1}{(p-b)^2} + \frac{1}{(p-c)^2} \geq \frac{4}{R^2}$$

(a, b, c ضلعها، p نصف محیط و R شعاع دایره محیطی مثلث است).

این دستگاهها را حل کنید

$$\begin{cases} 3x + 2y > 7 \\ 4y + 2x > 3 \end{cases} \quad .600$$

$$\begin{cases} 3x - 1 > x + 3y \\ x(1 - 3x) > 4x - 3x^2 - 2y \end{cases} \quad .601$$

$$\begin{cases} y > x^2 \\ x > y^2 \end{cases} \quad .603 \quad \begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ x^2 + y^2 > 4 \\ xy < 1 \end{cases} \quad .602$$

$$\begin{cases} 2x - y + 1 < 0 \\ 9x - 3y - 2 < 0 \end{cases} \quad .605 \quad \begin{cases} y - x + 1 > 0 \\ 2x - y - 3 > 0 \end{cases} \quad .604$$

$$\begin{cases} 4x - y - z + 1 > 0 \\ x - y + z + 2 > 0 \end{cases} \quad .607 \quad \begin{cases} x - 2y + 1 < 0 \\ 2x - y - 1 < 0 \\ x - y + 1 > 0 \end{cases} \quad .606$$

$$\begin{cases} 4x - y - z + 1 < 0 \\ x - y + z + 2 > 0 \end{cases} \quad .608$$

$$\begin{cases} y^2 - 2ax < 0 \\ x^2 + y^2 - 2ax > 0 \end{cases} \quad (a > 0) \quad .609$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z - y + 1 > 0 \end{cases} \quad ۶۱۱ \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \quad ۶۱۰$$

۶۱۲. جوابهای نامعادله $\sqrt{25 - x^2} + \sqrt{x^2 + 7x} > 3$ را پیدا کنید.

۶۱۳. به ازای چه مقادیری از k ، نامساوی زیر برای همه مقادیر x برقرار است:

$$\left| \frac{x^2 - kx - 1}{x^2 + x + 1} \right| < 3$$

۶۱۴. مقادیری از a را بدست آورید که به ازای آنها نامعادله‌های زیر جواب مشترك نداشته باشند:

$$\begin{cases} ax^2 + (a-3)x + \frac{2}{a} - 2a \geq 0 \\ ax \geq a^2 - 2 \end{cases}$$

۶۱۵. کدام بزرگترند: 21^{23} یا 23^{21} ؛ 555^{553} یا 553^{555} ؟

۶۱۶. $a_1, a_2, \dots$ را دنباله‌ای از عددهای غیرمنفی فرض می‌کنیم، G_n واسطه هندسی n جمله اول این دنباله است. ثابت کنید:

$$nG_n - (n-1)G_{n-1} \leq a_n$$

۶۱۷. ثابت کنید:

$$\frac{a_1 b_1}{a_1 + b_1} + \dots + \frac{a_n b_n}{a_n + b_n} \leq \frac{(a_1 + \dots + a_n)(b_1 + \dots + b_n)}{(a_1 + \dots + a_n) + (b_1 + \dots + b_n)}$$

که در آن $a_1, \dots, a_n$ و $b_1, \dots, b_n$ عددهایی مثبت‌اند.

۶۱۸. اگر a و b عددهایی طبیعی باشند، ثابت کنید:

$$\frac{a+b}{2\sqrt{a^2 b^2 a \leq a^2 + b^2}}$$

۶۱۹. ثابت کنید اگر $a < \sqrt[n]{N} < a+1$ باشد، تقریب زیر هم‌درست است:

$$\frac{nNa}{a^n + (n-1)N} < \sqrt[n]{N} < \frac{(n-1)a^n + N}{nan^{n-1}}$$

۶۲۰. اگر n عددی طبیعی باشد، ثابت کنید:

$$\left(2 - \frac{1}{n}\right)^n \geq n$$

۶۲۱. اگر $0 < x_i \leq 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ثابت کنید:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+x_i} \leq \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}$$

۶۲۲. ثابت کنید که اگر $a > c$ و $b > d$ باشد، داریم:

$$(a+b+c+d)^2 > 8(ad+bc)$$

۶۲۳. بدون حل دستگاه معادله‌های

$$ax^2 + by^2 = x - y; \quad ax + by = m$$

ثابت کنید که وقتی دارای ریشه‌های حقیقی است که داشته باشیم:

$$\frac{\sqrt{ab}}{|a+b|} < \frac{1}{2m}$$

۶۲۴. اولاً ثابت کنید برای هر عدد طبیعی $n \geq 3$ داریم: $2^n > 2n + 1$

ثانیاً به‌ازای $n \geq 5$ داریم: $2^n > n^2$. ثالثاً به‌ازای $n \geq 10$ داریم:

$$2^n > n^3$$

ثابت کنید برای همهٔ مقادیر طبیعی $n \geq 2$ داریم:

$$(x > -1), \quad (1+x)^n > 1+nx \quad ۶۲۵$$

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} \quad ۶۲۶$$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24} \quad ۶۲۷$$

۶۲۸. ثابت کنید برای مقادیر مثبت a و b داریم:

$$2^{n-1}(a^n + b^n) \geq (a+b)^n$$

۶۲۹. برای مقادیر طبیعی $n \geq 3$ ثابت کنید:

$$2^{\frac{1}{2}n(n-1)} > n!$$

۶۳۰. اگر n عددی طبیعی باشد ثابت کنید:

$$\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} < n$$

۶۳۱. ثابت کنید:

$$\sqrt[n]{c} + \sqrt[n]{c} + \sqrt[n]{c} + \dots + \sqrt[n]{c} < \frac{1 + \sqrt[n]{4c+1}}{2}$$

۶۳۲. ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

۶۳۳. ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

۶۳۴. فاصله تغییرات x را در این تابع معلوم کنید:

$$y = x + \sqrt{y^2 + 2(x+1)y + 4x}$$

۶۳۵. ثابت کنید نامساوی $\frac{x^2(1-x)}{x^2-x+1} < 3$ همیشه برقرار است.

۶۳۶. ثابت کنید به ازای همه مقادیر x و $\lambda \neq 0$ نامعادله زیر همیشه برقرار است:

$$\frac{(\lambda+1)x^2 + \lambda x + \lambda}{x^2 + x + 1} > \lambda$$

۶۳۷. اگر a, b, c, d عددهای حقیقی باشند، ثابت کنید:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b+c+d+e)$$

۶۳۸. اگر $0 < \alpha < 90^\circ$ باشد، ثابت کنید:

$$7^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \leq 12500$$

۶۳۹. ثابت کنید که اگر:

$$\sum_{i=1}^n a_i = 1 \text{ و } \sum_{i=1}^n b_i = 1, \quad a_i \geq 0, \quad b_i \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

داریم:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{b_i} > 1$$

۶۴۰. به ازای چه مقادیری از عددهای طبیعی a و b ، عدد

$$4ab + 22a + 47b$$
 بر $a^2 + 7b^2 + 11$ قابل قسمت است؟

۱۳

تمرینهایی از تصاعدها

و نگاریم

احتیاجی نبود در باره آنچه که حرف تازه‌ای نداشتیم بخش
 جداگانه‌ای باز کنیم و همان حرفهای کتابهای عادی دبیرستانی
 را تکرار کنیم. در این زمینه تنها به ذکر نمونه مسأله‌ها پرداخته‌ایم
 و حتی در این مورد هم با امساك قدم برداشته‌ایم تا اولاً خواننده
 را در انبوه مسأله‌ها گم نکنیم، ثانیاً مسأله‌هایی را که در کتابهای
 مشابه وجود دارد، تکرار نکرده باشیم.

اگر احتمالاً در مورد این بخش نکته تازه‌ای وجود داشته
 باشد، ضمن حل مسأله‌ها از آنها گفتگو کرده‌ایم.

ولی به هر حال حل تمرینهای این بخش را به علاقمندان
 توصیه می‌کنیم.

۱. تصاعدها

۶۴۱. آیا مثلثی وجود دارد که هم زاویه‌ها و هم ضلع‌های آن به تصاعد حسابی باشند؟

۶۴۲. اولاً يك تصاعد حسابی ، ثانياً يك تصاعد هندسی پیدا کنید که عددهای ۱۱ و ۴۴ و ۷۵۴ جمله‌هایی از آنها باشند.

۶۴۳. تصاعد حسابی پیدا کنید که مجموع n جمله اول آن مساوی $2n^2 + 3n$ باشد.

۶۴۴. در خانه‌های خالی عددهایی قرار دهید که هر سطر و هر ستون به تصاعد هندسی باشند.

		۱۲	
۱۴۴			
			۸۱
	۲۸۸		

۶۴۵. ثابت کنید که اگر $a_1, a_2, \dots, a_n$ مخالف صفر باشند و يك تصاعد حسابی تشکیل دهند، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}$$

۶۴۶. اگر $a_1, a_2, \dots, a_n$ به تصاعد حسابی باشند، حاصل مجموع زیر را بدست آورید:

$$S = \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \frac{1}{\sqrt{a_3} + \sqrt{a_4}} + \dots +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n-1}}}$$

۶۴۷. اگر S_1, S_2, S_3 بترتیب مجموع n_1 جمله اول و n_2 جمله اول و n_3 جمله اول و

جمله اول از يك تصاعد حسابی باشند ثابت کنید :

$$\frac{S_1}{n_1}(n_2 - n_3) + \frac{S_2}{n_2}(n_3 - n_1) + \frac{S_3}{n_3}(n_1 - n_2) = 0$$

۶۴۸. تصاعد حسابی بنویسید که جمله اول آن ۱ و مجموع ۵ جمله اول آن

$\frac{1}{4}$ مجموع ۵ جمله بعدی آن باشد.

۶۴۹. مطلوب است مجموع همه عددهای دو رقمی که در تقسیم بر ۷ باقیمانده‌ای

مساوی ۳ داشته باشند.

۶۵۰. حاصل عبارت زیر را بدست آورید:

$$(4\sqrt{3}+8)\left[\sqrt{3}(\sqrt{3}-2)+\frac{3-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}+\dots\right]$$

۶۵۱. در يك تصاعد هندسی نزولی ، جمله دوم برابر است با ۶ و مجموع

تمام جمله‌ها مساوی $\frac{1}{8}$ مجموع مربعات این جمله‌ها است. تصاعد را معین کنید.

۶۵۲. ۳ عدد به مجموع ۲۶ تشکیل تصاعد هندسی می‌دهند و اگر به ترتیب

به آنها عددهای ۱، ۳ و ۶ را اضافه کنیم، سه عدد بدست می‌آید که تشکیل

تصاعد حسابی می‌دهند. این عددها را پیدا کنید.

۶۵۳. اگر ضلعهای يك مثلث به تصاعد هندسی باشند ، حدود قدرنسبت را

پیدا کنید.

۶۵۴. آیا ۳ عدد می‌توان پیدا کرد که در عین حال هم به تصاعد حسابی و

هم به تصاعد هندسی باشند؟

۶۵۵. ثابت کنید:

$$\underbrace{11\dots1}_k \underbrace{55\dots5}_{k-1} = \underbrace{33\dots3}_{k-1} 34^2$$

۶۵۶. در يك تصاعد حسابی به جمله‌های $a_1, a_2, a_3, \dots$ می‌دانیم $a_{m+n} = A$

و $a_{m-n} = B$ ، مطلوب است محاسبه a_m و a_n .

۶۵۷. در يك تصاعد هندسی به جمله‌های $a_1, a_2, a_3, \dots$ می‌دانیم $a_{m+n} = A$ و $a_{m-n} = B$ ، مطلوب است محاسبه a_m و a_n .

۶۵۸. ثابت کنید که اگر a, b, c, d به تصاعد هندسی باشند، داریم:

$$(b-c)^2 + (c-a)^2 + (d-b)^2 = (a-d)^2$$

۶۵۹. در چند جمله‌ای $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 1$ ضریبهای

a, b, c و d به تصاعد هندسی و $1, d, c, b, a$ به تصاعد حسابی هستند. اگر

$f(x)$ بر $x^2 + x + 1$ قابل قسمت باشد، $f(x) = 0$ را حل کنید.

۶۶۰. اگر a, b, c, d چهار جمله متوالی از يك تصاعد حسابی باشند، ثابت

کنید عبارت $abcd + (b-c)^4$ مربع کامل است.

۶۶۱. m را چنان پیدا کنید که ریشه‌های معادله:

$$x^4 - 2(2m+1)x^2 + m+1 = 0$$

۶۶۲. اگر a, b, c بترتیب جمله‌های m ام، n ام و p ام يك تصاعد هندسی

باشند، ثابت کنید:

$$a^{n-p} \cdot b^{p-m} \cdot c^{m-n} = 1$$

۶۶۳. اگر $a_1, a_2, \dots, a_n$ به تصاعد حسابی باشند، مطلوب است محاسبه:

$$۱) S_1 = a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-1} a_n$$

$$۲) S_2 = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n}$$

$$۳) S_3 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2$$

$$۴) S_4 = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \dots + a_n^3$$

۶۶۴. x را چنان پیدا کنید که $\log 2$ ، $\log(2^x - 2)$ و $\log(2^x + 2)$ به

تصاعد حسابی باشند.

۶۶۵. ثابت کنید که اگر a, b, c به تصاعد هندسی باشند، $\frac{1}{\log_b x} + \frac{1}{\log_a x}$

و $\frac{1}{\log_c x}$ به تصاعد عددی خواهند بود.

۶۶۶. اولاً مجموع مربهای عددهای زوج را تا $2n$ ، ثانیاً مجموع مربهای

عددهای فرد را تا $(2n-1)$ بدست آورید.

۶۶۷. در معادله $ax^2 + bx^2 + cx + d = 0$ چه رابطه‌ای بین ضریبها

برقرار باشد، تا ریشه‌ها به تصاعد حسابی باشند.

۶۶۸. ثابت کنید که اگر a, b, c به تصاعد حسابی باشند $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

و $\frac{f(c)-f(b)}{c-b}$ نیز تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند، همچنین

اگر a^2, b^2, c^2 تشکیل تصاعد حسابی بدهند $\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}$ ،

و $\frac{f(c)-f(b)}{c^2-b^2}$ نیز به تصاعد حسابی خواهند بود $[f(x)]$

يك تابع غير مشخص نسبت به متغير x است].

۶۶۹. اگر ضرایب يك چهارضلعی محدب جمله‌های متوالی يك تصاعد هندسی

باشند، ثابت کنید قدرنسبت این تصاعد بین $\frac{1}{3}$ و ۲ واقع است.

۲. لگاریتم

۶۷۰. این معادله را حل کنید:

$$(\log_a c)^{\log_b \log_a^2 x} + \log_a c = \log_a ac [(\log_a x)^{\log_b \log_a c}]$$

۶۷۱. اگر $\alpha \log 2 = \beta \log 3$ باشد، مطلوب است محاسبه $\log_{15} \sqrt[5]{11/25}$

۶۷۲. اگر $a = \log_{11} 27$ باشد، $\log_6 16$ را پیدا کنید.

بدون استفاده از جدول لگاریتم، حاصل هر يك از عبارتهای زیر را بدست آورید:

$$\frac{1}{2} \log 9 - \log 2 \quad ۶۷۴ \quad \log 5 \log 20 + \log^2 2 \quad ۶۷۳$$

$$\sqrt[5]{10^2 + \frac{1}{2} \log 16} \quad ۶۷۶ \quad \frac{1}{100} - \log \sqrt[4]{4} \quad ۶۷۵$$

$$\frac{\log(\log a)}{a \log a} \quad ۶۷۸ \quad 1 - \log_7 2 + 5 - \log_5 4 \quad ۶۷۷$$

۶۷۹. اگر $4a^2 + 9b^2 = 12ab$ باشد، ثابت کنید:

$$\log \frac{2a+3b}{5} = \frac{\log a + \log b}{2}$$

۶۸۰. اگر $a^2 + b^2 = 5ab$ باشد، ثابت کنید:

$$\log \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$$

۶۸۱. اگر $a^2 + b^2 = c^2$ باشد، ثابت کنید:

$$\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{b+c} a \log_{c-b} a$$

۶۸۲. اگر $a' = \log_b c$ و $b = \log_c a$ و $c = \log_a b$ باشد، ثابت کنید:

$$۱) abc = ۱$$

$$۲) \frac{a}{ab+a+۱} + \frac{b}{bc+b+۱} + \frac{c}{ca+c+۱} = ۱$$

۶۸۳. اگر داشته باشیم:

$$x = \log_a(bc) ; y = \log_b(ca) ; z = \log_c(ab)$$

$$x + y + z + 2 = xyz \quad \text{ثابت کنید:}$$

۶۸۴. اگر x و y و z به تصاعد توافقی باشند، ثابت کنید:

$$\log(x+z) + \log(x-2y+z) = 2 \log(x-z)$$

۶۸۵. اگر بدانیم $\log \alpha$ ، $\log \beta$ و $\log \gamma$ ریشه‌های معادله:

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$$

باشند، حاصل عبارت زیر را بدست آورید:

$$S = \log \frac{\alpha}{\beta} \cdot \log \frac{\beta}{\gamma} + \log \frac{\beta}{\gamma} \cdot \log \frac{\gamma}{\alpha} + \log \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \log \frac{\alpha}{\beta}$$

معادله‌های زیر را حل کنید:

$$\log_4 \log_3 \log_2 x = 0 \quad ۶۸۶$$

$$\log_a \left\{ 1 + \log_b [1 + \log_c (1 + \log_p x)] \right\} = 0 \quad ۶۸۷$$

$$\log_4 \left\{ 2 \log_2 [1 + \log_2 (1 + 3 \log_2 x)] \right\} = \frac{1}{2} \quad ۶۸۸$$

$$\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7 \quad ۶۸۹$$

$$\log_a x - \log_{a^2} x + \log_{a^3} x = \frac{3}{4} \quad ۶۹۰$$

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{x-1} + a^x = \quad .۶۹۱$$

$$= (1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4)(1 + a^8)$$

$$\Delta^{\log x} - 3^{\log x - 1} = 3^{\log x + 1} - \Delta^{\log x - 1} \quad .۶۹۲$$

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = a^2 \\ \log_x \sqrt{a} + \log_y \sqrt{b} = \frac{a}{\sqrt{r}} \end{cases} \quad .۶۹۳$$

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_8 z = 2 \\ \log_4 y + \log_8 z + \log_2 x = 2 \\ \log_8 z + \log_2 x + \log_4 y = 2 \end{cases} \quad .۶۹۵ \quad \begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0 \\ x^2 - \Delta y^2 + 4 = 0 \end{cases} \quad .۶۹۶$$

$$\begin{cases} \sqrt[10]{2x} \sqrt[5]{2y} = \sqrt[12]{x} \\ \log(x+y) = \log 40 - \log(x-y) \end{cases} \quad .۶۹۶$$

$$\log_x ay = p ; \log_y bx = q \quad .۶۹۷$$

.۶۹۸ معادله زیر مفروض است:

$$\log_{100} x^2 = \log_{10} \left(\log_{10} a - \left| \log_{10} \frac{x}{a} \right| \right)$$

اولا به ازای چه مقادیری از a این معادله جواب دارد؟ ثانیاً جوابهای آنرا پیدا کنید:

.۶۹۹ این نامعادله را حل کنید:

$$\log \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} (x^2 - 2x + 1) \geq 0$$

این معادله‌ها را حل کنید:

$$\left(\cos \frac{\pi}{y} \right)^x + \left(\sin \frac{\pi}{y} \right)^x - 1 = 0 \quad .۷۰۰$$

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3})^x + (\sqrt{2} - \sqrt{3})^x - 6 = 0 \quad .۷۰۱$$

$$13^x + 12^x - 25 = 0 \quad .۷۰۲$$

$$2x + 2 \log(2x + 4) - 7 = 0 \quad .۷۰۳$$

$$2x + 2 \log x - 2 = 0 \quad .۷۰۴$$

$$\log_{\frac{\pi}{\sqrt{e}}} x + \log_{\frac{\pi}{\Delta}} \left(x + \frac{\pi}{\Delta} - 1 \right) - 1 = 0 \quad .705$$

$$\sqrt[4]{2 \log_{\frac{\pi}{\sqrt{e}}} x} - 3 \sqrt{\frac{4x}{\pi}} + 1 = 0 \quad .706$$

$$3 \times 16^x + 36^x - 2 \times 81^x = 0 \quad .707$$

$$\Delta^x - 4^x - 3^x = 0 \quad .708$$

$$3^{2-x} + 4^{2x} - 7 \times 2^x - 2 \times 3^x = 0 \quad .709$$

$$\log_7(1 + \sqrt{x}) = \log_7 x \quad .710$$

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{x+1} + \left(\frac{1}{6}\right)^x - \sqrt{7} \left(\frac{\sqrt{7}}{6}\right)^x = 1 \quad .711$$

$$2 \times 9^{\log_7 0 / \Delta x} = x^{\log_7 9} - x^2 \quad .712$$

۱۴

مجموعه ها

وقتی که دژدکانتود نظریه مجموعه‌ها را بنیان گذاشت ،
 گمان نمی‌کرد که با گذشت زمان ، روشهای این نظریه به عنوان
 یکی از پر قدرت ترین روشها بر همه بخشهای ریاضیات سایه بیفکند.
 این روزها برای به کرسی نشاندن روش مجموعه‌ها در همه
 جهان مسابقه‌ای در گرفته است و کشور ما هم در برنامه‌های جدیدی
 که برای آموزش متوسطه طرح ریزی می‌شود، از این مسابقه بی‌نصیب
 نمانده است، به همین مناسبت آشنایی دانش آموزان به این نظریه
 ضروری است و ما هم در اینجا بحث مختصری از آنرا آورده ایم.
 مطالعه کتاب کوچک «نظریه مجموعه‌ها» که از اثرهای
 ریاضیدان معروف معاصر «سرچینسکی» است می‌تواند به این هدف
 کمک بیشتری باشد.

۱. مجموعه

در گفتگوهای روزانه اغلب به مفهومی از نوع «گروه»، «دسته»، «خانواده»، «کلکسیون» و غیره برخورد می‌کنیم: فلانی «کلکسیون» تمبر دارد، «مجموعه» بهترین اثرهای نقاشی معاصر در فلان موزه گردآوری شده است، گروهی از بهترین ریاضیدانها در بحث شرکت داشتند و غیره. «کلکسیون» «گروه» و غیره را «مجموعه» هم می‌توان نامید. همچنین می‌توان از مجموعه دانش‌آموزان يك کلاس، مجموعه صفحه‌های کتاب جبر، مجموعه ستاره‌ها، مجموعه همه مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۶، مجموعه‌ای که از سه حرف f, a و x تشکیل شده است، مجموعه همه مثلثها و غیره صحبت کرد.

۲. عضو مجموعه

هر چیزی که متعلق به يك مجموعه باشد، عضو آن مجموعه نامیده می‌شود. در مجموعه اثرهای نقاشی، هر تابلو نقاشی يك عضو آن مجموعه است؛ هر دانش‌آموز عضوی از مجموعه دانش‌آموزان کلاس خود است؛ هر يك از عددهای ۱، ۲، ۳، ۶ عضوی از مجموعه مقسوم‌علیه‌های عدد ۶ هستند و غیره.

Z را مجموعه دانش‌آموزان يك کلاس و a را دانش‌آموزی از آن کلاس فرض می‌کنیم. در اینصورت گوییم: « a عضو Z است» یا « a به مجموعه Z تعلق دارد» و آنرا اینطور می‌نویسیم: $a \in Z$.

$a \in Z$ a به Z تعلق دارد

b را دانش‌آموزی از کلاس دیگر فرض می‌کنیم، b عضو مجموعه Z

نیست، b به Z تعلق ندارد و بطور خلاصه می‌نویسیم: $b \notin Z$.

$$\boxed{b \notin Z}$$

b به Z تعلق ندارد

D_n را همهٔ مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد طبیعی n می‌گیریم، مثلاً D_6 یعنی همهٔ مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۶. در این صورت می‌توانیم بنویسیم: $1 \in D_6$ ، $2 \in D_6$ ، $3 \in D_6$ ، $4 \in D_6$ ، $5 \notin D_6$ ، $6 \in D_6$.

۳. مجموعه‌های معین

مجموعهٔ Z را به این ترتیب تعریف می‌کنیم: « Z عبارت است از همهٔ عددهای طبیعی کوچکتر از ۷». با این تعریف معلوم می‌شود که چه عددهایی به مجموعهٔ Z تعلق دارند و چه عددهایی عضو مجموعهٔ Z نیستند. مثلاً $3 \in Z$ ، زیرا ۳ عدد طبیعی کوچکتر از ۷ است؛ $8 \notin Z$ ، زیرا ۸ عدد طبیعی کوچکتر از ۷ نیست. می‌توان عددهایی که مجموعهٔ Z را به وجود می‌آورد به هر ترتیب دلخواه نوشت و به صورت یکی از تساویهای زیر نشان داد:

$$Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \text{یا} \quad Z = \{1, 5, 3, 4, 6, 2\} \quad \dots$$

دربارهٔ يك مجموعه تنها وقتی می‌توان صحبت کرد که یا همهٔ عضوهای آنرا بشناسیم و یا شرطهایی را داشته باشیم که به کمک آنها بتوان عضو این مجموعه را شناخت و آنهایی را که عضو این مجموعه نیستند تشخیص داد.

۴. زیر مجموعهٔ يك مجموعه مفروض

Z را مجموعهٔ دانش‌آموزان مدرسهٔ ما و Z' را مجموعهٔ دانش‌آموزان کلاس خودمان می‌گیریم. هر عضو مجموعهٔ Z' ضمناً عضو مجموعهٔ Z هم می‌باشد، زیرا هر دانش‌آموز کلاس ما دانش‌آموز مدرسهٔ ما هم هست. می‌توانیم بگوییم:

اگر $a \in Z'$ ، آنگاه $a \in Z$

بجای اصطلاح «اگر ... آنگاه ...» می‌توانیم از علامت $\Rightarrow$ استفاده کنیم و بنویسیم:

$$a \in Z' \Rightarrow a \in Z$$

اگر a متعلق به Z' باشد، آنگاه a متعلق به Z هم خواهد بود.

این مفهوم را بترتیب دیگری هم می‌توان بیان کرد و گفت که مجموعه Z' به مجموعه Z تعلق دارد و بطور خلاصه نوشت: $Z' \subset Z$.

$$Z' \subset Z$$

Z' به Z تعلق دارد

مجموعه Z' را زیر مجموعه یا جزء مجموعه Z گویند.

D_6 را مجموعه همه مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۶ و D_{12} را مجموعه همه مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۱۲ فرض می‌کنیم. در این صورت

$$D_6 = \{1, 2, 3, 6\}; D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

مجموعه D_6 زیرمجموعه‌ای از مجموعه D_{12} است، زیرا هر عددی که

عضو مجموعه D_6 باشد، عضو مجموعه D_{12} هم خواهد بود:

$$D_6 \subset D_{12}$$

۵. تساوی مجموعه‌ها

Z را مجموعه همه عددهای صحیحی که بر ۱۴۳ قابل قسمت باشند و Z' را مجموعه عددهای صحیحی که بر ۱۱ و ۱۳ قابل قسمت باشند، فرض می‌کنیم. شرطهایی که هر يك از این دو مجموعه را معین می‌کنند با یکدیگر فرق دارند، با وجود این Z و Z' تنها يك مجموعه را مشخص می‌کنند. هر عددی که متعلق به مجموعه Z ، یعنی بر ۱۴۳ قابل قسمت باشد، حتماً بر ۱۱ و ۱۳

هم قابل قسمت است، زیرا $۱۳ \times ۱۱ = ۱۴۳$. بنابراین چنین عددی عضو مجموعه Z' هم خواهد بود. برعکس هر عضو مجموعه Z' عددی است که بر ۱۱ و ۱۳ قابل قسمت است و بنابراین بر ۱۴۳ هم قابل قسمت خواهد بود و در نتیجه عضوی از مجموعه Z است. می توان نوشت:

$$a \in Z \iff a \in Z'$$

اگر جهت راست پیکان را در نظر بگیریم به این معناست که: «اگر a متعلق به Z باشد، آنگاه a متعلق به Z' است» و اگر جهت چپ پیکان را در نظر بگیریم: «اگر a متعلق به Z' باشد، آنگاه a متعلق به Z است». این عبارت را به این ترتیب هم می توان خواند: « a تنها و تنها وقتی به Z تعلق دارد که متعلق به Z' باشد». همین عبارت را به این ترتیب هم می توان بیان کرد:

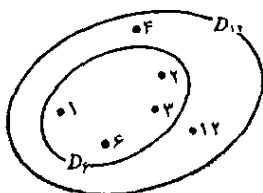
$$Z \subset Z' \text{ و } Z' \subset Z$$

به این ترتیب علامتهای Z و Z' يك مجموعه را مشخص می کنند، بنابراین $Z = Z'$.

$Z = Z'$	$a \in Z \iff a \in Z'$
Z همان Z' است	a تنها و تنها وقتی به Z تعلق دارد که متعلق به Z' باشد.
	$Z \subset Z' \text{ و } Z' \subset Z$

۶. نمایش هندسی مجموعه ها

اگر از نمایش هندسی مجموعه ها استفاده کنیم، بسیاری از مسأله های



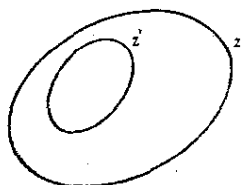
شکل ۴

مربوط به خاصیت های مجموعه ها را می توان با سادگی بیشتری حل کرد. مثلاً شکل ۴ با سادگی بیشتری رابطه $D_7 \subset D_{12}$ را نشان می دهد.

هر مجموعه Z را می توان به وسیله منحنی بسته ای نشان داد، بطوری که عضو های این مجموعه

بعضی از نقطه های واقع در داخل این منحنی را نشان دهند (مشخص کردن

خود این نقطه‌ها روی شکل اجباری نیست). مثلاً از شکل ۵ می‌خوانیم که



شکل ۵

مجموعه Z' جزئی از مجموعه Z است، اگر چه عضوهای این دو مجموعه را نمی‌بینیم و از نوع این مجموعه‌ها هم اطلاعی نداریم. مثلاً ممکن است Z' مجموعه دانش‌آموزان کلاس ما و Z مجموعه دانش‌آموزان مدرسه ما باشد؛ یا ممکن است Z'

مجموعه عددهای زوج و Z مجموعه همه عددهای صحیح باشد و غیره. معنای نشانه‌های Z و Z' می‌تواند متفاوت باشد، ولی در هر حال Z' جزئی از Z است.

۷. حاصل جمع منطقی (اجتماع) مجموعه‌ها

در جدول زیر ورزش‌های مورد علاقهٔ هریک از شش نفر a ، b ، c ،

d ، e و f معین شده است:

	a	b	c	d	e	f	
اسکی	بله			بله	بله		$Z_a = \{a, d, e\}$
پاتیناژ	بله		بله		بله		$Z_p = \{a, c, e\}$
دو	بله	بله		بله			$Z_d = \{a, b, d\}$
پرش طول	بله					بله	$Z_t = \{a, f\}$
پرش ارتفاع	بله	بله					$Z_e = \{a, b\}$
فوتبال			بله	بله	بله	بله	$Z_f = \{c, d, e, f\}$

مجموعه افرادی از این شش نفر را که به یکی از ورزشها علاقه دارند با نشانه Z و يك اندیس نشان داده ایم، مثلاً منظور ما از Z_4 عبارت است از مجموعه افرادی که به پرش طول علاقمندند.

حرف Z را برای مجموعه همه افرادی از این شش نفر می گیریم که لاقط به یکی از ورزشهای زمستانی، یعنی اسکی یا پاتیناژ، علاقمند باشند. می بینیم که:

$$a \in Z_a \text{ و } a \in Z_p \quad \text{یعنی} \quad a \in Z$$

$$c \in Z_p \quad \text{یعنی} \quad c \in Z$$

$$d \in Z_a \quad \text{یعنی} \quad d \in Z$$

$$e \in Z_a \text{ و } e \in Z_p \quad \text{یعنی} \quad e \in Z$$

مجموعه Z را حاصل جمع منطقی (یا اجتماع) دو مجموعه Z_a و Z_p

می نامیم و می نویسیم:

$$Z = Z_a \cup Z_p = \{a, d, e\} \cup \{a, c, e\} = \{a, c, d, e\}$$

علامت $\cup$ (که ناو نامیده می شود) نشان می دهد که مجموعه های Z_a و Z_p را در يك مجموعه متحد کرده ایم که حاصل جمع منطقی آنها نامیده می شود.

اگر W را مجموعه ای از افراد این شش نفر بگیریم که به ورزشهای سبك دو، پرش طول و پرش ارتفاع علاقمندند، در اینصورت باید همه عضوهای مجموعه Z_d ، همه عضوهای مجموعه Z_1 و همه عضوهای مجموعه Z_e را در مجموعه W به حساب بیاوریم. بنابراین:

$$\begin{aligned} W = Z_d \cup Z_1 \cup Z_e &= \{a, b, d\} \cup \{a, f\} \cup \{a, b\} = \\ &= \{a, b, d, f\} \end{aligned}$$

حاصل جمع منطقی چند مجموعه، یعنی مجموعه ای که شامل همه عضوهای

این مجموعه ها باشد. برای اینکه بدانیم يك چیز عضو مجموعه حاصل جمع هست، کافی است لاقط عضو یکی از مجموعه های مفروض باشد.

$Z = Z_1 \cup Z_2$ Z حاصل جمع منطقی Z_1 و Z_2 است	$a \in Z_1 \cup Z_2 \iff a \in Z_1 \text{ یا } a \in Z_2$
--	---

مثال. مطلوب است مجموعه

$$Z = D_{10} \cup D_6$$

چون $D_{10} = \{1, 2, 5, 10\}$ و $D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$ ، بنابراین

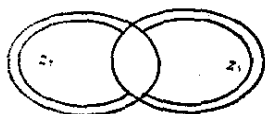
$$Z = D_{10} \cup D_6 = \{1, 2, 3, 5, 6, 10\}$$

در شکل ۶، دوروه‌ای که با دو خط

مشخص شده است، حاصل جمع منطقی دو مجموعه Z_1 و Z_2 را نشان می‌دهد.

در شکل ۷، مجموعه $Z = D_{10} \cup D_6$

نشان داده شده است.



شکل ۶

۸. حاصلضرب منطقی (اشترک) مجموعه‌ها

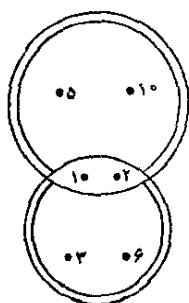
مجموعه تهی

U را مجموعه همه دانش آموزانی می‌گیریم که به هر دو ورزش زمستانی از جدول صفحه ۳۵۹ علاقمند باشند. بنابراین تنها دانش آموزانی عضو مجموعه U هستند که هم عضو مجموعه Z_a و هم عضو مجموعه Z_p باشند. در نتیجه

$$U = \{a, e\}$$

مجموعه U عبارت است از فصل مشترک دو مجموعه Z_p و Z_a و به این صورت نوشته می‌شود:

$$U = Z_a \cap Z_p = \{a, d, e\} \cap \{a, c, e\} = \{a, e\}$$



شکل ۷

مجموعه U را حاصلضرب منطقی (یا اشتراك) مجموعه‌های Z_p و Z_a علامت $\cap$ را تاق گویند.

V را مجموعه همه دانش‌آموزانی می‌گیریم که به هر سه ورزش سبك (دو، پرش طول و پرش ارتفاع) علاقمند باشند، یعنی:

$$V = Z_d \cap Z_t \cap Z_e = \{a, b, d\} \cap \{a, f\} \cap \{a, b\} = \{a\}$$

مجموعه V تنها يك عضو دارد: a . تنها دانش‌آموز a به هر سه ورزشی که سبك نامیده‌ایم، علاقمند است. به‌همین مناسبت مجموعه V را مجموعه يك عضوی گویند. مجموعه V فصل مشترك مجموعه‌های Z_d ، Z_t و Z_e است. Y را مجموعه‌ای از دانش‌آموزانی می‌بینیم که نسبت به همه ورزشهای جدول صفحه ۳۵۹ علاقمند باشند. می‌بینیم که چنین دانش‌آموزی وجود ندارد. می‌گوییم که مجموعه Y تهی است. مجموعه تهی را با علامت Φ نشان می‌دهند بنابراین:

$$Y = \Phi$$

Φ مجموعه تهی

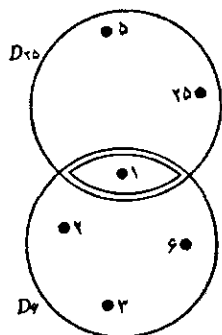
حاصلضرب منطقی (با اشتراك) چند مجموعه مفروض، به مجموعه‌ای گفته می‌شود که هر عضو آن عضو هريك از مجموعه‌های مفروض باشد. برای اینکه مطمئن شویم که چیزی عضو مجموعه حاصلضرب است، باید مطمئن شویم که این چیز عضو تمام مجموعه‌های مفروض می‌باشد.

$Z = Z_1 \cap Z_2$	
$a \in Z_1 \cap Z_2 \iff a \in Z_1 \text{ و } a \in Z_2$ حاصلضرب منطقی Z_1 و Z_2 است اشتراك دو مجموعه Z_1 و Z_2 است	

مثال. مجموعه $D_6 \cap D_{25}$ را پیدا می‌کنیم.

چون $D_6 = \{1, 2, 3, 6\}$ و $D_{25} = \{1, 5, 25\}$ ، پس:

$$D_6 \cap D_{25} = \{ ۱ \}$$



شکل ۸

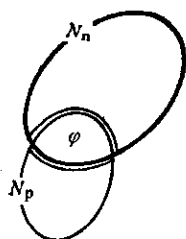
در شکل ۸ بوسیلهٔ دورهٔ دو خطی، مجموعهٔ $D_6 \cap D_{25}$ نشان داده شده است.

مجموعه‌ای که از اشتراك (حاصلضرب منطقی) دو مجموعهٔ D_6 و D_{25} بدست می‌آید تنها شامل يك عضو است، یعنی ۱. وقتی كه می‌نویسیم:

$$D_6 \cap D_{25} = \{ ۱ \}$$

۶ و ۲۵ مقسوم‌علیهٔ مشترکي بزرگتر از ۱ ندارند، یعنی نسبت به هم اولند.

در شکل ۹، N_p عبارت است از مجموعهٔ همهٔ عددهای طبیعی زوج (با دورهٔ نازك) و N_n مجموعهٔ همهٔ عددهای طبیعی فرد (با دورهٔ كلفت). حاصلضرب منطقی این دو مجموعه، مجموعه‌ای است كه با دورهٔ دوخطی نشان داده شده است. از آنجا كه این دو مجموعه عضو مشترك ندارند (چرا؟)، در داخل دوره‌ای كه نمایندهٔ اشتراك دو مجموعهٔ



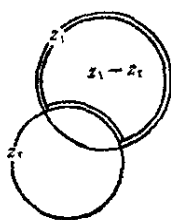
شکل ۹

N_n و N_p است، علامت مجموعهٔ تهی، یعنی $\emptyset$ ، را قرار داده‌ایم.

وقتی كه دو مجموعه حتی يك عضو مشترك نداشته باشند، یعنی اشتراك آنها يك مجموعهٔ تهی باشد، آنها را نامتقاطع گویند. مجموعه‌های N_n و N_p نامتقاطع‌اند، درحالی كه مجموعه‌های D_6 و D_{25} نامتقاطع نیستند.

۹. تفاضل مجموعه‌ها

مثال. در شکل ۱۰ دو مجموعه نشان داده شده است: $Z_۱$ و $Z_۲$. فرض



شکل ۱۰

کنید Z_1 مجموعه همه دانش آموزان کلاس ما و Z_2 مجموعه همه دانش آموزانی از مدرسه ما که پیانو می نوازند، باشند. دوره دو خطی مجموعه ای را مشخص می کند که شامل آن دانش آموزان کلاس ما است که پیانو نمی نوازند. این مجموعه را با $Z_1 - Z_2$ نشان می دهند و تفاضل دو مجموعه Z_1 و Z_2 می نامند.

تفاضل دو مجموعه Z_1 و Z_2 به مجموعه همه عضوهایی از Z_1 گفته می شود که متعلق به Z_2 نباشند.

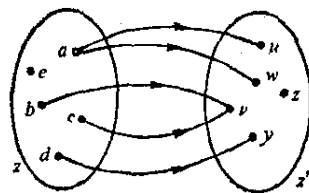
$Z = Z_1 - Z_2$	
عبارت است از تفاضل دو مجموعه Z_1 و Z_2	$a \in Z_1 - Z_2 \iff a \in Z_1 \text{ و } a \notin Z_2$

۱۰. نگاشت مجموعه ها

۱. Z را مجموعه دانش آموزان یک دبیرستان و Z' را مجموعه دانش-

آموزان دبستانهایی که در خیابان این محل قرار دارند، فرض می کنیم.

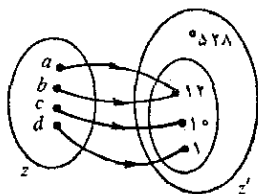
در شکل ۱۱ این مجموعه ها نشان داده شده است؛ نقطه هایی که بوسیله حروفها نشان داده شده است، بعضی از عضوهای این مجموعه ها هستند. هر پیکان از نقطه ای که نماینده دانش آموزی از دبیرستان است به طرف نقطه ای است که نماینده برادر یا خواهر او در



شکل ۱۱

دبستان است. در شکل ۱۱ می بینیم که دانش آموز a دوبرادر (یا دو خواهر

یا يك خواهر و يك برادر) در دبستان دارد (w و u)؛ دانش‌آموزان b و c برادر (یا خواهر) مشترکی دارند (v)؛ دانش‌آموز d يك برادر (یا خواهر) دارد (y)؛ دانش‌آموز e برادر یا خواهری در دبستان ندارد؛ z برادر یا خواهر دانش‌آموزی از دبیرستان نیست. از نقطه‌ای که نماینده يك عضو مجموعه Z است، می‌تواند يك یا چند پیکان خارج شود، یا اصلاً پیکانی خارج نشود (چرا؟). به نقطه‌ای که نماینده دانش‌آموزان دبستان است، ممکن است يك یا چند پیکان وارد شود و یا اصلاً پیکانی وارد نشود (چرا؟) پیکانها ارتباط بعضی از عضوهای مجموعه Z را با بعضی از عضوهای مجموعه Z' در زوج مرتب روشن می‌کنند: عضو اول زوج (مبداء زوج) عبارت است از دانش‌آموز دبیرستان و عضو دوم زوج (منتهای زوج) عبارت است از برادر یا خواهری از او که در دبستان است. در شکل ۱۱ زوجهای (a, u)، (a, w)، (b, v)، (c, v)، (d, y)، نشان داده شده است. زوجهای (a, u) و (a, w) دارای مبداء مشترك و منتهای متمایزند. زوجهای (b, v) و (c, v) دارای يك منتهای و مبداء متفاوتند.



شکل ۱۲

۴. در شکل ۱۲، مجموعه Z چهار دانش-

آموز يك دبیرستان را نشان می‌دهد که به عنوان رئیس انجمن ریاضی دبیرستان کاندید شده‌اند؛ Z' هم عبارت است از مجموعه همهٔ عدهای طبیعی. پیکانها نشان می‌دهند که هر يك از این کاندیدها ضمن انتخاب رئیس چند رأی آورده‌اند. از هر

نقطه‌ای که نماینده یکی از کاندیدهاست، تنها يك پیکان خارج می‌شود (چرا؟)؛ بهر نقطه‌ای که نماینده يك عدد طبیعی است ممکن است يك یا چند پیکان وارد شود، یا اصلاً پیکانی وارد نشود (چرا؟).

به هر عضو مجموعه Z ، یعنی بهر کاندید ریاست، تنها يك عدد طبیعی نسبت داده شده است، یعنی تعداد رأیهای که ضمن انتخابات بدست آورده است. پیکانها زوجهای مرتب را مشخص می‌کنند. ابتدای این زوجها عبارت است از کاندیدهای ریاست، و منتهای آنها تعداد رأیهای که بدست آورده‌اند. در شکل زوجهای زیر وجود دارد:

$(d, 1)$ و $(c, 10)$ و $(b, 12)$ و $(a, 12)$

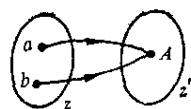
در مجموعه این زوجها نمی‌تواند زوجهایی با يك مبدا و دو منتهای وجود داشته باشد. چرا؟ در مثال قبل چگونه بود؟

وقتی که هر کاندید ریاست را به تعداد رأیهایی که آورده است نسبت می‌دهیم، گوییم مجموعه Z را بر جزئی از مجموعه عددهای طبیعی نگاشته‌ایم.

عضوهای Z از مجموعه Z' (منتهای زوجها) که متناظر با عضوی از مجموعه Z (ابتدای زوجها) می‌باشند، نگاره عضو مربوطه Z درنگاشت داده شده، نامیده می‌شود.

در مثال مذکور، ۱۲ نگاره a و هم نگاره b است، ۱۰ نگاره c و ۱ نگاره d است. نگاره تمام مجموعه $\{a, b, c, d\}$ عبارت است از زیر مجموعه $\{1, 10, 12\}$ از مجموعه عددهای طبیعی.

۳. در شکل ۱۳، عبارت است از مجموعه



همه دایره‌ها و Z' مجموعه همه نقطه‌ها. هر دایره به مرکز خود نسبت داده شده است. با اطلاع بر این مطلب از شکل ۱۳ می‌فهمیم که دایره‌های a و b

دارای مرکز مشترك A هستند.

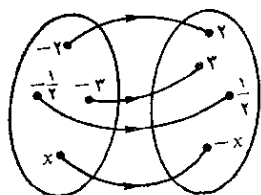
شکل ۱۳

از هر نقطه‌ای که نماینده يك دایره است تنها يك پیکان خارج می‌شود؛ ولی به هر نقطه‌ای که نماینده يك نقطه هندسی است بی‌نهایت پیکان وارد می‌شود (در شکل ۱۳ تنها دو تا رسم شده است). چرا؟

وقتی که هر دایره را به مرکز آن نسبت می‌دهیم، يك زوج مرتب تشکیل داده‌ایم: ابتدای این زوجها دایره‌ها و منتهای آنها مرکزهایشان خواهد بود. در مجموعه این زوجها، عضوهایی وجود ندارد که دارای يك مبدا و منتهای مختلف باشند. چرا؟ همین خاصیت را در مثال ۲ هم دیدیم. با وجود این بین مثالهای ۲ و ۳ اختلافی وجود دارد. در مثال ۲، عدد ۵۲۸ از مجموعه Z' متناظر با هیچ عضوی از مجموعه Z نیست (یعنی منتهای هیچ زوجی نیست). در مثال ۳، هر عضو مجموعه Z' نگاره عضوی از مجموعه Z است (حتی نگاره مشترك بی‌نهایت عضو مجموعه Z وجود دارد؛ چرا؟).

با متناظر کردن هر دایره با مرکز آن، مجموعه همه دایره‌ها را بر مجموعه همه نقطه‌ها نگاشته‌ایم. نگاشت مجموعه Z عبارت است از تمام مجموعه Z' .

۴. Z را مجموعه عددهای منفی و Z' را



شکل ۱۴

مجموعه عددهای مثبت می‌گیریم (شکل ۱۴). هر عدد از مجموعه Z را متناظر با عدد قرینه آن در مجموعه Z' قرار می‌دهیم. در اینصورت هر عضو x از مجموعه Z درست‌مبدأ یک زوج $(x, -x)$ ؛ و هر عضو مجموعه Z' درست‌منتهای یک زوج است.

چرا؟

در شکل ۱۴، به نقطه‌ای که نماینده عدد مثبت است، هر گز بیش از یک پیکان وارد نمی‌شود. می‌گوییم که در این نگاشت تناظر یک به یک وجود دارد.

۵. Z را مجموعه دانش‌آموزان a, b, c, d, e, f می‌گیریم

که به بازی مشغولند، به این ترتیب: پنج تا از آنها روی صندلیها نشسته‌اند و ششمی ایستاده است. دانش‌آموزانی که نشسته‌اند بلند می‌شوند و جای خود را عوض می‌کنند و در این ضمن آنکه ایستاده است سعی می‌کند روی صندلی بنشیند. اگر به این کار موفق شود، یکی از دیگران بدون صندلی می‌ماند و بازی را باخته است. هر دانش‌آموز را با دانش‌آموزی که (نشسته یا ایستاده) جای او را اشغال می‌کند، متناظر می‌کنیم. به این ترتیب مجموعه Z را بر خود مجموعه Z در تناظر یک به یک نگاشته‌ایم.

نگاشت مجموعه‌ها

گوییم مجموعه Z بر مجموعه Z' نگاشته شده است، وقتی که هر عضو مجموعه Z درست به یک عضو از مجموعه Z' نسبت داده شده باشد و ضمناً هر عضو مجموعه Z' متناظر بالااقل یک عضو مجموعه Z باشد. از اینجاست مجموعه زوجهای مرتب تشکیل می‌شود: هر عضو مجموعه Z درست مبدأ یکی از زوجها و هر عضو مجموعه Z' منتهای لااقل یک زوج است.

مجموعه همه این زوجها را نگاشت مجموعه Z بر مجموعه Z' گوئیم. عضوی را که متناظر با عضوی از مجموعه Z قرار می‌دهیم، نگاره آن در نگاشت مفروض می‌نامیم. در مثالهای ۲، ۳، ۴ و ۵ نگاشت مجموعه Z بر مجموعه Z' یا زیر مجموعه‌ای از آن تعریف شده است. در مثال ۵: $Z' = Z$. اگر در نگاشت مفروض مجموعه Z بر مجموعه Z' ، هر عضو مجموعه Z' درست نگاره یک عضو مجموعه Z باشد (یعنی هر مجموعه Z' درست منتهای یک زوج باشد)، آنرا نگاشت مجموعه Z بر Z' در تناظر یک به یک گوئیم. در مثالهای ۴ و ۵ نگاشت در تناظر یک به یک شرح داده شده است. در ریاضیات بجای کلمه «نگاشت»، اسامی دیگری هم بکار می‌برند. در جبر اغلب نگاشت را تابع گویند. در هندسه نگاشت مجموعه نقطه‌ها را بر مجموعه نقطه‌ها تبدیل هم می‌گویند.

۱.۱ مجموعه‌های مرتب

۱. در دفتر کلاس نام فامیل دانش آموزان را بترتیب الفبا نوشته‌اند. به این ترتیب مجموعه دانش آموزان این کلاس مرتب است. در این ترتیب، دانش آموز a قبل از دانش آموز b می‌آید بشرطی که نام فامیل دانش آموز a در دفتر کلاس بالای نام فامیل دانش آموز b نوشته شده باشد. واضح است که اگر دانش آموز a مقدم بر دانش آموز b باشد، دانش آموز b مقدم بر دانش آموز a نیست؛ ازدو دانش آموز a و b یا a مقدم بر b و یا b مقدم بر a است. اگر بدانیم که a مقدم بر b و b مقدم بر c است، در اینصورت a مقدم بر c خواهد بود. می‌توان این خاصیت‌های مجموعه‌های مرتب را در مورد دانش آموزان این کلاس (طبق ثبت نامها در دفتر) به این ترتیب خلاصه کرد:

I. a مقدم بر b است $\iff b$ مقدم بر a نیست.

II. $a \neq b \iff a$ مقدم بر b یا b مقدم بر a است.

III. a مقدم بر b و b مقدم بر c است $\iff a$ مقدم بر c است.

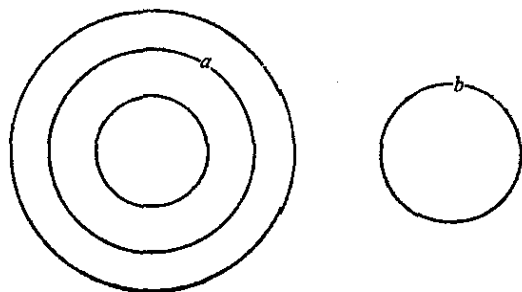
۲. مجموعه همه عددها را می‌توان بترتیب صعودی، یعنی طبق رابطه

«کوچکتر است»، مرتب کرد. طبق این ترتیب، عدد a تنها و تنها وقتی مقدم بر b است که $a < b$. واضح است که شرطهای I، II، III در اینجا هم برقرار است، یعنی:

- I. اگر $a < b$ ، نامساوی $b < a$ نادرست است.
- II. اگر $a \neq b$ ، یا $a < b$ و یا $b < a$.
- III. اگر $a < b$ و $b < c$ ، در اینصورت $a < c$.

۳. مجموعهٔ مساحت‌های دایره‌های واقع بزرگ صفحه را که دارای مرکز مشترک هستند، در نظر می‌گیریم. مساحت دایرهٔ a را مقدم بر مساحت دایرهٔ b می‌گیریم، تنها وقتی که $a \neq b$ و $a \subset b$ باشد. در این حالت هم می‌توان امتحان کرد که شرطهای I، II، III برقرار است.

۴. مجموعهٔ همهٔ مساحت‌های دایره‌های واقع بر صفحه را باهمان شرط مسألهٔ قبل برای ترتیب آنها، در نظر می‌گیریم. بسادگی معلوم می‌شود که شرطهای I و III در اینجا هم برقرار است، ولی شرط II برقرار نیست (مثلاً در شکل ۱۵، $a \neq b$ و a مقدم بر b یا b مقدم بر a نیست، زیرا نه



شکل ۱۵

شرط $a \subset b$ و نه شرط $b \subset a$ برقرار نیست).

در هر يك از مثالهای ۱، ۲، ۳ مجموعه‌ای را کاملاً مرتب کرده‌ایم، به این معنی که هر عضو مجموعه قبل از عضو دیگری از این مجموعه قرار گرفته است؛ ضمناً شرطهای I، II و III هم در مورد آنها برقرار است. در مثال ۴، مجموعهٔ همهٔ دایره‌ها به این وضع مرتب نشده‌اند.

۱۲. مجموعه‌های کاملاً مرتب

گوییم که مجموعه Z کاملاً مرتب است، وقتی که نسبت مقدم بودن يك عضو مجموعه به عضو دیگر آن (نسبت ترتیب) به نحوی باشد که خاصیت‌های زیر برای هر سه عضو a ، b و c از مجموعه Z وجود داشته باشد:

I. خاصیت ناقتارنی

a مقدم است بر $b \iff b$ مقدم بر a نیست.

II. خاصیت تمامیت

$a \neq b \iff a$ مقدم است بر b یا b مقدم است بر a .

III. خاصیت سرایت پذیری

a مقدم است بر b و b مقدم است بر $c \iff a$ مقدم است بر c .

در يك ترتیب مفروض، وقتی که a مقدم بر b باشد، می‌شود گفت که b بعد از a می‌آید. وقتی که a مقدم بر b و b مقدم بر c باشد، گویند b بین a و c در این ترتیب قرار گرفته است. با استدلال ساده‌ای می‌توان ثابت کرد که از سه عضو متمایز يك مجموعه کاملاً مرتب تنها و تنها یکی بین دو عضو دیگر قرار گرفته است.

در مثال ۲ عدد ۱۵۵ عضوی است که بعد از عدد ۳ قرار گرفته است؛ عدد

$\frac{1}{4}$ یکی از عضوهایی است که قبل از عدد ۳ قرار دارد؛ عدد ۲ بین عدد $\frac{1}{4}$ و

عدد ۳ واقع است.

تمرینها

۷۱۳. مجموعه‌هایی را نام ببرید که تنها: a (سه عضو، b) دو عضو، c يك عضو داشته باشند.

۷۱۴. مجموعه‌ای را مشخص کنید. شرطهایی بدهید که برای هر عضو این مجموعه

صادق باشد، و برای هر عنصری که عضو این مجموعه نیست صادق نباشد.

۷۱۵. آیا این مجموعه مشخص است؟

«مجموعه دانش‌آموزان خوب مدرسه ما»،

چه شرطی باید به این بیان اضافه شود تا مجموعه‌ای مشخص بدست

آید؟

۷۱۶. Z را مجموعه عددهای زوج در نظر بگیرید. نوشته‌های زیر را کامل کنید، به نحوی که حکمهای درستی باشند:

$1 \dots Z$ و $100 \dots Z$ و $8 \dots Z$ و $5 \dots Z$ و $2 \dots Z$

۷۱۷. Z مجموعه کتابهای يك کتابخانه و Z' مجموعه کتابهایی از این کتابخانه است که مؤلف آنها آقای x است. نوشته $Z' \dots Z$ را کامل کنید و با تصویر نشان دهید.

۷۱۸. چند زیر مجموعه از مجموعه دانش‌آموزان کلاس خود نام ببرید.

۷۱۹. Z يك مجموعه است؟ آیا درست است $Z \subset Z$ ؟

۷۲۰. اگر $a \in Z$ و $Z \subset Z'$ باشد، نوشته $a \dots Z'$ را کامل کنید. مثالی ذکر کنید و روی تصویر نشان دهید.

۷۲۱. اگر $Z \subset Z'$ و $Z' \subset Z''$ باشد، نوشته $Z \dots Z''$ را کامل کنید؛ مثالی ذکر کنید و روی تصویر نشان دهید.

۷۲۲. همه زیرمجموعه‌های مجموعه D_n را بنویسید. آیا بین این زیرمجموعه‌ها، مجموعه‌هایی به شکل D_n وجود دارد؟ آنها را بنویسید.

۷۲۳. Z مجموعه همه عددهاست. Z' مجموعه همه عددهایی است که می‌توان بدست آورد:

(a) از راه کم کردن عددهای منفی از عددهای مثبت،

(b) از راه کم کردن هر عدد از هر عدد دیگر.

در باره مجموعه‌های Z و Z' چه می‌توان گفت؟

۷۲۴. Z_1 را مجموعه همه حرفهای مختلفی می‌گیریم که در «روشهای جبر» وجود دارد، Z_2 مجموعه همه حرفهای مختلف «جدول ضرب» و Z_3 مجموعه همه حرفهای «دفتر حساب». عضوهای این مجموعه‌ها را نام ببرید:

a) $Z_1 \cup Z_2$; b) $Z_1 \cap Z_2$;

$$c) Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3 ; d) Z_1 \cap Z_2 \cap Z_3$$

۷۲۵. علامت لازم را بگذارید و با ذکر مثال روی تصویر نشان دهید:

$$a) Z \dots Z \cup Z' ; b) (Z \cap Z') \dots Z ;$$

$$c) (Z \cap Z') \dots (Z \cup Z')$$

۷۲۶. آیا می‌توان دو عدد طبیعی m و n را طوری انتخاب کرد که داشته باشیم :

$$D_m \cap D_n = \Phi$$

۷۲۷. N مجموعه همه عددهای صحیح ، N_p مجموعه همه عددهای زوج و N_n مجموعه همه عددهای فرد است. علامتهای افتاده را در هر يك از حالت‌های زیر بنویسید :

$$N_p \dots N ; N_n \dots N ; N_p \cup N_n = \dots ;$$

$$N_n \cup N = \dots ; N_p \cup N = \dots ; N_p \cap N = \dots ;$$

$$N_n \cap N = \dots ; N_p \cap N_n = \dots ; N_p - N_n = \dots ;$$

$$N - N_p = \dots ; N - N_n = \dots ;$$

۷۲۸. با بکار بردن علامتهای لازم نشان بدهید که دو عدد ۱۴ و ۳۹ نسبت به هم اولند.

۷۲۹. عددهای قابل قسمت بر ۴ را در يك مجموعه و عددهای قابل قسمت بر ۸ را در مجموعه دیگری بگیرد. با انتخاب علامتهای لازم نشان دهید هر عددی که بر ۸ قابل قسمت باشد، بر ۴ هم قابل قسمت است.

۷۳۰. مثالهایی ذکر کنید برای:

(a) نگاشت يك مجموعه بر مجموعه دیگر،

(b) نگاشت يك مجموعه بر خود آن مجموعه.

کداميك در تناظر يك به يك هستند؟

۷۳۱. درباره نگاشتهای : (a) مجموعه دایره‌ها ، (b) مجموعه مستطیلها ؛ بر مجموعه عددهای مثبت فکر کنید. آیا این نگاشتها در تناظر يك به يك هستند؟

۷۳۲. درباره نگاشت مجموعه مربعا بر مجموعه نقطه‌ها چه می‌گویید ؟ آیا در تناظر يك به يك هستند؟

۷۳۳. مجموعه عددهای طبیعی را در نظر می‌گیریم. آیا با فرض زیر این مجموعه

کاملاً مرتب است؟

الف) « a مقدم بر b است» به معنای « $a > b$ » باشد.

ب) « a مقدم بر b است» به معنای « a قابل قسمت بر b باشد» (یعنی « b مقسوم‌علیهی از a است»).

۷۳۴. اگر مجموعه کتابها را به این شکل مرتب کنیم، آیا مجموعه کاملاً مرتبی خواهد بود؟

الف) « a مقدم بر b است» به معنای «شماره کتاب a کوچکتر از شماره کتاب b است» باشد (طبق يك فهرست معین).

ب) « a مقدم بر b است» به معنای «سال چاپ کتاب a جلوتر از سال چاپ کتاب b است» باشد.

ج) « a مقدم بر b است» به معنای «قیمت کتاب a بیشتر از قیمت کتاب b است» باشد.

۱. جواب: $(x+z)(y-z)(x+y)$

۲. عبارت داخل کروه اول را به سادگی می توان بصورت زیر درآورد:

$$(ax+by)^2 + (ay+bx)^2$$

و عبارت داخل کروه دوم را به صورت: $(ay+bx)(ax+by)$ حالا اگر عبارت مفروض را A فرض کنیم به ترتیب داریم:

$$\begin{aligned} A &= [(ax+by)^2 + (ay+bx)^2]^2 - 4(ay+bx)^2 \times \\ &\times (ax+by)^2 = [(ax+by)^2 + (ay+bx)^2 - \\ &- 2(ay+bx)(ax+by)][(ax+by)^2 + (ay+bx)^2 + \\ &+ 2(ay+bx)(ax+by)] = [(ax+by) - \\ &- (ay+bx)]^2 [(ax+by) + (ay+bx)]^2 = [(a-b) \times \\ &\times (x-y)]^2 [(a+b)(x+y)]^2 = \\ &= (a-b)^2 (a+b)^2 (x-y)^2 (x+y)^2 \end{aligned}$$

۳. جواب: $(a+2b)(2b-c)(a-c)$

۴. جواب: $(a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)$

۵. جواب: $(x-2z)(y-2z)(x+y)$

۶. روش اول: مجموع $2x^4 + 4x^2 + 2$ را به صورت $2(x^2+1)^2$ بنویسید.

روش دوم: $4x^2$ را به صورت $2x^2 + 2x^2$ بنویسید و سپس با دسته بندی

تجزیه کنید.

جواب: $(x^2+1)(2x^2+x+2)$

۷. عبارت نسبت به xy متقارن است (یعنی با تبدیل x به y و y به x تغییر نمی کند) و چون به ازای $y=x$ برابر صفر است بنابراین بر $(x-y)^2$

قابل قسمت است. همچنین عبارت به ازای $x=-2y$ و بنابراین به ازای

$$x = -\frac{y}{2} \text{ صفر می شود.}$$

جواب: $[(x+2y)(2x+y)(x-y)]^2$

۸. عبارت نسبت به a و b دوری است و به ازای $a=-b$ برابر صفر

می‌شود، بنابراین بصورت زیر درمی‌آید:

$$(a+b+c)^2 - a^2 - b^2 - c^2 = \lambda(a+b)(b+c)(c+a)$$

دو طرف تساوی نسبت به a هم درجه‌اند، بنابراین λ مقدار عددی است. ضریب a^2 در سمت چپ تساوی $3(b+c)$ و در سمت راست تساوی $\lambda(b+c)$ است، پس $\lambda=3$ می‌شود:

$$(a+b+c)^2 - a^2 - b^2 - c^2 = 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

۹. جواب: $(a+b)(b+c)(c+a)$

۱۰. عبارت مفروض نسبت به a و b و c دوری است و چون به ازای $a=b$ صفر می‌شود شامل فاکتور $a-b$ است و داریم:

$$A = (a-b)^5 + (b-c)^5 + (c-a)^5 = M(a-b)(b-c)(c-a)$$

M نسبت به a از درجه دوم است، زیرا سمت چپ تساوی نسبت به a از درجه چهارم و ضریب M در سمت راست تساوی نسبت به a از درجه دوم است. M در حالت کلی باید بصورت زیر باشد:

$$M = \alpha(a^2 + b^2 + c^2) + \beta(ab + bc + ca) + \gamma(a + b + c) + \lambda abc$$

در اینصورت ضریب a^4 در سمت راست تساوی چنین است:

$$-\alpha(b-c)$$

ولی در سمت چپ تساوی جمله‌های شامل a^4 در $(a-b)^5$ به صورت $5a^4b - 5a^4c$ و در $(c-a)^5$ به صورت $5a^4c$ و بنابراین ضریب a^4 مساوی $5(b-c)$ است و بدست می‌آید:

$$\alpha = 5$$

حالا به جستجوی ضریب a^3b^2 در دو طرف تساوی می‌پردازیم:

در سمت چپ تساوی، جمله‌هایی که تنها شامل a و b باشند در $(a-b)^5$ وجود دارند و در اینجا ضریب a^3b^2 برابر است با ۱۰، در سمت راست تساوی در ضریب M جمله‌های شامل a و b یکی بصورت $-a^2b$ و دیگری بصورت $-ab^2$ است که از ضرب اولی در βab و دومی در αa^2 ضریب جمله a^3b^2 بصورت $(\alpha - \beta)$ بدست می‌آید. بنابراین:

$$\alpha - \beta = 10 \Rightarrow 5 - \beta = 10 \Rightarrow \beta = -5$$

در سمت راست تساوی جمله‌ای بصورت $\gamma a^3 b$ وجود دارد، در حالیکه چنین جمله‌ای در سمت چپ تساوی وجود ندارد یعنی: $\gamma = 0$ همچنین در سمت چپ تساوی ترکیبی بصورت $a^m b^n c^p$ نداریم و بنابراین $\lambda = 0$ می‌شود، به این ترتیب داریم:

$$A = \Delta(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

۱۱. عبارت مفروض به ازای $x = -1$ صفر می‌شود و بنابراین می‌توان عامل $x+1$ را در آن بوجود آورد:

$$\begin{aligned} x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 &= \\ &= x^4(x+1) + x^3(x+1) + (x+1) = \\ &= (x+1)(x^4 + x^3 + 1) = \\ &= (x+1)[(x^2+1)^2 - x^2] = \\ &= (x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1) \end{aligned}$$

۱۲. به ترتیب می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} x^4 - x^2 + 7 &= (x^2 + \sqrt{7})^2 - 2x^2\sqrt{7} - x^2 = \\ &= (x^2 + \sqrt{7})^2 - (2\sqrt{7} + 1)x^2 = \\ &= (x^2 + \sqrt{2\sqrt{7}+1}x + \sqrt{7})(x^2 - \sqrt{2\sqrt{7}+1}x + \sqrt{7}) \end{aligned}$$

همچنین می‌توان تجزیه این عبارت را با روش ضریبهای نامعین بدست آورد.

۱۳. به ترتیب داریم:

$$\begin{aligned} x^4 + 4x - 1 &= (x^4 + 2x^2 + 1) - (2x^2 - 4x + 2) = \\ &= (x^2 + 1)^2 - 2(x-1)^2 = \\ &= [x^2 + 1 + \sqrt{2}(x-1)][x^2 + 1 - \sqrt{2}(x-1)] = \\ &= (x^2 + \sqrt{2}x + 1 - \sqrt{2})(x^2 - \sqrt{2}x + 1 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

۱۴. عبارت داخل پرانتز مجموع $n+1$ جمله از یک تصاعد هندسی است و بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} (1+x+x^2+\dots+x^n)^2 - x^n &= \left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)^2 - x^n = \\ &= \frac{(x^{n+1}-1)^2 - x^n(x-1)^2}{(x-1)^2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x^{2n+2} - 2x^{n+1} + 1 - x^{n+2} + 2x^{n+1} - x^n}{(x-1)^2} = \\
 &= \frac{(x^{2n+2} - x^n) - (x^{n+2} - 1)}{(x-1)^2} = \frac{(x^n - 1)(x^{n+2} - 1)}{(x-1)^2} =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{x^{n+2} - 1}{x-1} \times \frac{x^n - 1}{x-1} =$$

$$= (x^{n+1} + x^n + \dots + x + 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$$

۱۵. با استفاده از معکوسه بودن عبارت، آنرا تجزیه کنید.

$$(x^2 + x + 1)(2x^2 - x + 2) \quad \text{جواب:}$$

۱۶. اگر جذر عبارت را بدست آوریم، حاصل جذر $x^2 + x^2 + x + 11$

و باقیمانده جذر مساوی ۱۰۰- می‌شود و بنابراین داریم:

$$A = x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 24x^3 + 23x^2 + 22x + 21 =$$

$$= (x^2 + x^2 + x + 11)^2 - 100 =$$

$$= (x^2 + x^2 + x + 11)(x^2 + x^2 + x + 21)$$

پراقتزاول به ازای $x = -1$ و پراقتز دوم به ازای $x = -3$ مساوی صفر

می‌شود، بنابراین دراولی عامل $x+1$ و در دومی عامل $x+3$ وجود دارد،

به این ترتیب:

$$A = [x^2(x+1) + (x+1)] \times$$

$$\times [x^2(x+3) - 2x(x+3) + 7(x+3)] =$$

$$= (x+1)(x+3)(x^2+1)(x^2-2x+7)$$

۱۷. جواب:

$$[x^2 + x\sqrt{6(\sqrt{2}-1)} + 2\sqrt{2}][x^2 - x\sqrt{6(\sqrt{2}-1)} + 2\sqrt{2}]$$

۱۸. پراقتزها را باز کنید و از رابطه مربوط به مجذور سه جمله‌ای استفاده

کنید:

جواب:

$$(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)$$

۱۹. بترتیب داریم:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz =$$

$$\begin{aligned}
 &= (x+y)^2 - 3xy(x+y) + z^2 - 3xyz = \\
 &= [(x+y)^2 + z^2] - 3xy(x+y+z) = \\
 &= (x+y+z)[(x+y)^2 - z(x+y) + z^2] - \\
 &\quad - 3xy(x+y+z) = \\
 &= (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)
 \end{aligned}$$

۲۰. اگر فرض کنید:

$$a^2 - bc = x ; b^2 - ac = y ; c^2 - ab = z$$

به مسأله شماره ۱۹ تبدیل می شود.

$$(a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)^2 \quad \text{جواب:}$$

۲۱. عبارت نسبت به x و y و z دوری است و به ازای $x = -y$ برابر صفر می شود، بنابراین بر $x+y$ و تبدیلهای دوری آن $y+z$ و $z+x$ قابل قسمت است و داریم:

$$(x+y+z)^5 - x^5 - y^5 - z^5 = M(x+y)(y+z)(z+x) \quad (۱)$$

سمت چپ تساوی نسبت به x و y و z متجانس و متقارن و ضمناً از درجه پنجم است، از طرف دیگر عبارت $(x+y)(y+z)(z+x)$ هم متجانس و متقارن و از درجه سوم است (نسبت به xyz).

بنابراین M باید نسبت به xyz عبارتی متقارن و متجانس و از درجه دوم باشد، یعنی داشته باشیم:

$$M = A(x^2 + y^2 + z^2) + B(xy + yz + zx)$$

به این ترتیب اتحاد (۱) بصورت زیر در می آید:

$$(x+y+z)^5 - x^5 - y^5 - z^5 = (x+y)(y+z)(z+x) \times$$

$$(۲) \quad \times [A(x^2 + y^2 + z^2) + B(xy + yz + zx)]$$

اتحاد (۲) باید به ازای همه مقادیر x و y و z برقرار باشد. فرض می کنیم $x=y=z=۱$ بدست می آید:

$$۲۴۰ = ۸(۳A + ۳B) \Rightarrow A + B = ۱۰$$

و حالا اگر مثلاً فرض کنیم $x=y=۱$ و $z=۰$ بدست می آید:

$$۳۰ = ۲(۲A + B) \Rightarrow ۲A + B = ۱۵$$

و از آنجا مقادیر A و B محاسبه می‌شود :

$$A = B = 5$$

و در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} (x+y+z)^5 - x^5 - y^5 - z^5 &= \\ &= 5(x+y)(y+z)(z+x)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx) \end{aligned}$$

۴۲. اگر عبارت را مساوی A فرض کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} A &= a^{5n} - a^{2n} + a^{2n} + a^n + 1 = \\ &= a^{2n}(a^{3n} - 1) + (a^{2n} + a^n + 1) = \\ &= a^{2n}(a^n - 1)(a^{2n} + a^n + 1) + (a^{2n} + a^n + 1) = \\ &= (a^{2n} + a^n + 1)(a^{3n} - a^{2n} + 1) \end{aligned}$$

۴۳. به ترتیب داریم:

$$\begin{aligned} (x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15 &= \\ &= (x^2+4x+3)(x^2+4x+15)+15 = \\ &= (x^2+4x)^2+22(x^2+4x)+120 = \\ &= [(x^2+4x)+11]^2-1 = \\ &= (x^2+4x+12)(x^2+4x+10) = \\ &= (x+2)(x+6)(x+4+\sqrt{6})(x+4-\sqrt{6}) \end{aligned}$$

۴۴. جواب: $(x-y)(a-x)(a-y)(x+y+a)$

۴۵. جواب: $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$

۴۶. جواب: $(y+z)(2x-y)(2x+z)(2x+y-z)$

۴۷. عبارت مفروض نسبت به x و y و z متقارن است (یعنی با تبدیل هر دو مجهول دلخواه آن به یکدیگر تغییر نمی‌کند) و در عین حال به ازای $x = -y$ برابر صفر می‌شود و بنابراین به سادگی بصورت زیر در می‌آید :

$$\begin{aligned} x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 + 2xyz &= \\ &= (x+y)(y+z)(z+x) \end{aligned}$$

۴۸. به ترتیب می‌توان نوشت (عبارت را A فرض کرده‌ایم):

$$\begin{aligned}
 A &= (x^2y + xy^2 + xyz) + \\
 &+ (x^2z + xz^2 + xyz) + (y^2z + yz^2 + xyz) = \\
 &= xy(x+y+z) + xz(x+y+z) + yz(x+y+z) = \\
 &= (x+y+z)(xy+yz+zx)
 \end{aligned}$$

۲۹. مجموع ضریبهای عبارت برابر صفر است و بنابراین بر $x-1$ قابل قسمت است.

$$\text{جواب: } (x-1)(x+3)^2$$

$$\text{۳۰. جواب: } (x-1)(x+3)(x+7)$$

۳۱. عامل x را کنار بگذارید و نتیجه را به ضرب دو عامل مزدوج تجزیه کنید.

$$\text{جواب: } x(x+1)(x-1)(x-3)(x+2)(x+3)(x-2)$$

$$\text{۳۲. جواب: } 3(y^2+z^2)(x^2+y^2)(x-z)(x+z)$$

۳۳. عبارت مفروض نسبت به xy و yz دوری و به ازای $x=y$ صفر می شود، یعنی می توان آنرا بصورت زیر نوشت:

$$\lambda(x-y)(y-z)(z-x)$$

λ نسبت به x و y و z باید از درجه اول باشد، یعنی:

$$\lambda = A(x+y+z)$$

و به سادگی $A = -1$ بدست می آید.

$$\text{جواب: } -(x+y+z)(x-y)(y-z)(z-x)$$

$$\text{۳۴. جواب: } (x^2-y)(y^2-z)(z^2-x)$$

۳۵. به ترتیب داریم:

$$\begin{aligned}
 x^4 + 2x^2 \cos \alpha + 1 &= x^4 + 2x^2 \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) + 1 = \\
 &= (x^4 + 2x^2 + 1) - 4x^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = (x^2 + 1)^2 - 4x^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \\
 &= (x^2 + 2x \sin \frac{\alpha}{2} + 1)(x^2 - 2x \sin \frac{\alpha}{2} + 1)
 \end{aligned}$$

۳۶. (۱) عدد $(2a+1)^2 - 1$ بعد از تجزیه به صورت $4a(a+1)$ درمی آید

وروشن است که $a(a+1)$ (یعنی حاصلضرب دو عدد متوالی) عددی است زوج.

(۲) $a^2 - a$ به صورت $a(a-1)$ در می‌آید و حاصلضرب سه عدد متوالی هم زوج است و هم قابل قسمت بر ۳.

(۳) در عبارت $a^2 + 5a$ که به صورت $a(a+5)$ در می‌آید، اگر a فرد باشد $a^2 + 5a$ زوج است و بنابراین حاصلضرب آنها حتماً عددی است زوج. از طرف دیگر اگر a قابل قسمت بر ۳ نباشد، باقیمانده تقسیم a^2 بر ۳ مساوی ۱ می‌شود و $a^2 + 5a$ بر ۳ قابل قسمت می‌شود.

(۳۷) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ دارای دو عامل زوج است و بنابراین حاصلضرب این دو عامل بر ۴ قابل قسمت است. بنابراین اگر دو عدد زوج متوالی هم نباشند اشکالی ندارد.

(۲) دو عدد را $a = 2k - 1$ و $b = 2k + 1$ می‌گیریم، داریم:

$$b^2 - a^2 = (2k+1)^2 - (2k-1)^2 = 8k$$

(۳) اگر عدد صحیح x بر ۲ و ۳ قابل قسمت نباشد، می‌توان آنرا به صورت $x = 6k \pm 1$ نوشت، بنابراین:

$$x^2 = 36k^2 \pm 12k + 1 \quad \text{و}$$

$$x^2 - 1 = 12(3k^2 \pm k) = 12[2k^2 + k(k \pm 1)] = 24N$$

اگر y هم بر ۲ و ۳ قابل قسمت نباشد داریم: $y^2 - 1 = 24M$ و از آنجا:

$$x^2 - y^2 = (x^2 - 1) - (y^2 - 1) = 24(N - M) = 24P$$

۳۸. عبارت $n^4 + 7(2n^2 + 7)$ به صورت $(n^2 + 7)^2$ در می‌آید، بنابراین باید ثابت کرد که $n^2 + 7$ بر ۸ قابل قسمت است. داریم $n = 2k + 1$ می‌گیریم):

$$\begin{aligned} n^2 + 7 &= (2k+1)^2 + 7 = 4(k^2 + k + 2) = \\ &= 4[k(k+1) + 2] = 8M \end{aligned}$$

۳۹. به سادگی معلوم می‌شود که اگر $A = 5x + 2y$ و $B = 9x + 7y$ باشد، داریم:

$$7A - 2B = 17x$$

و از آنجا معلوم است که اگر A بر ۱۷ قابل قسمت باشد، B هم بر ۱۷ قابل قسمت است.

۴۰. از تساوی شرط مسأله بدست می‌آید:

$$a^2 = (a-c)^2 + 2b(a-c)$$

$$b^2 = (b-c)^2 + 2a(b-c)$$

و بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + (a-c)^2}{b^2 + (b-c)^2} &= \frac{2(a-c)^2 + 2b(a-c)}{2(b-c)^2 + 2a(b-c)} = \\ &= \frac{(a-c)(a+b-c)}{(b-c)(a+b-c)} = \frac{a-c}{b-c} \end{aligned}$$

۴۱. جواب:

$$f(0) = 1; f(-x) = \frac{1+x}{1-x}; f(x+1) = \frac{-x}{x+2};$$

$$f(x)+1 = \frac{2}{1+x}; f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x-1}{x+1}; \frac{1}{f(x)} = \frac{1+x}{1-x}$$

۴۲. جواب:

$$a) a; \quad b) 2x+h; \quad c) a^x \frac{a^h-1}{h}$$

۴۳. جواب:

$$a) f(x)=0 \Rightarrow x=-1, x=0; x=1$$

$$f(x)>0 \Rightarrow x<-1, 0<x<1$$

$$f(x)<0 \Rightarrow -1<x<0, x>1$$

$$b) f(x)=0 \Rightarrow x=\pm \frac{1}{k}$$

$$f(x)>0 \Rightarrow \frac{1}{2k+1} < x < \frac{1}{2k},$$

$$-\frac{1}{2k+1} < x < -\frac{1}{2k} \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

$$f(x) < 0 \Rightarrow \frac{1}{2k+2} < x < \frac{1}{2k+1},$$

$$-\frac{1}{2k} < x < -\frac{1}{2k+1} \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

$$c) f(x) = 0 \Rightarrow x = 1, \quad x < 0$$

$$f(x) > 0 \Rightarrow 0 < x < 1$$

$$f(x) < 0 \Rightarrow x > 1$$

$$f(x) = \frac{y}{x} - 2 \quad \text{۴۵. جواب:}$$

$$f(x) = 10 + 5 \times 2^x \quad \text{۴۶. جواب:}$$

۴۹. داریم:

$$\begin{aligned} f(x+y) + f(x-y) &= \frac{1}{y} \left[a^{x+y} + a^{-(x+y)} \right] + \\ &\quad + \frac{1}{y} \left[a^{x-y} + a^{-(x-y)} \right] = \\ &= \frac{1}{y} \left[a^x (a^y + a^{-y}) + a^{-y} (a^y + a^{-y}) \right] = \end{aligned}$$

$$= 2 \times \frac{1}{y} (a^x + a^{-x}) \times \frac{1}{y} (a^y + a^{-y}) = 2f(x)f(y)$$

۵۰. داریم:

$$a) f(x) + f(y) = ax + ay = a(x+y) = f(x+y);$$

$$f(z) = f(x+y) \Rightarrow z = x+y$$

$$b) f(x) + f(y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} = f\left(\frac{xy}{x+y}\right)$$

$$f\left(\frac{xy}{x+y}\right) = f(z) \Rightarrow z = \frac{xy}{x+y}$$

$$c) f(x) + f(y) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y;$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \alpha \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y) = \frac{x+y}{1-xy};$$

$$\alpha = \arctg x + \arctg y = \arctg \frac{x+y}{1-xy};$$

$$z = \frac{x+y}{1-xy}$$

$$d) f(x) + f(y) = \log \frac{1+x}{1-x} + \log \frac{1+y}{1-y} =$$

$$= \log \frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)} = \log \frac{(1+xy) + (x+y)}{(1+xy) - (x+y)} =$$

$$= \log \frac{1 + \frac{x+y}{1+xy}}{1 - \frac{x+y}{1+xy}} = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right);$$

$$f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) = f(z) \implies z = \frac{x+y}{1+xy}$$

$$51. \text{ جواب: } fff(x) = x, ff(x) = \frac{x-1}{x}$$

52. جواب را به طریق استقراء ریاضی بدست می آوریم:

$$f_r(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{1+[f(x)]^2}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}};$$

$$f_r(x) = \frac{f_r(x)}{\sqrt{1+[f_r(x)]^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}};$$

احتمالا باید داشته باشیم:

$$f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}} \quad (1)$$

اگر این رابطه صحیح باشد، باید $f_{n+1}(x)$ هم از همین قاعده پیروی کند:

(1) به بخش مربوط به استقراء ریاضی مراجعه کنید.

$$f_{n+1}(x) = \frac{f_n(x)}{\sqrt{1+[f_n(x)]^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+(n+1)x^2}}$$

و بنابراین رابطه (۱) صحیح است.

$$f(x) = x^2 - 5x + 7 \quad \text{.۵۳ جواب:}$$

.۵۴ می‌توان نوشت:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2 \quad (|x| \geq 2)$$

توضیح. $|x + \frac{1}{x}| \geq 2$ است و بنابراین تابع f وقتی معین است که قدر

مطلق متغیر آن از ۲ کوچکتر نباشد.

$$f(x) = \frac{1}{x}(1 + \sqrt{1+x^2}) \quad \text{.۵۵ جواب:}$$

$$f(x) = x^2 - x + 1 \quad \text{.۵۶ جواب:}$$

.۵۷ داریم:

$$\begin{aligned} f(ax) &= (ax+a)(ax+a^2)\dots(ax+a^n) = \\ &= a^n(x+1)(x+a)(x+a^2)\dots(x+a^{n-1}) = \\ &= \frac{a^n(x+1)}{x+a^n} f(x) \end{aligned}$$

و از آنجا:

$$a) f(2x^2-1) = \log(2x^2-1 + \sqrt{(2x^2-1)^2-1}) = \quad \text{.۵۸}$$

$$= \log(2x^2-1 + 2x\sqrt{x^2-1}) = \log(x + \sqrt{x^2-1})^2 =$$

$$= 2\log(x + \sqrt{x^2-1}) = 2f(x)$$

$$b) f(4x^3-3x) = \log(4x^3-3x + \sqrt{(4x^3-3x)^2-1}) =$$

$$= \log(4x^3-3x + \sqrt{(x^2-1)(4x^2-1)}) =$$

$$= \log(4x^3-3x + (4x^2-1)\sqrt{x^2-1}) =$$

$$= \log(x + \sqrt{x^2-1})^3 = 3\log(x + \sqrt{x^2-1}) = 3f(x)$$

.۵۹ شبیه تمرین ۵۸ عمل کنید.

.۶۰ یک رادیان از ۴۵ درجه بزرگتر است و بنابراین انتهای کمان یک رادیان

در نیمه دوم ربع اول قرار می‌گیرد و بنابراین سینوس آن از کسینوس

آن بزرگتر است یعنی:

$$f(1) = \sin 1 - \cos 1 > 0$$

۶۱. با روش استقرای ریاضی و شبیه تمرین ۵۲ حل کنید.

۶۲. اگر در دوطرف معادله، x را به $x+1$ تبدیل کنیم، می‌شود:

$$af(x) + bf(-x) = c(x+1) \quad (1)$$

همچنین اگر x را به $1-x$ تبدیل کنیم، می‌شود:

$$af(-x) + bf(x) = c(1-x) \quad (2)$$

از حل دستگاه معادله‌های (۱) و (۲)، $f(x)$ و $f(-x)$ بدست می‌آید:

$$f(x) = \frac{c}{a-b}x + \frac{c}{a+b} \quad (a^2 \neq b^2)$$

اگر $a^2 = b^2$ و $c \neq 0$ باشد، $f(x)$ وجود ندارد.

اگر $a = b$ و $c = 0$ باشد، $f(x)$ می‌تواند تابع دلخواهی با توانهای فرد باشد.

و بالاخره اگر $a = -b$ و $c = 0$ باشد، $f(x)$ تابع دلخواهی با توانهای زوج است.

۶۳. با توجه به فرض مسأله بترتیب داریم.

$$f(2) = f(1) + a^1$$

$$f(3) = f(2) + a^2$$

$$f(4) = f(3) + a^3$$

$$f(n) = f(n-1) + a^n$$

از جمع این روابطها خواهیم داشت:

$$f(n) = 1 + a^1 + a^2 + \dots + a^n$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$f(n) = \begin{cases} 1 + \frac{a^1(a^{n-1}-1)}{a-1} & (a \neq 1) \\ n & (a = 1) \end{cases}$$

۶۴. می‌توان نوشت:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 + (1-x) & ; x \leq -3 \\ 2 - 2x - x^2 + (1-x) & ; -3 < x < 1 \\ x^2 + 2x - 3 + (x-1) & ; x > 1 \end{cases}$$

به سادگی دیده می‌شود که تابع $y = x^2 + 2x - 3$ به ازای $-3 < x < 1$ منفی و به ازای سایر مقادیر x غیر منفی است، تابع $y = x - 1$ به ازای $x > 1$ غیرمنفی و به ازای $x < 1$ منفی است و بنابراین خواهیم داشت:

$$f(x) = |x^2 + 2x - 3| + |x - 1|$$

۶۵. اولاً اگر $x - 1 = t$ فرض کنیم، $x = t + 1$ می‌شود و خواهیم داشت:

$$f(x) = \varphi(t) = 6(t+1)^4 + 19(t+1)^3 - 17(t+1)^2 - 72(t+1) - 36 = 6t^4 + 43t^3 + 76t^2 - 25t - 100$$

و اگر بجای t مقدارش $x - 1$ را قرار دهیم، بدست می‌آید:

$$\varphi(x-1) = 6(x-1)^4 + 43(x-1)^3 + 76(x-1)^2 - 25(x-1) - 100$$

و بدین ترتیب $f(x)$ بر حسب توانهای نزولی $(x-1)$ منظم شد.ثانیاً) برای حل معادله $f(x) = 0$ ، ابتدا معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$6t^4 + 43t^3 + 76t^2 - 25t - 100 = 0$$

مجموع ضریبهای عددی در چند جمله‌ای سمت چپ تساوی برابر صفر است،

بنابراین معادله ریشه $t = 1$ را قبول دارد که با توجه به رابطه $x = t + 1$ ،معادله $f(x) = 0$ ، جواب $x = 2$ را خواهد داشت؛ به این ترتیب $f(x)$

به سادگی به صورت زیر در می‌آید:

$$f(x) = (x-2)(6x^3 + 31x^2 + 45x + 18)$$

چند جمله‌ای داخل پرانتز هم به ازای $x = -3$ صفر می‌شود و بنابراینعامل $x + 3$ در آن وجود دارد و بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-2)(x+3)(6x^2 + 13x + 6) = \\ &= (x-2)(x+3)(3x+2)(2x+3) \end{aligned}$$

و جوابهای معادله $f(x) = 0$ چنین است:

$$x_1 = 2 ; x_2 = -3 ; x_3 = -\frac{2}{3} ; x_4 = -\frac{3}{2}$$

۶۶. باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $x-a$ برابر است با $f(a)$ و بنابراین

$$f(x) - f(a) \text{ بر } x-a \text{ قابل قسمت است و یکی از ریشه‌های معادله } f(x) = f(a) \text{ برابر است با } x=a.$$

۶۷. اگر در رابطه مفروض a و b را به یکدیگر تبدیل کنیم، بدست می‌آید:

$$f(ba) = [f(b)]^a$$

که با مقایسه با رابطه فرض، خواهیم داشت:

$$[f(a)]^b = [f(b)]^a$$

از دو طرف این تساوی در مبنای a ، لگاریتم می‌گیریم:

$$b \log_a f(a) = a \log_a f(b)$$

که می‌توان آنرا بصورت زیر نوشت:

$$\frac{\log_a f(a)}{a} = \frac{\log_a f(b)}{b}$$

سمت چپ تساوی تابعی از a و سمت راست تابعی از b است و بنابراین

تنها وقتی می‌توانند مساوی باشند که هر دو طرف برابر مقدار ثابتی شوند، یعنی:

$$\frac{\log_a f(a)}{a} = p ; \log_a f(a) = ap ;$$

$$f(a) = a^{pa} \Rightarrow f(x) = a^{px}$$

که اگر $a^p = \beta$ فرض شود، خواهیم داشت:

$$f(x) = \beta^x$$

یعنی هر تابع مجهول القوه دارای خاصیت مورد نظر مساله است.

$$۶۸. \text{ جواب: } f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

$$۶۹. \text{ جواب: } ۲۴۳$$

$$۷۰. \text{ برای محاسبه مجموع ضریبها در بسط دوجمله‌ای } \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^n$$

باید $f(1)$ را محاسبه کرد:

$$f(1) = 2^n$$

و برای محاسبهٔ مجموع ضریبها در بسط دوجمله‌ای $\varphi(a, b) = (a+b)^{2n}$ باید $\varphi(1, 1)$ را محاسبه کرد:

$$\varphi(1, 1) = 2^{2n}$$

و بنابراین معادلهٔ زیر را خواهیم داشت:

$$2^{2n} - 2^n = 240 \Rightarrow (2^n)^2 - 2^n - 240 = 0 ;$$

$$2^n = \frac{1 \pm 31}{2} = -15 \text{ و } 16$$

جواب ۱۵ - قابل قبول نیست، زیرا وقتی که n عدد حقیقی است 2^n عددی مثبت است. پس:

$$2^n = 16 = 2^4 \Rightarrow n = 4$$

حالا می‌توان بسط دو جمله‌ای اول را بدست آورد:

$$\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4 = x\sqrt[3]{x} + 4\sqrt[3]{x} + \frac{6}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$$

۲۱. داریم:

$$\begin{aligned} f(\alpha+x) \cdot f(\alpha-x) &= \frac{(4-\alpha-x)(4-\alpha+x)}{(2\alpha+2x-4)(2\alpha-2x-4)} = \\ &= \frac{(4-\alpha)^2 - x^2}{(2\alpha-4)^2 - 4x^2} \end{aligned}$$

می‌خواهیم این کسر برابر با مقداری ثابت شود، باید داشته باشیم:

$$\frac{(4-\alpha)^2 - x^2}{(2\alpha-4)^2 - 4x^2} = k$$

و یا:

$$(4k-1)x^2 - (4k-1)\alpha^2 + [8\alpha(2k-1) - 16(k-1)] = 0$$

و از آنجا:

$$\begin{cases} 4k-1=0 \\ 8\alpha(2k-1) - 16(k-1)=0 \end{cases}$$

از حل این دستگاه مقادیر k و α بدست می‌آید:

$$k = \frac{1}{4} ; \alpha = 3$$

$$f(c)=c , f(b)=b , f(a)=a : \text{۷۲. (اولا)}$$

ثانیاً) با توجه به نتیجهٔ بالا روشن است که عبارت $f(x) - x$ به ازای مقادیر $x=a$ و $x=b$ و $x=c$ برابر صفر می‌شود، ولی چون این عبارت نسبت به x از درجهٔ دوم است، متحد با صفر خواهد بود، یعنی: $f(x)=x$ ۷۳. در رابطهٔ مفروض x را به $-x$ تبدیل می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$f(x^n) + af(-x^n) = -bx$$

از این رابطه و رابطهٔ فرض، می‌توان $f(x^n)$ را بدست آورد:

$$f(x^n) = \frac{bx}{a-1}$$

واز آنجا:

$$f(x) = \frac{b}{a-1} \sqrt[n]{x}$$

$$۷۴. \text{اولا دو ریشهٔ معادلهٔ } f(x) = f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \text{ از معادلهٔ } x = \frac{x+1}{x-1} \text{ بدست}$$

$$\text{می‌آید، یعنی } x_1 = 4 \text{ و } x_2 = -2.$$

ثانیاً به ترتیب داریم:

$$x^2 - 12x + 3 = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 - 12\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + 3 ;$$

$$\left(x - \frac{x+1}{x-1}\right)\left(x + \frac{x+1}{x-1}\right) - 12\left(x - \frac{x+1}{x-1}\right) = 0 ;$$

$$\left(x - \frac{x+1}{x-1}\right)\left(x + \frac{x+1}{x-1} - 12\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = 4 , x_2 = -2 , x_3 = 2 , x_4 = 10$$

۷۵. با توجه به مثبت بودن x داریم:

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \Rightarrow f(x) = \sqrt{1 + x^2}$$

$$۷۶. \text{با توجه به فرض مسأله باید به ازای } y=1 \text{ داشته باشیم } z=x. \text{ به ازای}$$

$$y=1 \text{ داریم:}$$

$$z = 1 + f(\sqrt{x} - 1) \Rightarrow f(\sqrt{x} - 1) = z - 1 = \\ = (\sqrt{x} - 1)^2 + 2(\sqrt{x} - 1)$$

و از آنجا:

$$f(x) = x^2 + 2x ; z = \sqrt{y} + x - 1$$

$$z = 2y + (x - y)^2 \text{ و } f(x) = x^2 - x \quad : \text{جواب ۷۷}$$

۷۸. بترتیب داریم:

$$f(x+y, \frac{y}{x}) = x^2 - y^2 = (x+y)^2 \times \frac{x^2 - y^2}{(x+y)^2} =$$

$$= (x+y)^2 \times \frac{x-y}{x+y} = (x+y)^2 \times \frac{1 - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x}}$$

و از آنجا:

$$f(x, y) = x^2 \times \frac{1-y}{1+y}$$

۷۹. از تساوی مفروض داریم:

$$F_{n+1}(x) = F_n(x) - F_n(x+1) \quad (۱)$$

چون $F_1(x) = \cos x$ ، پس $F_1(x+1) = \cos(x+1)$. از رابطه (۱) به ازای $n=1$ بدست می‌آید:

$$F_2(x) = \cos x - \cos(x+1) \text{ و}$$

$$F_2(x+1) = \cos(x+1) - \cos(x+2)$$

این دو رابطه را از هم کم می‌کنیم، با توجه به اینکه $F_2(x) - F_2(x+1)$ مساوی $F_3(x)$ می‌شود (رابطه (۱) را در نظر بگیرید) بدست می‌آید:

$$F_3(x) = \cos x - 2\cos(x+1) + \cos(x+2)$$

بهین ترتیب بدست می‌آید:

$$F_4(x) = \cos x - 3\cos(x+1) + 3\cos(x+2) - \cos(x+3)$$

می‌توان احتمال داد که^۱.

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \cos x - c_{n-1}^1 \cos(x+1) + c_{n-1}^2 \cos(x+2) - \\ &- c_{n-1}^3 \cos(x+3) + \dots + (-1)^{n-1} c_{n-1}^{n-1} \cos(x+n-1) = \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} c_{n-1}^{k-1} \cos(x+k-1) \quad (2) \end{aligned}$$

با روش اسقراء ریاضی صحت این رابطه را ثابت می‌کنیم.

فرض می‌کنیم رابطه (۲) صحیح باشد، در اینصورت :

$$\begin{aligned} F_n(x+1) &= \cos(x+1) - c_{n-1}^1 \cos(x+2) + \\ &+ c_{n-1}^2 \cos(x+3) - c_{n-1}^3 \cos(x+4) + \dots + \\ &+ (-1)^{n-1} c_{n-1}^{n-1} \cos(x+n) \quad (3) \end{aligned}$$

۱- ضریبها در سمت راست تساوی مربوط به $F_n(x)$ همان ضریبهای

بسط $(a-b)^n$ هستند:

$$\begin{aligned} (a-b)^n &= a^n - c_{n-1}^1 a^{n-1} b + c_{n-1}^2 a^{n-2} b^2 - c_{n-1}^3 a^{n-3} b^3 + \\ &+ \dots + (-1)^{n-1} c_{n-1}^{n-1} b^n \end{aligned}$$

منظور از c_n^k عبارتست از $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ ، مثلا

$$c_7^3 = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2} = 35$$

از طرف دیگر داریم:

$$\begin{aligned} c_n^k + c_n^{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \\ &= \frac{n![(n-k+1)+k]}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = c_{n+1}^k \end{aligned}$$

و بنابراین مثلا خواهیم داشت:

$$c_{n-1}^1 + 1 = c_n^1 \quad \text{و} \quad c_{n-1}^2 + c_{n-1}^1 = c_n^2 \quad \text{و}$$

$$c_{n-1}^3 + c_{n-1}^2 = c_n^3 \quad \text{و} \dots$$

رابطه (۳) را از رابطه (۲) کم می‌کنیم، با توجه به رابطه (۱) بدست می‌آید:

$$F_{n+1}(x) = \cos x - (c_{n-1}^1 + 1)\cos(x+1) + (c_{n-1}^2 + c_{n-1}^1)\cos(x+2) - (c_{n-1}^3 + c_{n-1}^2)\cos(x+3) + \dots + (-1)^{n-1}c_{n-1}^n\cos(x+n)$$

ولی $c_{n-1}^2 + c_{n-1}^1 = c_n^2$ ، $c_{n-1}^3 + c_{n-1}^2 = c_n^3$ ، $c_{n-1}^1 + 1 = c_n^1$... (پاورقی صفحه ۳۹۴ را ببینید)، بنابراین:

$$F_{n+1}(x) = \cos x - c_n^1\cos(x+1) + c_n^2\cos(x+2) - c_n^3\cos(x+3) + \dots + (-1)^n c_n^n\cos(x+n)$$

به این ترتیب اگر تساوی (۲) برای n صحیح باشد برای $n+1$ هم صحیح است: ولی به ازای $1, 2, 3$ n این تساوی صحیح بود، بنابراین تساوی (۲) برای هر مقدار طبیعی n صحیح است.

تساوی (۲) را، که همان تابع مورد نظر است، می‌توان به این ترتیب

نشان داد:

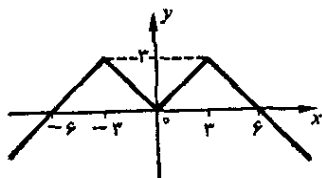
$$F_n(x) = \begin{cases} -\gamma^{n-1} \left(\sin \frac{1}{\gamma}\right)^{n-1} \cdot \sin\left(x + \frac{n-1}{\gamma}\right) & (n=4k) \\ \gamma^{n-1} \left(\sin \frac{1}{\gamma}\right)^{n-1} \cdot \cos\left(x + \frac{n-1}{\gamma}\right) & (n=4k+1) \\ \gamma^{n-1} \left(\sin \frac{1}{\gamma}\right)^{n-1} \cdot \sin\left(x + \frac{n-1}{\gamma}\right) & (n=4k+2) \\ -\gamma^{n-1} \left(\sin \frac{1}{\gamma}\right)^{n-1} \cdot \cos\left(x + \frac{n-1}{\gamma}\right) & (n=4k+3) \end{cases}$$

۸۵. اولاً تابع $f(x)$ را می‌توان به صورت $f(x) = 3 - |x|$ نوشت. ثانیاً

داریم:

$$y = ff(x) = 3 - |f(x)| = 3 - |3 - |x|| ;$$

$$\begin{aligned} x < -3, & \quad y = 6 + x \\ -3 < x < 0 & \quad y = -x \\ 0 < x < 3 & \quad y = x \\ x > 3 & \quad y = 6 - x \end{aligned}$$



شکل ۱۶

۸۱. چون داریم:

$$\left| \frac{x}{x^2 + 1} \right| = \frac{1}{\left| x + \frac{1}{x} \right|} < \frac{1}{2}$$

بنابراین تابع f وقتی ممین است که متغیر آن در فاصله $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

باشد. از طرف دیگر اگر $\frac{x}{x^2 + 1} = t$ بگیریم، به سادگی معلوم می‌شود

که $f(z) = \frac{1}{z^2} - 2$ است. در نتیجه:

$$f(z) = \frac{1}{z^2} - 2 \quad |z| < \frac{1}{2}$$

در حالت $|z| > \frac{1}{2}$ می‌توان $f(z)$ را مساوی هر تابع دلخواهی از z گرفت.

۸۲. باید داشته باشیم:

$$f(1) = f(2) = 0$$

و از آنجاستگاه دو معادله دو مجهولی زیر را برای m و n بدست خواهیم آورد:

$$\begin{cases} 7m - 14 = 0 \\ 32m + 20n - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 2; n = -3$$

۸۳. روش اول: برای اینکه عبارتی بر عبارت دیگر قابل قسمت باشد، باید

باقیمانده تقسیم متحد با صفر شود. در تقسیم $x^4 - 3x^2 + ax + b$ بر

$x^2 - 2x + 4$ باقیمانده‌ای مساوی $(a-8)x + b + 24$ خواهیم داشت:

$$(a-8)x + (b+24) \equiv 0 \Rightarrow a=8; b=-24$$

روش دوم: از روش ضریبهای نامعین استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم:

$$x^4 - 3x^2 + ax + b \equiv (x^2 - 2x + 4)(x^2 + mx + n)$$

و از آنجا به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} m - 2 = -3 \\ n - 2m + 4 = 0 \\ 4m - 2n = a \\ 4n = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = -6 \\ a = 8 \\ b = -24 \end{cases}$$

روش ضریبهای نامعین، علاوه بر شرط قابلیت تقسیم، مقدار خارج قسمت را هم بدست می‌دهد:

$$Q = x^2 - x - 6$$

روش سوم: از ریشه‌های موهومی مقسوم‌علیه استفاده می‌کنیم.

$$x^2 - 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm i\sqrt{3}$$

کافی است که مقسوم به ازای یکی از این ریشه‌ها صفر باشد، تا بر

$x^2 - 2x + 4$ قابل‌قسمت شود. مقسوم را $f(x)$ می‌گیریم:

$$f(1 + i\sqrt{3}) = (1 + i\sqrt{3})^4 - 2(1 + i\sqrt{3})^2 + a(1 + i\sqrt{3}) + b = 0$$

و یا:

$$(a + b + 16) + \sqrt{3}(a - 8)i = 0$$

و از آنجا:

$$\begin{cases} a + b + 16 = 0 \\ a - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = -24 \end{cases}$$

۸۴. برای اینکه $f(x)$ بر $(x-1)^2$ قابل‌قسمت باشد، باید داشته باشیم:

$$f(1) = f'(1) = 0$$

که به سادگی تحقیق می‌شود.

برای محاسبه خارج‌قسمت، عامل $(x-1)^2$ را در $f(x)$ ظاهر می‌کنیم:

$$f(x) = nx^n(x-1) - (x^n - 1) =$$

$$= (x-1)[nx^n - (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1)] =$$

$$= (x-1)[(x^n - x^{n-1}) + (x^n - x^{n-2}) + \dots + (x^n - 1)] =$$

$$\begin{aligned}
 &= (x-1)^2 [x^{n-1} + x^{n-2}(x+1) + x^{n-3}(x^2+x+1) + \dots + \\
 &+ (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1)] = \\
 &= (x-1)^2 [nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + (n-2)x^{n-3} + \dots + \\
 &+ 2x + 1]
 \end{aligned}$$

و از آنجا خارج قسمت چنین است:

$$Q = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \dots + 2x + 1$$

۰۸۵. می‌توان عبارت $x^4 + ma^2x^2 + a^4$ را بر $x^2 - ax + a^2$ تقسیم کرد و باقیمانده را نسبت به x متحد با صفر قرار داد. در این تقسیم خارج قسمت مساوی $x^2 + ax + a^2$ و باقیمانده مساوی $a^2(m-1)x + a^4(m-1)$ می‌شود که این باقیمانده به ازای $m=1$ نسبت به x متحد صفر است و در این صورت خارج قسمت مساوی $x^2 + ax + a^2$ می‌شود.

جواب: $m=1$

$$a=b=1 \quad (۰۸۶ \text{ اولاً})$$

ثانیاً) به ترتیب داریم:

$$\begin{aligned}
 (x-2)^{2n} + (x-1)^n - 1 &= [(x-2)^{2n} + (x-2)] + \\
 &+ [(x-1)^n - (x-1)] = \\
 &= (x-2)[(x-2)^{2n-1} + 1] + (x-1)[(x-1)^{n-1} - 1] = \\
 &= (x-2)(x-1)[(x-2)^{2n-2} - (x-2)^{2n-3} + \dots + 1] + \\
 &+ (x-1)(x-2)[(x-1)^{n-2} + (x-1)^{n-3} + \dots + 1] = \\
 &= (x^2 - 3x + 2) \left\{ [(x-2)^{2n-2} - (x-2)^{2n-3} + \dots + 1] + \right. \\
 &\left. + [(x-1)^{n-2} + (x-1)^{n-3} + \dots + 1] \right\}
 \end{aligned}$$

مقدار داخل آکولاد، خارج قسمت مورد نظر است.

۰۸۷. بنابر فرض داریم:

$$f(1) = 1 ; f(3) = -4$$

اکنون اگر خارج قسمت $f(x)$ بر $(x-1)(x-3)$ را $Q(x)$ و باقیمانده این تقسیم را $ax+b$ فرض کنیم (چون مقسوم‌علیه از درجه دوم است، باقیمانده در حالت عمومی درجه اول خواهد بود). داریم:

$$(x-1)(x-3)Q(x) + ax + b \equiv f(x)$$

این اتحاد به ازای مقادیر $x=1$ و $x=3$ چنین می‌شود:

$$\begin{cases} a+b=f(1)=1 \\ 3a+b=f(3)=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{5}{2} \\ b=\frac{7}{2} \end{cases}$$

و بنابراین باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $(x-1)(x-3)$ چنین می‌شود:

$$R = -\frac{5}{2}x + \frac{7}{2}$$

حالت کلی: اگر باقیمانده $f(x)$ بر $x-a$ را مساوی A و باقیمانده

$f(x)$ بر $x-b$ را B فرض کنیم، باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $(x-a)(x-b)$ چنین است:

$$R = A \frac{x-b}{a-b} + B \frac{x-a}{b-a}$$

۸۸. شبیه تمرین قبل عمل کنید.

$$R = -\frac{1}{12}x^2 - \frac{5}{6}x - \frac{1}{6} \quad \text{جواب:}$$

حالت کلی: اگر باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $x-a$ ، $x-b$ ، $x-c$ به ترتیب A ، B و C باشد، باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $(x-a)(x-b)(x-c)$ چنین خواهد بود:

۸۹. فرض کنید:

$$R = A \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + B \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + C \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

۹۰. فرض می‌کنیم:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

باید داشته باشیم:

$$f(-2) = 0; \quad f(1) = 15; \quad f(-1) = 5;$$

$$f(-3) = -13; \quad f(2) = 92$$

$$f(x) = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - x + 2 \quad \text{جواب:}$$

۹۰. فرض می‌کنیم:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

داریم:

$$۱) a+b+c+d=۲$$

$$۲) f(-۱)=-a+b-c+d=۰$$

$$۳) ax^2+bx+c+d=(ax+b)(x^2)+cx+d$$

که برای محاسبه باقیمانده تقسیم آن بر $x^2+۱$ باید بجای x^2 مقدار -۱ را قرار دهیم:

$$(d-b)-(a-c)x \equiv ۱-x$$

و از آنجا:

$$d-b=۱ ; a-c=۱$$

$$f(x)=x^2+۱ \text{ جواب:}$$

۹۱. داریم:

$$x^2+۹=(x^2+۳)^2-۶x^2=$$

$$=(x^2+x\sqrt{۶}+۳)(x^2-x\sqrt{۶}+۳)$$

$$\text{جواب: } a=-\sqrt{۶}, b=۳ \text{ یا } a=\sqrt{۶}, b=۳$$

۹۲. روش اول: اولاً به ازای $x=۱$ عبارت $f(x)$ بر $x^2+x^2+x+۱$ یعنی ۴ قابل قسمت است. ثانیاً به ازای $x \neq ۱$ به سادگی می توان تحقیق کرد که $(x-۱)f(x)$ بر $x^2-۱$ قابل قسمت است، یعنی به ازای $x^2=۱$ برابر صفر می شود.

روش دوم: اگر مقسوم علیه را تجزیه کنیم بصورت $(x+۱)(x^2+۱)$ در می آید و باز هم به سادگی ثابت می شود که:

$$f(-۱)=۰ \text{ و } f(i)=۰$$

برای حالت کلی هم می توان مانند روش اول عمل کرد. اولاً وقتی که $x=۱$ باشد $f(x)$ بر عبارت مغروض قابل قسمت است، ثانیاً وقتی که $x \neq ۱$ باشد، هم $f(x)$ و هم مقسوم علیه را در $x-۱$ ضرب می کنیم، در نتیجه باید ثابت کرد که $(x-۱)f(x)$ بر $x^n-۱$ قابل قسمت است. اگر $(x-۱)f(x)$ را بر حسب توانهای x^n منظم کنیم و $x^n=۱$ قرار دهیم به باقیمانده ای مساوی صفر می رسیم.

۹۳. دستگاه چهار معادله چهار مجهولی زیر را حل کنید:

$$f(1) = f'(1) = f''(1) = f'''(1) = 0$$

جواب: $q=1$, $n=2(a^2-1)$; $m=p=-a^2$

۹۴. در حقیقت $f(x)-1$ بر $(x+1)^4$ و $f(x)+1$ بر $(x-1)^4$ قابل-

قسمت است، بنابراین $f'(x)$ بر $(x+1)^3$ و $(x-1)^3$ یعنی بر $(x^2-1)^3$ قابل قسمت خواهد بود. چون $f(x)$ از درجه هفتم است، مشتق آن باید از درجه ششم باشد و در نتیجه خواهیم داشت:

$$f'(x) = \lambda(x^2-1)^3$$

که در آن λ ضریب عددی ثابتی است، از دو طرف تساوی بالا تابع اولیه می گیریم:

$$f'(x) = \lambda(x^6 - 3x^4 + 2x^2 - 1)$$

$$f(x) = \lambda\left(\frac{1}{7}x^7 - \frac{3}{5}x^5 + x^3 - x\right) + c$$

ولی طبق فرض مسأله باید داشته باشیم:

$$f(1) = -1 ; f(-1) = 1$$

از آنجا مقادیر λ و c بدست می آید:

$$\lambda = \frac{35}{16} ; c = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{16}(5x^7 - 21x^5 + 35x^3 - 35x) \quad \text{جواب:}$$

۹۵. اگر فرض کنید: $f(x) = ax^2 + bx + c$ ؛ با توجه به شرطهای مسأله بدست می آید:

$$a=1 ; b=-2 ; c=1$$

۹۶. روش اول: بنا بر فرض مسأله باید داشته باشیم:

$$(x^3+1)(x^2+mx+n)+1 \equiv$$

$$\equiv (x^2+1)(x^2+px^2+qx+r)-1$$

که از آنجا بدست می آید:

$$p=q=m=-1 ; r=2 ; n=0$$

و داریم:

$$f(x) = x^5 - x^4 + x^2 - x + 1$$

روش دوم: اگر فرض کنیم:

$$f(x) = x^5 + ax^4 + bx^2 + cx^2 + dx + e$$

باقیمانده آن بر $x^2 + 1$ بصورت:

$$(d - b + 1)x + (a - c + e)$$

و بر $x^2 + 1$ بصورت:

$$(c - 1)x^2 + (d - a)x + (e - b)$$

در می‌آید و بنابراین طبق فرض مسئله داریم:

$$\begin{cases} (d - b + 1)x + (a - c + e) \equiv -1 \\ (c - 1)x^2 + (d - a)x + (e - b) \equiv +1 \end{cases}$$

و از آنجا مقادیر a, b, c, d, e بدست می‌آید.

۹۷. $f(x)$ و مشتقهای مرتبه اول و دوم آن به ازای $x = 1$ برابر صفر می‌شود.

۹۸. داریم:

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c = a(x^2)^2 + bx(x^2) + c$$

که به ازای $x^2 = -1$ باقیمانده $f(x)$ بر $x^2 + 1$ بدست می‌آید:

$$-bx + a + c$$

و همچنین:

$$f(x) = (ax + b)(x^2) + c$$

و بنابراین باقیمانده $f(x)$ بر $x^2 + 1$ چنین است.

$$-ax + c - b$$

و به این ترتیب داریم:

$$(-bx + a + c)(-ax + c - b) \equiv 2x^2 - 12x + 10$$

و از آنجا به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} ab = 4 \\ (a + b)(a - b + c) = 12 \\ c(a - b + c) = 12 \end{cases}$$

از معادلهٔ دوم دستگاه داریم: $c = \frac{12}{a+b} - a + b$

و از تقسیم معادلهٔ دوم بر معادلهٔ سوم: $c = a + b$

و از آنجا: $\frac{12}{a+b} - a + b = a + b$

و یا پس از ساده کردن: $a^2 + ab = 6$

که با توجه به معادلهٔ اول دستگاه می‌شود: $a^2 = 4$

جواب: $a = 2$ ، $b = -1$ ، $c = 1$ یا $a = -2$ ، $b = 1$ ، $c = -1$

۹۹. اگر چند جمله‌ای $f(x) = x^4 + px^2 + qx + a^2$ بر $x^2 - 1$ قابل

قسمت باشد، باید باقیماندهٔ آن بر $x^2 - 1$ متحد صفر شود:

$$f(x) = (x^2)^2 + p(x^2) + q + a^2$$

$$1 + p + qx + a^2 \equiv 0 \Rightarrow q = 0 ; p = -(a^2 + 1)$$

و در اینصورت $f(x)$ چنین می‌شود:

$$f(x) = x^4 - (a^2 + 1)x^2 + a^2 = (x^2 - 1)(x^2 - a^2)$$

یعنی $f(x)$ بر $x^2 - a^2$ هم قابل قسمت است.

۱۰۰. طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} \alpha^3 + p\alpha + q = \beta \\ \beta^3 + p\beta + q = \alpha \end{cases}$$

از تفاضل دو رابطه به سادگی به رابطهٔ $\alpha^3 + \beta^3 + \alpha\beta = -(p+1)$ و

از حذف p بین دو رابطه به رابطهٔ $(\alpha+\beta)(\alpha\beta+1) = q$ می‌رسیم.

اگر $p = -22$ و $q = -19$ باشد، داریم:

$$\begin{cases} (\alpha+\beta)(\alpha\beta+1) = -19 \\ \alpha^3 + \beta^3 + \alpha\beta = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\alpha+\beta)(\alpha\beta+1) = -19 \\ (\alpha+\beta)^3 - \alpha\beta = 21 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} \alpha\beta = -\left(\frac{19}{\alpha+\beta} + 1\right) \\ \alpha\beta = (\alpha+\beta)^3 - 21 \end{cases} \Rightarrow (\alpha+\beta)^3 + \frac{19}{\alpha+\beta} = 20 ;$$

$$(\alpha+\beta)^3 - 20(\alpha+\beta) + 19 = 0$$

یکی از جوابهای $\alpha + \beta$ مساوی واحداست و بنابراین دو جواب دیگر

هم بدست می‌آید. با در دست داشتن $\alpha + \beta$ با کمک معادله اول دستگاه $\alpha\beta$ هم محاسبه می‌شود.

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha \cdot \beta = -20 \end{cases}; \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{\sqrt{77}-1}{2} \\ \alpha \cdot \beta = -\frac{\sqrt{77}+3}{2} \end{cases}; \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{\sqrt{77}+1}{2} \\ \alpha \beta = \frac{\sqrt{77}-3}{2} \end{cases}$$

که اگر مقید به صحیح بودن α و β باشیم، داریم: $\alpha = 5$ و $\beta = -4$ می‌توان با تقسیم مستقیم مسأله را به نتیجه رساند، ولی اگر از رابطه زیر که به رابطه موآور مشهور است اطلاع داشته باشیم:

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$$

می‌توان با قرار دادن یکی از ریشه‌های موهمی مقسوم علیه در مقسوم، باقیمانده صفر را بدست آورد:

$$x^2 - 2x \cos \alpha + 1 = 0 \Rightarrow x = \cos \alpha \pm i \sin \alpha$$

مثلاً ریشه $x = \cos \alpha + i \sin \alpha$ را آزمایش می‌کنیم، به ترتیب بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} & (\cos \alpha + i \sin \alpha)^{n+1} \cos(n-1)\alpha - (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n \cos n\alpha - \\ & - (\cos \alpha + i \sin \alpha) \cos \alpha + 1 = [\cos(n+1)\alpha + i \sin(n+1)\alpha] \times \\ & \times \cos(n-1)\alpha - (\cos n\alpha + i \sin n\alpha) \cos \alpha - \\ & - (\cos \alpha + i \sin \alpha) \cos \alpha + 1 = [\cos(n+1)\alpha \cos(n-1)\alpha - \\ & - \cos^2 n\alpha - \cos^2 \alpha + 1] + i[\sin(n+1)\alpha \cos(n-1)\alpha - \\ & - \sin n\alpha \cos n\alpha - \sin \alpha \cos \alpha] = \\ & = \left[\frac{1}{4}(\cos^2 n\alpha + \cos^2 \alpha) - \frac{1}{4}(1 + \cos^2 n\alpha) - \frac{1}{4}(1 + \cos^2 \alpha) + \right. \\ & \left. + 1 \right] + i \left[\frac{1}{4}(\sin^2 n\alpha + \sin^2 \alpha) - \frac{1}{4}\sin^2 n\alpha - \frac{1}{4}\sin^2 \alpha \right] = 0 \end{aligned}$$

وقتی که يك ریشه مختلط (به صورت $a+ib$) در معادله‌ای با ضریبهای حقیقی صدق کند، حتماً مزدوج آن (یعنی $a-ib$) هم در معادله صدق می‌کند. بنابراین آزمایش ریشه $x = \cos \alpha - i \sin \alpha$ لازم نیست.

۱۰۴. (اولاً) به ازای تمام مقادیر n داریم:

$$f(0, y) = 0 ; f(x, 0) = 0$$

و بنابراین $f(x, y)$ همیشه بر xy قابل قسمت است.
اگر n عددی فرد باشد، داریم:

$$f(-y, y) = 0$$

و بنابراین $f(x, y)$ در حالت فرد بودن n بر $x + y$ قابل قسمت است.
اکنون باید ثابت کنیم که $f(x, y)$ بر $x^2 + xy + y^2$ هم قابل قسمت است. کافی است $f(x, y)$ به ازای یکی از ریشه‌های موهومی معادله $x^2 + y \cdot x + y^2 = 0$ صفر شود، تا بر این سه جمله‌ای قابل قسمت باشد.
ریشه‌های این معادله را نسبت به مجهول x معین می‌کنیم:

$$x^2 + yx + y^2 = 0 \Rightarrow x = y \times \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = yj \text{ و } yj^2$$

$f(yj, y)$ را محاسبه می‌کنیم (j و j^2 کمبهای موهومی واحد هستند).

$$f(yj, y) = (yj + y)^n - (yj)^n - y^n = y^n(j + 1)^n - j^n - 1$$

با توجه به رابطه $j^2 + j + 1 = 0$ می‌توان بجای $j + 1$ مساویش $-j^2$ را قرار داد و چون n عددی است فرد، داریم:

$$f(Jy, y) = -y^n(J^{2n} + J^n + 1)$$

با توجه به اینکه n بر ۳ قابل قسمت نیست، دو حالت در نظر می‌گیریم:

$$۱) j = 2k + 1 \Rightarrow f(jy, y) = -y^n(J^{2k+2} + J^{2k+1} + 1) = -y^n(J^2 + J + 1) = 0$$

$$۲) j = 3k + 2 \Rightarrow f(Jy, y) = -y^n(J^{6k+4} + J^{3k+2} + 1) = -y^n(J + J^2 + 1) = 0$$

و به این ترتیب $f(x, y)$ ، با توجه به شرطهای مسأله، بر $x^2 + xy + y^2$ هم قابل قسمت است.

ثانیاً) در این حالت n بصورت $6k + ۱$ است، چون n عددی فرد و غیر قابل قسمت بر ۳ می‌باشد، بنابراین $f(x, y)$ بر $(x^2 + xy + y^2)$ و $xy(x + y)$ قابل قسمت است، برای اثبات قابلیت تقسیم آن بر $(x^2 + xy + y^2)^2$ کافی است ثابت کنیم که مثلاً مشتق آن (نسبت به x یا y) هم بر $x^2 + xy + y^2$ قابل قسمت است. می‌نویسیم:

$$\varphi(x) = (x+y)^n - x^n - y^n$$

$$\varphi'(x) = n(x+y)^{n-1} - nx^{n-1}$$

یکی از ریشه‌های $0 = x^2 + y \cdot x + x^2$ و مثلاً zy را در مشتق قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned}\varphi'(Jy) &= n(J \cdot y + y)^{n-1} - n(Jy)^{n-1} = \\ &= ny^{n-1}[(J+1)^{n-1} - J^{n-1}]\end{aligned}$$

$n-1$ عددی است زوج و بنابراین داریم:

$$(J+1)^{n-1} = (-J^2)^{n-1} = J^{2(n-1)}$$

و اگر بجای n مقدارش $k+1$ را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\varphi'(Jy) = ny^{n-1}(J^{2k} - J^{2k}) = 0$$

و به این ترتیب وقتی $\varphi(x)$ و $\varphi'(x)$ هر دو بر $x^2 + xy + y^2$ قابل قسمت باشند، $\varphi(x)$ بر $(x^2 + xy + y^2)^2$ قابل قسمت خواهد بود.

$$1) \quad (x+y)^3 - x^3 - y^3 = 3xy(x+y) \quad (\text{ثالثاً})$$

چون دوطرف تساوی نسبت به x از درجه دومند، A مقداری است ثابت. ضریب x^2y درست‌چپ مساوی ۳ و درست‌راست مساوی A است پس $A=3$ ، یعنی:

$$(x+y)^3 - x^3 - y^3 = 3xy(x+y)$$

$$2) \quad (x+y)^5 - x^5 - y^5 = 5xy(x+y)(x^2 + xy + y^2)$$

(۵ عددی است فرد و غیر قابل قسمت بر ۳). مثل حالت قبل $B=5$ می‌شود:

$$(x+y)^5 - x^5 - y^5 = 5xy(x+y)(x^2 + xy + y^2)$$

و بهمین ترتیب:

$$3) \quad (x-y)^7 - x^7 - y^7 = 7xy(x+y)(x^2 + xy + y^2)^2$$

۱۰۵. اتحاد زیر واضح است:

$$(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x+y)(y+z)(z+x)$$

و به سادگی روشن می‌شود که عبارت $(x+y+z)^m - x^m - y^m - z^m$ وقتی بر $(x+y)(y+z)(z+x)$ قابل قسمت است که m عددی فرد باشد.

۱۰۶. اگر در تقسیم m بر n خارج قسمت q و باقیمانده r را داشته باشیم، می‌توان نوشت:

$$m = n \cdot q + r$$

و بنابراین:

$$x^m - y^m = (x^n)^q \cdot x^r - y^n \cdot q + r$$

باقیمانده تقسیم $x^m - y^m$ بر $x^n - y^n$ به ازای $x^n = y^n$ بدست می‌آید:

$$R = (y^n)^q \cdot x^r - y^n q + r = y^n q (x^r - y^r)$$

و برای اینکه این باقیمانده صفر باشد، باید داشته باشیم:

$$x^r = y^r \Rightarrow r = 0$$

یعنی باید m مضربی از n باشد.

۱۰۷ داریم:

$$f(x) = \frac{x^{2n}-1}{x^2-1} ; \varphi(x) = \frac{x^n-1}{x-1} ;$$

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{(x^{2n}-1)(x-1)}{(x^n-1)(x^2-1)} = \frac{x^n+1}{x+1}$$

و می‌دانیم برای اینکه x^n+1 بر $x+1$ قابل قسمت باشد، باید n عددی فرد باشد.

۱۰۸ از رابطه زیر استفاده کنید (رابطه موآور):

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$$

۱۰۹ از تقسیم مستقیم و یا از رابطه موآور استفاده کنید.

۱۱۰ چون $f(x, y)$ نسبت به x و y متقارن است، داریم:

$$f(x, y) = f(y, x)$$

از طرف دیگر چون $f(x, y)$ بر $x - y$ قابل قسمت است. می‌توان نوشت:

$$f(x, y) = (x - y)\varphi(x, y) ;$$

$$f(y, x) = (y - x)\varphi(y, x)$$

$$\varphi(x, y) = -\varphi(y, x) \quad \text{از آنجا:}$$

و بنابراین داریم:

$$\varphi(y, y) = -\varphi(y, y) \Rightarrow \varphi(y, y) = 0$$

یعنی $\varphi(x, y)$ هم بر $x - y$ و در نتیجه $f(x, y)$ بر $(x - y)^2$ قابل - قسمت است.۱۱۱ جواب: $x^{13} + 1$

۱۱۲. بزرگترین مقسوم علیه مشترک عبارتهای صورت و مخرج $x^2 - x^2 - x + 1$ است.

$$\text{جواب: } \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - x^2 + x - 1}$$

۱۱۳. مقسوم و مقسوم علیه را در $x - 1$ ضرب می کنیم، در این صورت باید ثابت کنیم:

$$\varphi(x) = (x-1)f(x) = x^{2m+1} - x^{2m} + x^{m+1} - x^m + x - 1$$

بر $x^2 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$ قابل قسمت است، باید $\varphi(x)$ را بر حسب توانهای (x^2) منظم کنیم، برای این منظور سه حالت در نظر می گیریم:

۱) $m = 2k$

$$\varphi(x) = x(x^2)^{2k} - (x^2)^{2k} + x(x^2)^k - (x^2)^k + x - 1$$

که به ازای $x^2 = 1$ برابر با $2(x-1)$ می شود. یعنی به ازای $m = 2k$ $\varphi(x)$ بر $x^2 - 1$ قابل قسمت نیست.

$$۲) \quad m = 2k + ۱$$

$$\varphi(x) = (x^2)^{2k+1} - x^2(x^2)^{2k} + x^2(x^2)^k - x(x^2)^k + x - 1$$

که به ازای $x^2 = 1$ برابر صفر می شود، یعنی $f(x)$ به ازای $m = 2k + 1$ بر $x^2 - 1$ قابل قسمت است.

به همین ترتیب در حالت $m = 2k + 2$ هم $\varphi(x)$ بر $x^2 - 1$ قابل قسمت خواهد شد.

$$\text{جواب: } m = 2k \pm 1$$

۱۱۴. جواب:

$$n = 2k + ۱, m = 2k + ۲ \quad \text{یا} \quad n = 2k + ۲, m = 2k + ۱$$

۱۱۵. شبیه دو تمرین قبل عمل کنید.

۱۱۶. راهنمایی: تفاضل $f(x,y) - \varphi(x,y)$ بر مقسوم علیه که بصورت $(ax - by)(ay - bx)$ در می آید، قابل قسمت است.

۱۱۷. مقسوم علیه را می توان به این ترتیب تجزیه کرد:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz &= \\ &= (x + Jy + J^2z)(x + J^2y + Jz) \end{aligned}$$

بنابراین کافی است که مقسوم به ازای $x = -Jy - J'z$ برابر صفر شود که به سادگی تحقیق می‌شود.

در حالت دوم، باید علاوه بر $f(x, y, z)$ ، مشتق آن نسبت به x هم به ازای همین مقدار x برابر صفر شود.
تجزیه عبارت‌ها چنین است:

$$\begin{aligned} (x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5 &= \\ &= \Delta(x-y)(y-z)(z-x)(x^3 + y^3 + z^3 - xy - yz - xz) ; \\ (x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 &= \\ &= \gamma(x-y)(y-z)(z-x)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)^2 \end{aligned}$$

۱۱۸. $f(x)$ از درجه m را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = A(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\dots(x-\lambda)$$

(در حاک کلی m ریشه $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ می‌توانند حقیقی یا موهومی باشند).
مشتق این تابع درجه m ، از درجه $m-1$ است و برای اینکه $f(x)$ بر $f'(x)$ قابل‌قسمت باشد باید بین $f(x)$ و $f'(x)$ ، $m-1$ ریشه مشترک وجود داشته باشد. این $m-1$ ریشه مشترک را $\beta, \gamma, \dots, \lambda$ می‌گیریم و فرض می‌کنیم:

$$(x-\beta)(x-\gamma)\dots(x-\lambda) = \varphi(x)$$

بنابراین داریم:

$$f(x) = A(x-\alpha)\varphi(x)$$

و از آنجا:

$$f'(x) = A[\varphi(x) + (x-\alpha)\varphi'(x)]$$

$f'(x)$ باید بر $\varphi(x)$ قابل‌قسمت باشد. از دوجمله‌ داخل کروشه، $\varphi(x)$ بر $\varphi(x)$ قابل‌قسمت است، پس باید $(x-\alpha)\varphi'(x)$ هم بر $\varphi(x)$ قابل‌قسمت باشد. $\varphi'(x)$ از درجه $m-2$ و $\varphi(x)$ از درجه $m-1$ است و باید داشته باشیم:

$$(x-\alpha)\varphi'(x) = \lambda\varphi(x)$$

یعنی باید $\varphi(x)$ بر $x-\alpha$ قابل‌قسمت باشد و این نمی‌شود مگر اینکه α با یکی از ریشه‌های $\varphi(x)$ برابر باشد و مثلاً: $\alpha = \beta$ ، در این صورت $f(x)$

بصورت زیر در می آید:

$$f(x) = (x - \alpha)^2 \varphi_1(x)$$

و اگر بهمین ترتیب استدلال را ادامه دهیم، نتیجه می شود:

$$\alpha = \beta = \gamma = \dots = \lambda$$

و داریم:

$$f(x) = A(x - \alpha)^m$$

که با توجه به شرطهای $f(0) = 1$ و $f(1) = 0$ بدست می آید:

$$f(x) = (-1)^m (x - 1)^m$$

۱۱۹. چند جمله ایهای مقسوم و مقسوم علیه را می توان چنین نوشت:

$$\frac{a^{24} - 1}{a - 1} ; \frac{a^x - 1}{a - 1}$$

بنابراین مسأله به اینجا منجر می شود که به ازای چه مقادیری از x عبارت $a^{24} - 1$ بر $a^x - 1$ قابل قسمت است.

فرض می کنیم: $24 = px + q$ ، که در آن p خارج قسمت ۲۴ بر x و q

باقیمانده این تقسیم است ($0 \leq q < x$). در این صورت:

$$a^{24} - 1 = ap^x + q - 1 = a^q[(a^x)^p - 1] + (a^q - 1)$$

یعنی باید $q = 0$ و x مقسوم علیهی از ۲۴ باشد، پس x یکی از عددهای زیر است:

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$$

۱۲۰. طبق قضیه فرما $a^p - a$ و $b^p - b$ بر p قابل قسمت اند، بنابراین

تفاضل آنها یعنی: $a^p - b^p - (a - b)$ هم بر p قابل قسمت است.

از طرف دیگر طبق فرض $a^p - b^p$ مضربی است از p ، پس $a - b$

هم بر p قابل قسمت خواهد بود. فرض می کنیم $a - b = pt$ ، در این صورت

داریم:

$$a^p - b^p = (b + pt)^p - b^p =$$

$$= p \cdot b^{p-1} \cdot pt + \frac{p(p-1)}{2} b^{p-2} \cdot p^2 t^2 + \dots + p p t^p$$

و بنابراین $a^p - b^p$ بر p^2 قابل قسمت است.

۱۲۱. طبق شرطهای مسأله باید داشته باشیم:

$$f(x+1) = (x-1)^2 \varphi(x) ;$$

$$f(x-1) = (x+1)^2 \varphi_1(x)$$

اگر در رابطه اول x را به $x-1$ و در رابطه دوم x را به x تبدیل

کنیم، می‌شود:

$$f(x) = (x-2)^2 \varphi(x-1) = (x-2)^2 g(x)$$

$$f(x) = (x+2)^2 \varphi_1(x+1) = (x+2)^2 g_1(x)$$

بنابراین $f(x)$ بر $(x-2)^2$ و $(x+2)^2$ و در نتیجه بر $(x^2-4)^2$ قابل قسمت است و داریم:

$$f(x) = \lambda(x^2-4)^2$$

و چون $f(x)$ از درجه چهارم است، λ مقداریست ثابت و چون طبق فرض مسأله $f(1) = 1$ است، خواهیم داشت:

$$1 = \lambda(1-4)^2 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{9}$$

$$f(x) = \frac{1}{9}(x^2-4)^2 \quad \text{و بنابراین:}$$

۱۲۲. ریشه‌های عبارت $x^2 - 2x \cos \varphi + 1$ عبارتست از $x = \cos \varphi \pm i \sin \varphi$ و کافی است یکی از این ریشه‌ها و مثلاً $\cos \varphi + i \sin \varphi$ مقسوم را مساوی صفر کند. با قراردادن این مقدار بجای x در مقسوم، و با استفاده از رابطه‌ها و اور، بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} & [\cos(n+1)\varphi + i \sin(n+1)\varphi] \sin(n-1)\varphi - \\ & - (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \sin n\varphi + (\cos \varphi + i \sin \varphi) \sin \varphi = \\ & = [\cos(n+1)\varphi \sin(n-1)\varphi - \cos n\varphi \sin n\varphi + \cos \varphi \sin \varphi] + \\ & + i[\sin(n+1)\varphi \sin(n-1)\varphi - \sin^2 n\varphi - \sin^2 \varphi] = \\ & = \frac{1}{2}[(\sin 2n\varphi - \sin 2\varphi) - \sin 2n\varphi + \sin 2\varphi] + \\ & + i[(\cos 2\varphi - \cos 2n\varphi) - (1 - \cos 2n\varphi) + (1 - \cos 2\varphi)] = 0 \end{aligned}$$

به همین ترتیب ریشه $\cos \varphi - i \sin \varphi$ هم عبارت مقسوم را مساوی صفر می‌کند، یعنی مقسوم بر مقسوم علیه مفروض قابل قسمت است.

$$\begin{array}{r}
 -abx^r \\
 -(a+b)x - abx^r \\
 \hline
 (a+b)x - abx^r \\
 -(a+b)x + (a+b)^r x^r - abx^r \\
 \hline
 (a^r + b^r)x^r - ab(a+b)x^r \\
 -(a^r + b^r)x^r + (a^r + b^r)(a+b)x^r - ab(a^r + b^r)x^r \\
 \hline
 (a^r + b^r)x^r - ab(a^r + b^r)x^r \\
 \hline
 (a^{n-1} + b^{n-1})x^{n-1} - ab(a^{n-1} + b^{n-1})x^n \\
 -(a^{n-1} + b^{n-1})x^{n-1} + (a+b)(a^{n-1} + b^{n-1})x^n - ab(a^{n-1} + b^{n-1})x^{n+1} \\
 \hline
 (a^n + b^n)x^n - ab(a^{n-1} + b^{n-1})x^{n+1} \\
 -(a^n + b^n)x^n + (a+b)(a^n + b^n)x^{n+1} - ab(a^n + b^n)x^{n+1} \\
 \hline
 \text{صورت کلی باقیمانده} = (a^{n+1} + b^{n+1})x^{n+1} - ab(a^n + b^n)x^{n+1}
 \end{array}$$

۱۲۴. مخارج کسر مجذور کامل است و به صورت $(x^2 + 3x^2 - x - 1)^2$ در می‌آید و صورت کسر بر $x^2 + 3x^2 - x - 1$ قابل قسمت است و خارج قسمت مساوی $x^2 + 2x - 1$ می‌شود. در نتیجه کسر مفروض به این صورت در می‌آید:

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 3x^2 - x - 1}$$

و این کسر دیگر ساده نمی‌شود.

۱۲۵. صورت کسر بعد از باز کردن پرانتزها $(a^2 + b^2 + c^2) ۱۵۲۱$ و مخارج کسر $(a^2 + b^2 + c^2) ۳۶۱$ می‌شود.

$$\frac{۱۵۲۱}{۳۶۱} \quad \text{جواب:}$$

۱۲۶. فرض کنید α مخالف واحدویکی از ریشه‌های موهومی معادله $x^2 = ۱$ باشد، تابع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = (1+x)^{2k} + x^{2k} + 1$$

به روشنی دیده می‌شود که:

$$\begin{aligned} f(a) &= (1+a)^{2k} + a^{2k} + 1 = (-a^2)^{2k} + a^{2k} + 1 = \\ &= (a^2)^k \cdot a^k + a^{2k} + 1 = a^{2k} + a^k + 1 = \frac{(a^2)^k - 1}{a^k - 1} = 0 \end{aligned}$$

و به همین ترتیب:

$$f(a^2) = (1+a^2)^{2k} + a^{4k} + 1 = a^{2k} + a^k + 1 = 0$$

بنابراین تابع $f(x)$ بر a^{2k}

$$a^2(x-a)(x-a^2) = a^2(x^2+x+1) \quad (a \neq 0)$$

قابل قسمت است که به ازای $x = \frac{b}{a}$ به این معناست که عبارت به صورت

$(a+b)^{2k} + a^{2k} + b^{2k}$ بر $a^2 + ab + b^2$ قابل قسمت است.

۱۲۷. راه حل اول: ثابت می‌کنیم که $s = ۱۹^{۱۹} + ۶۹^{۶۹}$ بر ۴ و ۱۱ قابل قسمت است:

$$\begin{aligned} s &= (20-1)^{19} + (68+1)^{69} = (20m-1) + (68n+1) = \\ &= 2(5m+17n); \end{aligned}$$

$$s = (22-3)^{19} + (66+3)^{69} = 22m_1 + 66n_1 + 2^{69} - 3^{19} = \\ = 11p + 3^{19}(350-1) =$$

$$= 11p + 3^{19}(243^{10} - 1) = 11p + 3^{19} \cdot 242q = 11q_1$$

و چون s هم بر ۴ و هم بر ۱۱ قابل قسمت است بر ۴۴ هم قابل قسمت است.
راه حل دوم: روشن است که:

$$s = 19^{69} + 69^{69} - 19^{19}[(19^{10})^5 - 1] = \\ = 88m - 19^{19}(19^{10} - 1)n$$

طبق قضیه کوچک فرما عدد $N = 19^{11} - 1 - 1$ مضرب ۱۱ است از ۱۱. علاوه بر آن:

$$N = (19^2)^5 - 1 = 361^5 - 1 = 360k$$

بنابراین n مضرب ۱۱ است از ۸۸. به این ترتیب N مضرب ۱۱ است از ۸۸ و مجموع مفروض هم مضرب ۱۱ است از ۸۸.

۱۲۸. مقدار رادیکال اول برابر است با $\sqrt[4]{(a+1)^4(a-1)}$ که مقدار آن می شود $|a+1|\sqrt[4]{a-1}$ و مقدار عبارت چنین است:

$$\frac{a}{2}|a+1|\sqrt[4]{a-1} \times \frac{\sqrt[4]{a-1}}{(a+2)(a+1)} = \frac{a}{2} \cdot \frac{|a+1|\sqrt[4]{(a-1)^3}}{(a+2)(a+1)}$$

ولی $a+1$ همیشه مثبت است، زیرا برای اینکه مقدار زیر رادیکال اول $(a+1)^4(a-1)$ و یا مقدار زیر رادیکال دوم $a-1$ مثبت باشد باید $a > 1$ باشد که در این صورت $a+1 > 2$ می شود و بنابراین حاصل عبارت

$$\text{مساوی} \frac{a\sqrt[4]{(a-1)^3}}{2(a+2)} \text{ خواهد شد.}$$

$$129. \text{ جواب: } \frac{1}{3}\sqrt[6]{a}$$

توضیح: رادیکال اول به ازای مقادیر $a > 0$ حقیقی است. به ازای $a = 0$ هم مفهوم خود را از دست می دهد. رادیکال دوم به ازای همه مقادیر

a بجز $-1 = a$ معنا دارد. بنابراین مقدار a می‌تواند هر مقدار مثبت دلخواه باشد.

۱۳۰. اگر ab را به رادیکال اول داخل کنیم، عبارت به صورت زیر در می‌آید:

$$\sqrt[n]{a-b} \times \frac{1}{\sqrt[n]{a-b}} = 1$$

توضیح: در حالت زوج بودن n باید $a < b$ باشد. حالت $a = b$ در هر دو مورد زوج یا فرد بودن n استثنا است، زیرا در این صورت رادیکال دوم مفهوم خود را از دست می‌دهد.

۱۳۱. اگر در پرانتز اول مخرجها را گویا کنیم، عبارت چنین می‌شود:

$$(\sqrt{6}-11)(\sqrt{6}+11) = -115$$

۱۳۲. مقسوم برابر $\frac{\sqrt{a-b} + \sqrt{a+b}}{b}$ و مقسوم علیه آن برابر

$$\frac{\sqrt{a-b} + \sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}} \text{ و خارج قسمت برابر } \frac{\sqrt{a-b}}{b} \text{ می‌باشد.}$$

توضیح: برای اینکه رادیکالها در حوزه عددهای حقیقی باشند باید در عین حال سه شرط $a \geq 0$ و $a-b \geq 0$ و $a+b \geq 0$ وجود داشته باشد (می‌توان این سه شرط را بصورت دو شرط $a \geq 0$ و $|b| < |a|$ نوشت).

۱۳۳. مقسوم مساوی $\frac{2b}{b^2-a}$ ، مقسوم علیه مساوی $\frac{3b}{b^2-a}$ و خارج قسمت

مساوی $\frac{2}{3}$ می‌شود. a می‌تواند هر مقدار مثبت را اختیار کند و b می‌تواند

هر عدد دلخواه بجز $\pm \sqrt{a}$ باشد.

۱۳۴. در صورت کسر می‌توان از ۵۹ فاکتور گرفت.

جواب: ۵۹

توضیح. اگر در صورت کسر عاملی مساوی مخرج کسر وجود نداشت بازهم

می‌توانستیم با روش ساده‌ای مخرج را گویا کنیم. فرض کنید بخواهیم مخرج کسر:

را گویا کنیم. از روش ضریبهای نامعین استفاده می‌کنیم: عبارتی $\frac{A}{5+3\sqrt{4}-7\sqrt{2}}$

را که باید در صورت و مخرج کسر ضرب کنیم $a+b\sqrt{4}+c\sqrt{2}$ می‌گیریم، در این صورت مخرج کسر چنین می‌شود:

$$\begin{aligned} (5+3\sqrt{4}-7\sqrt{2})(a+b\sqrt{4}+c\sqrt{2}) &= \\ &= (5b+3a-7c)\sqrt{4} + (5c+6b-7a)\sqrt{2} + \\ &+ (5a+6c-14b) \end{aligned}$$

برای اینکه این عبارت گویا باشد باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} 5b+3a-7c=0 \\ 5c+6b-7a=0 \end{cases}$$

بین این دو رابطه c را حذف می‌کنیم، به رابطه $67b=34a$ می‌رسیم که می‌توان $a=67$ و $b=34$ گرفت (کوچکترین عددهای صحیحی که برای a و b وجود دارد)، در این صورت $c=53$ می‌شود. به این ترتیب:

$$\begin{aligned} \frac{A}{5+3\sqrt{4}-7\sqrt{2}} &= \frac{A(67+34\sqrt{4}+53\sqrt{2})}{(5+3\sqrt{4}-7\sqrt{2})(67+34\sqrt{4}+53\sqrt{2})} = \\ &= \frac{A(67+34\sqrt{4}+53\sqrt{2})}{177} \end{aligned}$$

$$135. \text{ جواب: } \frac{7}{16}$$

136. جواب اگر حاصل عبارت را A بگیریم داریم:

$$2k\pi < x < 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow A = 2\sqrt{2}(\sin x + \cos x)$$

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} < x < (2k+1)\pi \Rightarrow A = 2\sqrt{2}\sin x$$

$$(2k+1)\pi < x < 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \Rightarrow A = 0$$

$$2k\pi + \frac{3\pi}{2} < x < 2k\pi + 2\pi \Rightarrow A = 2\sqrt{2}\cos x$$

137. داریم:

$$A = \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\cos 4x}} = \sqrt{2 + \sqrt{2(1 + \cos 4x)}} = \\ = \sqrt{2 + \sqrt{4\cos^2 2x}} = \sqrt{2(1 + |\cos 2x|)}$$

و جواب آن در حالت‌های مختلف $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\gamma\pi}{4}$ چنین است:

$$-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \Rightarrow A = 2\cos x$$

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow A = 2\sin x$$

$$\frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4} \Rightarrow A = -2\cos x$$

$$\frac{5\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4} \Rightarrow A = -2\sin x$$

۱۳۸. جواب: $|\sin x + \cos x|$

۱۳۹. داریم:

$$\sqrt{1 + \sin 2\alpha} = \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha} = \\ = \sqrt{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2} = |\sin \alpha + \cos \alpha|$$

و این مقدار وقتی برابر با $\sin \alpha + \cos \alpha$ است که $\sin \alpha + \cos \alpha > 0$ باشد. بنابراین حل مسأله منجر به حل نامعادله $\sin \alpha + \cos \alpha > 0$ در فاصله $[0, 2\pi]$ می‌شود.

$$\sin \alpha + \cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = k\pi - \frac{\pi}{4}$$

که جواب‌های بین صفر و 2π آن چنین است: $\frac{\gamma\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$

و در نتیجه جواب‌های α چنین است:

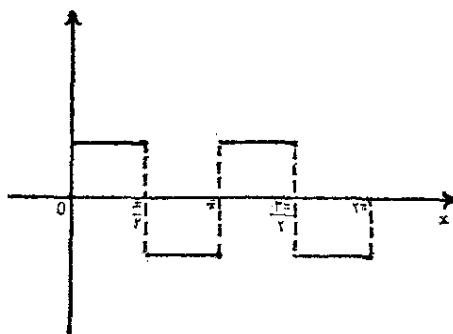
$$0 < \alpha < \frac{3\pi}{4}; \quad \frac{\gamma\pi}{4} < \alpha < 2\pi$$

۱۴۰. تابع y پس از ساده کردن بصورت زیر در می‌آید:

$$y = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{|\sin \alpha| \cdot |\cos \alpha|}$$

و بنابراین وقتی انتهای قوس α در ربعهای اول و سوم دایره مثلثاتی باشد $y=1$ و وقتی که انتهای قوس α در ربعهای دوم و چهارم دایره مثلثاتی باشد $y=-1$ می شود.

نمایش تغییرات تابع y در فاصله $[0, 2\pi]$ روی دستگاه محوره‌های قائم چنین است.



شکل ۱۲

و بنابراین دوره تناوب تابع مساوی π و طولهای نقطه‌های انفصال آن $x = k\frac{\pi}{2}$ است.

۱۴۱. اگر $x = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$ را در عبارت $\sqrt{x^2 - 1}$ قرار دهیم، بدست می‌آید:

$$\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{1}{4}\left(a - \frac{1}{a}\right)^2} = \frac{1}{2}\left|a - \frac{1}{a}\right|$$

که با توجه به شرط $a \geq 1$ مقدار $a - \frac{1}{a} \geq 0$ می‌شود و داریم:

$$\sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)$$

و بهمین ترتیب:

$$\sqrt{y^2 - 1} = \frac{1}{2}\left(b - \frac{1}{b}\right)$$

که اگر در عبارت فرض قرار دهیم مقدار آن بدست می‌آید.

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2 + 1} \quad \text{جواب:}$$

۱۴۲. با توجه به شرط $x = \frac{2am}{b(1+m^2)}$ ، به سادگی بدست می‌آید:

$$\sqrt{a+bx} = 1+m\sqrt{\frac{a}{1+m^2}}$$

$$\sqrt{a-bx} = 1-m\sqrt{\frac{a}{1+m^2}}$$

اولاً با توجه به شرط $|m| < 1$ ، هر دو مقدار $1+m$ و $1-m$ مثبت‌اند، ثانیاً a باید مقداری مثبت باشد، زیرا در حالت منفی بودن a ، رادیکالها موهومی می‌شوند ($1+m^2$ همیشه مثبت است) و در حالت صفر بودن a ، رادیکالها برابر صفر و عبارت نامعین می‌شود. عبارت مفروض بصورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{(1+m)\sqrt{\frac{a}{1+m^2}} + (1-m)\sqrt{\frac{a}{1+m^2}}}{(1+m)\sqrt{\frac{a}{1+m^2}} - (1-m)\sqrt{\frac{a}{1+m^2}}} = \frac{1}{m} \quad \text{جواب: } \frac{1}{m} \quad (a > 0 \text{ به ازای } m)$$

۱۴۳. جواب: $x = n$

۱۴۴. دوجمله‌ای $a - \sqrt{ax}$ را به صورت $\sqrt{a}(\sqrt{a} - \sqrt{x})$ بنویسید، صورت کسر داخل کروشه چنین می‌شود:

$$(\sqrt{a}+1)^2 - \sqrt{a} = a + \sqrt{a} + 1$$

و منخرج آن بصورت $3(a + \sqrt{a} + 1)$ در می‌آید.

جواب: ۲۷

$$\frac{(n+1)\sqrt{n-2}}{(n-1)\sqrt{n+2}} \quad \text{جواب: } ۱۴۵$$

۱۴۶. بجای x مقدارش را قرار دهید و در داخل پرانتز از $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{q+p}{q-p}}$ عامل مشترك بگیرید.

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{q+p}{q-p}} \quad \text{جواب:}$$

۱۴۷. باید مجموع زیر را محاسبه کنیم:

$$A = x \sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} + y \sqrt{\frac{(1+x^2)(1+z^2)}{1+y^2}} + z \sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}$$

ولی کافی است جمله اول را محاسبه کنیم و با تبدیل دوری حاصل جمله‌های دوم و سوم را بدست آوریم.

راه حل اول: در جمله اول بجای ۱، مقدارش $xy + yz + xz$ قرار می‌دهیم و عبارتهای داخل پرانتزها را تجزیه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x \sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} &= \\ &= x \sqrt{\frac{(xy+yz+xz+y^2)(xy+yz+xz+x^2)}{xy+yz+xz+x^2}} = \\ &= x \sqrt{\frac{(x+y)(y+z)(x+z)(y+z)}{(x+y)(x+z)}} = \\ &= x \sqrt{(y+z)^2} = x |y+z| \end{aligned}$$

و چون طبق فرض، مقادیر x و y و z مثبت‌اند، خواهیم داشت:

$$A = x(y+z) + y(x+z) + z(x+y) = 2(xy + yz + xz) = 2$$

راه حل دوم: فرض می‌کنیم:

$$x = \operatorname{tg} \alpha ; \quad y = \operatorname{tg} \beta ; \quad z = \operatorname{tg} \gamma$$

α و β و γ را زاویه‌های حاده در نظری می‌گیریم (x و y و z مقادیری مثبت هستند).

بنابراین داریم:

$$x \sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} = \operatorname{tg} \alpha \sqrt{\frac{(1+\operatorname{tg}^2 \beta)(1+\operatorname{tg}^2 \gamma)}{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}} =$$

$$= \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha \frac{1}{\cos \beta} \cdot \frac{1}{\cos \gamma} =$$

$$= \frac{\sin \alpha}{\cos \beta \cos \gamma} = \frac{\cos(\beta + \gamma)}{\cos \beta \cos \gamma} = \frac{\cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma}{\cos \beta \cos \gamma} = 1 - \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma$$

(چون $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma = 1$ است: $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ می‌شود)

و داریم: $(\sin \alpha = \cos(\beta + \gamma))$.

و بنابراین:

$$A = (1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma) + (1 - \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma) + (1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta) =$$

$$= 3 - (\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma) = 3 - 1 = 2$$

۱۴۸. به ترتیب داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{6} - (\sqrt{5} - 2)} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{5} - 2}{4\sqrt{5} - 3} =$$

$$= \frac{(4\sqrt{5} + 3)(\sqrt{6} + \sqrt{5} - 2)}{77}$$

۱۴۹. داریم:

$$\frac{3 + 4\sqrt{3}}{(\sqrt{6} + \sqrt{2}) - \sqrt{5}} = \frac{(3 + 4\sqrt{3})(\sqrt{6} + \sqrt{2} + \sqrt{5})}{3 + 4\sqrt{3}} =$$

$$= \sqrt{6} + \sqrt{5} + \sqrt{2}$$

۱۵۰. صورت و مخرج را در $\sqrt{2} - 1$ ضرب کنید.

جواب: $\sqrt{2} - 1$.

۱۵۱. به ترتیب داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{3 - 2} = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(9 + 3\sqrt{4} + 2\sqrt{2})}{23}$$

۱۵۲. جواب: $\sqrt{49} + \sqrt{35} + \sqrt{25} + \sqrt{7} + \sqrt{5} + 1$

۱۵۳. به ترتیب داریم:

$$\frac{2+\sqrt{3}}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})-(\sqrt{3}+1)} = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}+1)} =$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}+1)$$

۱۵۴. به ترتیب داریم:

$$\frac{2}{1+2\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{9}} = \frac{2(2\sqrt{2}-1+\sqrt{3}+\sqrt{9})}{8-(1-\sqrt{3}-\sqrt{9})^2} =$$

$$= \frac{2(2\sqrt{2}-1+\sqrt{3}+\sqrt{9})}{1-\sqrt{3}+\sqrt{9}} = \frac{2(2\sqrt{2}-1+\sqrt{3}+\sqrt{9})(1+\sqrt{3})}{1+3} =$$

$$= \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + 1$$

۱۵۵. فرض می‌کنیم:

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = \frac{c}{\gamma} = \frac{1}{\lambda}$$

و از آنجا: $\alpha = a\lambda$ ، $\beta = b\lambda$ و $\gamma = c\lambda$ که اگر بجای α و β و γ در کسر مفروض قرارار دهیم چنین می‌شود:

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{\lambda}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})} =$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(1+\sqrt{\lambda})}$$

بجای λ مقدارش $\frac{a+b+\gamma}{a+b+c}$ قرار می‌دهیم، کسر بصورت زیر در می‌آید:

$$\frac{\sqrt{a+b+c}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a+b+c}+\sqrt{a+b+\gamma})}$$

که گویا کردن مخرج آن مشکل نیست.

۱۵۶. ابتدا مجموع جمله‌های مخرج را محاسبه می‌کنیم (این مجموع را S

می‌گیریم):

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n^2 + 2n + 1$$

در این اتحاد به جای n به ترتیب $\sqrt{x}+1, \sqrt{x}+2, \dots, \sqrt{x}+10$ را قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned} (\sqrt{x}+1)^2 &= (\sqrt{x})^2 + 2(\sqrt{x}) + 1 \\ (\sqrt{x}+2)^2 &= (\sqrt{x}+1)^2 + 2(\sqrt{x}+1) + 1 \\ (\sqrt{x}+3)^2 &= (\sqrt{x}+2)^2 + 2(\sqrt{x}+2) + 1 \\ &\vdots \\ (\sqrt{x}+11)^2 &= (\sqrt{x}+10)^2 + 2(\sqrt{x}+10) + 1 \end{aligned} \right. \\
 & \hline
 (\sqrt{x}+11)^2 &= (\sqrt{x})^2 + 2S + 2[\sqrt{x} + (\sqrt{x}+1) + (\sqrt{x}+2) + \dots + (\sqrt{x}+10)] + 11
 \end{aligned}$$

مقدار داخل کروشه، مجموع جمله‌های متوالی يك تصاعد حسابی است و مساوی $11(\sqrt{x}+5)$ می‌شود.

S را از تساوی فوق بدست می‌آوریم:

$$S = 11[10\sqrt{x} + (x+35)]$$

و بنابراین کسر مفروض چنین می‌شود:

$$\frac{1}{11[10\sqrt{x} + (x+35)]} = \frac{x - 10\sqrt{x} + 35}{11(x^2 - 20x + 1225)}$$

۱۵۷. اگر مجموع جمله‌های مخرج را A فرض کنیم، داریم:

$$A = \sqrt[6]{32} + \sqrt[6]{16} + \sqrt[6]{8} + \sqrt[6]{4} + \sqrt[6]{2} + 1$$

که مجموع جمله‌های متوالی از يك تصاعد هندسی هستند. در این تصاعد

$a=1$ (جمله اول)، $q=\sqrt[6]{2}$ (قدرنسبت) و $n=6$ (تعداد جمله‌ها) است. بنابراین:

$$A = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{(\sqrt[6]{2})^6 - 1}{\sqrt[6]{2} - 1} = \frac{1}{\sqrt[6]{2} - 1}$$

جواب: $\sqrt[6]{2} - 1$

۱۵۸. مقدار کسر مثبت است، آنرا مساوی x فرض کنید و دوطرفه را مجذور کنید، جواب مثبت x حاصل کسر است.

جواب: $\sqrt{2}$

$$\frac{2(5+\sqrt{10})}{5} \quad \text{جواب: ۱۵۹}$$

$$3 - \sqrt{3} \quad \text{جواب: ۱۶۰}$$

$$\sqrt[2]{5(\sqrt{3}-1)} \quad \text{جواب: ۱۶۱}$$

$$\frac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2}) \quad \text{جواب: ۱۶۲}$$

۱۶۳. هر يك از رادیکالهای صورت و مخرج را جدا گانه به رادیکالهای ساده تبدیل کنید.

$$\frac{5\sqrt{2}}{3} \quad \text{جواب: ۱۶۴}$$

$$9 \quad \text{جواب: ۱۶۵}$$

۱۶۵. باید حد رادیکال را وقتی که تعداد رادیکالها بسمت بی نهایت میل می کنند پیدا کنیم. مقدار این حد را x می گیریم، در اینصورت داریم:

$$x^2 = a + \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots}}} = a + x ;$$

$$x^2 - x - a = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$$

و چون $x > 0$ است، داریم:

$$x = \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$$

برای اینکه حاصل x عددی گویا باشد، باید داشته باشیم:

$$1+4a=k^2 \Rightarrow a = \frac{k^2-1}{4}$$

و اگر فرض کنیم $k=2k'+1$ می شود:

$$a = \frac{(2k'+1)^2-1}{4} = k'^2 + k' = k'(k'+1)$$

یعنی برای گویا بودن x باید a حاصلضرب ۲ عدد متوالی باشد.

$$\left| a + \frac{1}{2} \sqrt{a} - \frac{2}{3} \right| \quad \text{جواب: ۱۶۶}$$

۱۶۷. به ترتیب داریم:

$$\sqrt{۷+۴\sqrt{۳}} = \sqrt{(۲+\sqrt{۳})^2} = ۲+\sqrt{۳};$$

$$\sqrt{۴۸-۱۰\sqrt{۷+۴\sqrt{۳}}} = \sqrt{۴۸-۱۰(۲+\sqrt{۳})} = \sqrt{۲۸-۱۰\sqrt{۳}} = \\ = \sqrt{(۵-\sqrt{۳})^2} = ۵-\sqrt{۳};$$

$$\sqrt{۵\sqrt{۳}+۵\sqrt{۴۸-۱۰\sqrt{۷+۴\sqrt{۳}}}} = \\ = \sqrt{۵\sqrt{۳}+۵(۵-\sqrt{۳})} = \sqrt{۲۵} = ۵;$$

$$\sqrt[3]{۴+\sqrt{۵\sqrt{۳}+۵\sqrt{۴۸-۱۰\sqrt{۷+۴\sqrt{۳}}}}} = \sqrt[3]{۴+۵} = ۳$$

$$|۳x\sqrt[3]{y}-۳\sqrt[3]{x}+۴\sqrt[3]{xy}-\sqrt[3]{y}| \quad \text{جواب: } ۱۶۸$$

۱۶۹. مخرج را S می‌گیریم، به ترتیب داریم:

$$S = \sqrt[6]{۱۲۸} - \sqrt[6]{۳۲} + \sqrt[6]{۸} + \sqrt[6]{۴} - \sqrt[6]{۱۶} - ۱ = \\ = (\sqrt[6]{۱۲۸} - \sqrt[6]{۱۶}) - (\sqrt[6]{۳۲} - \sqrt[6]{۴}) + (\sqrt[6]{۸} - ۱) = \\ = \sqrt[6]{۱۶}(\sqrt[6]{۸} - ۱) - \sqrt[6]{۴}(\sqrt[6]{۸} - ۱) + (\sqrt[6]{۸} - ۱) = \\ = (\sqrt[6]{۸} - ۱)(\sqrt[6]{۱۶} - \sqrt[6]{۴} + ۱) = (\sqrt[6]{۲} - ۱)(\sqrt[6]{۴} - \sqrt[6]{۲} + ۱)$$

بنابراین باید صورت و مخرج را در $(\sqrt[6]{۲} + ۱)(\sqrt[6]{۲} + ۱)$ ضرب کنیم.

$$\frac{A(\sqrt[6]{۲} + 1)(\sqrt[6]{۲} + 1)}{۳} \quad \text{جواب:}$$

۱۷۰. جمله‌های مخرج را بیک فرجه تبدیل کنید، به تصاعد هندسی هستند، مجموع جمله‌های مخرج چنین است:

$$S = \frac{\sqrt[۱۲]{۲۴۳} \left[\left(\sqrt[۱۲]{\frac{۲}{۳}} \right)^9 - ۱ \right]}{\sqrt[۱۲]{\frac{۲}{۳}} - ۱} = \frac{\sqrt[۱۲]{۲۴۳} \left(\sqrt[۱۲]{\frac{۲}{۳}} - ۱ \right)}{\frac{\sqrt[۱۲]{۲} - \sqrt[۱۲]{۳}}{\sqrt[۱۲]{۳}}} =$$

$$= \frac{\sqrt[6]{r} \left(\frac{\sqrt[12]{r}}{\sqrt[6]{r}} - 1 \right)}{\frac{\sqrt[6]{r}}{\sqrt[6]{r}} - \frac{\sqrt[12]{r}}{\sqrt[6]{r}}} = \frac{\sqrt[6]{r} - \sqrt[12]{r}}{\sqrt[6]{r} - \sqrt[12]{r}}$$

و بنابراین حاصل کسر چنین می‌شود:

$$\frac{\sqrt[6]{r} - \sqrt[12]{r}}{\sqrt[6]{r} - \sqrt[12]{r}} = (\sqrt[6]{r} + \sqrt[12]{r})(\sqrt[6]{r} - \sqrt[12]{r})$$

۱۷۱. داریم:

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{ax^r + by^r + cz^r} &= \sqrt[6]{\frac{ax^r}{x} + \frac{by^r}{y} + \frac{cz^r}{z}} = \\ &= \sqrt[6]{ax^r \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)} = x\sqrt[6]{a} \end{aligned}$$

و بهمین ترتیب:

$$\sqrt[6]{ax^r + by^r + cz^r} = y\sqrt[6]{b} = z\sqrt[6]{c}$$

فرض می‌کنیم:

$$\sqrt[6]{ax^r + by^r + cz^r} = x\sqrt[6]{a} = y\sqrt[6]{b} = z\sqrt[6]{c} = \lambda$$

از آنجا خواهیم داشت:

$$\sqrt[6]{a} = \frac{\lambda}{x}; \quad \sqrt[6]{b} = \frac{\lambda}{y}; \quad \sqrt[6]{c} = \frac{\lambda}{z}$$

و یا:

$$\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b} + \sqrt[6]{c} = \lambda \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = \lambda$$

یعنی:

$$\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b} + \sqrt[6]{c} = \sqrt[6]{ax^r + by^r + cz^r}$$

۱۷۲. حاصل کسر را M می‌نامیم و صورت و مخرج کسر را درمزدوج مخرج

ضرب می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$M = \frac{(a+b)x + \sqrt{(a^r - x^r)(x^r - b^r)}}{x^r + ab} =$$

$$= \frac{(a+b)\sqrt{ab} + \sqrt{(a^2-ab)(ab-b^2)}}{2ab} =$$

$$= \frac{(a+b)\sqrt{ab} + (a-b)\sqrt{ab}}{2ab} = \frac{2a\sqrt{ab}}{2ab} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$$

۱۷۳. جواب: $\frac{1}{\sqrt{xy}} + \sqrt[3]{\frac{xy}{ab}}$

۱۷۴. جواب: صفر

۱۷۵. داریم:

$$\sqrt{2+\sqrt{5}} \cdot \sqrt{-38+12\sqrt{5}} = \sqrt{2+\sqrt{5}} \cdot \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} =$$

$$= \sqrt{2+\sqrt{5}} \cdot 2\sqrt{5-2} = 1$$

بنابراین باید حاصل عبارت $A = \frac{1-mx}{1+mx} \cdot \sqrt{\frac{1+nx}{1-nx}}$ را به

ازای $x = \frac{1}{m} \sqrt{\frac{2m}{n} - 1}$ محاسبه کنیم.

$$\frac{1-mx}{1+mx} = \frac{1 - \sqrt{\frac{2m}{n} - 1}}{1 + \sqrt{\frac{2m}{n} - 1}} = \frac{m-n\sqrt{\frac{2m}{n} - 1}}{n-m};$$

$$\sqrt{\frac{1+nx}{1-nx}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{n}{m}\sqrt{\frac{2m}{n} - 1}}{1 - \frac{n}{m}\sqrt{\frac{2m}{n} - 1}}} = \frac{m+n\sqrt{\frac{2m}{n} - 1}}{n-m};$$

$$A = \frac{m-n\sqrt{\frac{2m}{n} - 1}}{n-m} \times \frac{m+n\sqrt{\frac{2m}{n} - 1}}{n-m} = 1$$

۱۷۶. عبارت را A می‌نامیم، داریم:

$$\begin{aligned}
 A &= \sqrt[n]{\frac{n^{\frac{n}{n+1}}}{x^{\frac{n}{n+1}} \left(\frac{n}{x^{\frac{n}{n+1}}} + a^{\frac{n}{n+1}} \right)}} + \\
 &+ \sqrt[n]{\frac{n^{\frac{n}{n+1}}}{a^{\frac{n}{n+1}} \left(a^{\frac{n}{n+1}} + x^{\frac{n}{n+1}} \right)}} - 1 = \\
 &= \sqrt[n]{\frac{n}{x^{\frac{n}{n+1}} + a^{\frac{n}{n+1}}} \left(\sqrt[n]{\frac{n}{x^{\frac{n}{n+1}}}} + \sqrt[n]{\frac{n}{a^{\frac{n}{n+1}}}} \right)} - 1 = \\
 &= \left(x^{\frac{n}{n+1}} + a^{\frac{n}{n+1}} \right)^{\frac{1}{n}} \left(x^{\frac{n}{n+1}} + a^{\frac{n}{n+1}} \right) - 1 = \\
 &= \left(x^{\frac{n}{n+1}} + a^{\frac{n}{n+1}} \right)^{\frac{n+1}{n}} - 1 = \\
 &= \left[\left(x^{\frac{n}{n+1}} - a^{\frac{n}{n+1}} \right) + a^{\frac{n}{n+1}} \right]^{\frac{n+1}{n}} - 1 = \\
 &= \left(x^{\frac{n}{n+1}} \right)^{\frac{n+1}{n}} - 1 = b - 1
 \end{aligned}$$

۱۷۷. عبارت را A می‌نامیم، داریم:

$$\begin{aligned}
 A &= \sqrt[n]{a^{n-k} x^k} \left(\sqrt[n]{\frac{a^k x^{n-k}}{a^{n-k} x^k}} + 1 - 2\sqrt[n]{b} \times \right. \\
 &\times \left. \sqrt[n]{\frac{x^n}{a^{n-2k} x^{2k}}} + b \right) = \\
 &= \sqrt[n]{a^{n-k} x^k} \left[\left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{n-2k}{n}} - 2\sqrt[n]{b} \left(\frac{x}{a} \right)^{\frac{n-2k}{n}} + 1 \right] + b
 \end{aligned}$$

از طرف دیگر داریم:

$$\frac{x}{a} = \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{b-a})^{\frac{2n}{n-2k}}}{a^{\frac{n}{n-2k}}};$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n-2k}{2n}} = \frac{\sqrt{b} - \sqrt{b-a}}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{b}{a} - 1} \quad \text{و}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt[n]{a^{n-k} x^k} \left[\left(\sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{b}{a} - 1} \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2 \sqrt{\frac{b}{a}} \left(\sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{b}{a} - 1} \right) + 1 \right] + b^2 = \\ &= \left(\frac{b}{a} - 2 \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot \sqrt{\frac{b}{a} - 1} + \frac{b}{a} - 1 - 2 \cdot \frac{b}{a} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sqrt{\frac{b}{a}} \cdot \sqrt{\frac{b}{a} - 1} + 1 \right) + b^2 = b^2 \end{aligned}$$

۱۷۸. چون $\frac{x+1}{x-1} = (2+\sqrt{3})^n$ ، بنابراین حاصل عبارت چنین است:

$$\begin{aligned} &\sqrt[n]{(x-1)^2} \left[\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \right)^2 + 1 - 2 \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \right] + 1 = \\ &= \sqrt[n]{(x-1)^2} [(2+\sqrt{3})^2 + 1 - 2(2+\sqrt{3})] + 1 = \\ &= \sqrt[n]{(x-1)^2} \times 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

۱۷۹. به ترتیب داریم:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n - \\ &- \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 \right) - \\ &- \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 \right) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{r+\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \times \frac{r-\sqrt{5}}{2} = \\ & - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \times \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \times \\ & \times \frac{(1-\sqrt{5})^2}{4} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

۰۱۸۰ داریم:

$$\sqrt{a} + \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{a+|b|}{2}} + \sqrt{\frac{a-|b|}{2}}$$

بنابراین اگر سمت چپ تساوی حکم را به A نشان دهیم، داریم:

$$\begin{aligned} A &= b\sqrt{2} \cdot \frac{2a + \sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{\frac{a+|b|}{2}} + \sqrt{\frac{a-|b|}{2}}} = \\ &= 2b \cdot \frac{2a + \sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a+|b|} + \sqrt{a-|b|}} = \\ &= 2b \cdot \frac{(2a + \sqrt{a^2 - b^2})(\sqrt{a+|b|} - \sqrt{a-|b|})}{(a+|b|)(a-|b|)} = \\ &= \frac{b}{|b|} \cdot [(a+|b|) + \sqrt{(a+|b|)(a-|b|)} + (a-|b|)] \times \\ &\times (\sqrt{a+|b|} - \sqrt{a-|b|}) = \\ &= \frac{b}{|b|} [(\sqrt{a+|b|})^2 - (\sqrt{a-|b|})^2] \end{aligned}$$

در حالتی که $b > 0$ باشد $|b| = b$ و حاصل عبارت همان طرف دومتساوی حکم می‌شود. در حالتی که $b < 0$ باشد $|b| = -b$ و بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} A &= -[(\sqrt{a-b})^2 - (\sqrt{a+b})^2] = \\ &= \sqrt{(a+b)^2} - \sqrt{(a-b)^2} \end{aligned}$$

که باز هم همان طرف دوم تساوی حکم است.

۰۱۸۱ معادله را می‌توان چنین نوشت:

$$(x^2 + 7x - 18)(x^2 + 7x + 6) + 108 = 0$$

که با فرض $x^2 + 7x = y$ به معادله‌ای درجه دوم تبدیل می‌شود.

$$x_{2,3} = \frac{-7 \pm \sqrt{49}}{2}, \quad x_2 = -7, \quad x_1 = 0: \text{جواب}$$

۱۸۲. معادله را به اینصورت می‌نویسیم:

$$\left[\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \right]^2 + \left[\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \right]^2 = 68$$

که با فرض $x + \frac{\sqrt{2}}{2} = y$ و باز کردن پرانتزها به معادله‌ای دو مجذوری تبدیل می‌شود.

$$\text{جواب: } x_2 = -2\sqrt{2}, \quad x_1 = \sqrt{2} \text{ و دوریسه موهومی،}$$

۱۸۳. معادله را بصورت زیر می‌نویسیم:

$$[(x+1)-1]^2 + [(x+1)+1]^2 = 2$$

با فرض $x+1=t$ و باز کردن پرانتزها، به معادله زیر می‌رسیم:

$$t^2 + 15t^4 + 15t^2 = 0 \Rightarrow t^2(t^2 + 15t^2 + 15) = 0$$

جواب: $x_1 = x_2 = -1$ و چهار ریشه موهومی.

۱۸۴. $x+4=t$ فرض کنید، پس از باز کردن پرانتزها خواهیم داشت:

$$t^2 + 3t - 4 = 0$$

که به صورت زیر قابل تجزیه است.

$$(t-1)(t^2 + t + 4) = 0$$

جواب: $x_1 = -3$ و دو جواب موهومی.

۱۸۵. به ترتیب داریم:

$$\begin{aligned} & [(x-2)(x+8)] \times [(x+1)(x+5)] \times \\ & \times [(x+2)(x+4)] + 476 = 0 \end{aligned}$$

و یا:

$$(x^2 + 6x - 16)(x^2 + 6x + 5)(x^2 + 6x + 8) + 476 = 0$$

فرض می‌کنیم: $x^2 + 6x = t$ ، پس از باز کردن پرانتزها خواهیم

داشت:

$$t^3 - 3t^2 - 168t - 164 = 0$$

$t = -1$ در این معادله صدق می‌کند و بنابراین بصورت زیر تجزیه

می‌شود:

$$(t+1)(t^2-4t-164)=0$$

و در نتیجه به سه معادله درجه دوم زیر می‌رسیم:

$$x^2+6x+1=0$$

$$x^2+6x+(\sqrt{168}-2)=0$$

$$x^2+6x-(\sqrt{168}+2)=0$$

$$\sqrt{x}-1=y \quad 0.186 \text{ فرض کنید.}$$

جواب: تنها جواب حقیقی معادله $x=9$ است.

0.187 ابتدا هریک از پرانتزها را تجزیه کنید:

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$$

$$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=120 \quad \text{و یا:}$$

و با فرض $x^2+5x=y$ معادله را حل کنید.

جواب: $x_1=1$, $x_2=6$ و دو ریشه موهومی.

0.188 به ترتیب داریم:

$$x(x^2+1)+2x^2(x+1)=42;$$

$$x(x+1)(x^2-x+1+2x)=42;$$

$$(x^2+x)(x^2+x+1)=42 \Rightarrow$$

$$(x^2+x)^2+(x^2+x)-42=0;$$

$$x^2+x=6, -7$$

$$(i=\sqrt{-1})x_{3,4}=\frac{-1\pm 3i\sqrt{3}}{2}, x_1=-3, x_2=2 \quad \text{جواب:}$$

0.189 از عبارت $x^4+6x^3+7x^2-6x-1$ جذر می‌گیریم، حاصل جذر

x^2+3x-1 و باقیمانده جذر مساوی -2 می‌شود و بنابراین معادله بصورت زیر در می‌آید:

$$(x^2+3x-1)^2-2=0$$

$$(x^2+3x+\sqrt{2}-1)(x^2+3x-\sqrt{2}-1)=0 \quad \text{و یا:}$$

که دیگر قابل حل است.

$$x_{۳,۴} = \frac{-۳ \pm \sqrt{۱۳ + ۴\sqrt{۲}}}{۲}; x_{۱,۲} = \frac{-۳ \pm \sqrt{۱۳ - ۴\sqrt{۲}}}{۲} \text{ جواب:}$$

۱۹۵. در سمت چپ تساوی مخارج مشترک می‌گیریم، پس از ساده کردن چنین می‌شود:

$$(a+x)\sqrt[n]{a+x} = a^nbx\sqrt[n]{x}$$

دو طرف تساوی را به توان n می‌رسانیم:

$$(a+x)^{n+1} = a^n b^n x^{n+1}$$

از دو طرف ریشه $(n+1)$ ام می‌گیریم. دو حالت وجود دارد:

اگر n عددی زوج باشد:

$$a+x = x\sqrt[n+1]{a^n b^n} \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt[n+1]{a^n b^n - 1}}$$

و اگر n عددی فرد باشد:

$$a+x = \pm x\sqrt[n+1]{a^n b^n}$$

در این حالت شرط وجود جواب حقیقی هم علامت بودن a و b است ($a \cdot b > 0$), در این صورت داریم:

$$x = \frac{a}{\pm \sqrt[n+1]{a^n b^n - 1}}$$

$$x = a^2 - \frac{(b-2a)^2}{271} \text{ جواب: } ۱۹۱$$

$$2x - 12 = t \text{ فرض کنید، می‌شود: } ۱۹۲$$

$$(x^2 + t)^2 = x^2(2x^2 + t)$$

که اگر نسبت به t منظم کنیم، می‌شود:

$$t^2 + x^2 \cdot t - 2x^2 = 0 \Rightarrow t = x^2 \text{ و } -2x^2$$

$$2x - 12 = x^2 \Rightarrow x_{۱,۲} = 1 \pm i\sqrt{11}$$

$$2x - 12 = -2x^2 \Rightarrow x_۳ = 2; x_۴ = -3$$

$$2x^2 - 6 = t \text{ فرض کنید و شبیه تمرین قبل عمل نمایید. } ۱۹۳$$

جواب: $x_{۳۳۳} = \pm \sqrt{۳}$, $x_۲ = \frac{۳}{۲}$, $x_۱ = -۲$

۱۹۴. پس از تبدیلهای عادی به معادله معکوسه زیر می‌رسیم:

$$۲x^۴ - ۹x^۳ - ۱۴x^۲ - ۹x + ۲ = ۰$$

جواب: $x_{۳۳۳} = \frac{1}{۳}(-۲ \pm i\sqrt{۷})$, $x_{۱۰۲} = ۳ \pm ۲\sqrt{۲}$

۱۹۵. از روش حل معادله‌های معکوسه استفاده کنید: دو طرف را بر $x^۲$

تقسیم کنید و $x + \frac{۲}{x} = t$ فرض کنید.

جواب: $x_۴ = \frac{۲}{۳}$, $x_۳ = ۳$, $x_۲ = ۲$, $x_۱ = ۱$

۱۹۶. دوطرف معادله را بر $\sqrt{x^۲ - ۱}$ تقسیم می‌کنیم ($m \neq \pm ۱$ است)،

می‌شود:

$$۲\sqrt{\frac{x+۱}{x-۱}} - ۲\sqrt{\frac{x-۱}{x+۱}} + ۳ = ۰$$

فرض می‌کنیم، $\sqrt{\frac{x+۱}{x-۱}} = y$ ، بدست می‌آید:

$$۲y - \frac{۲}{y} + ۳ = ۰ \Rightarrow ۲y^۲ + ۳y - ۲ = ۰ ;$$

$$y = ۲ , -\frac{1}{۲}$$

$$\sqrt{\frac{x+۱}{x-۱}} = ۲ \Rightarrow x = \frac{۲m+۱}{۲m-۱}$$

اگر m عددی زوج باشد ، تساوی $y = -\frac{1}{۲}$ ممکن نیست ، ولی در

حالت فرد بودن m داریم:

$$\sqrt{\frac{x+۱}{x-۱}} = -\frac{1}{۲} \Rightarrow x = \frac{۱-۲m}{۱+۲m}$$

۱۹۷. معادله مفروض را به اینصورت می‌نویسیم:

$$x^3 - 3abx + (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 0$$

واضح است که یکی از ریشه‌های این معادله $x = -(a+b)$ می‌باشد

و معادله بصورت زیر در می‌آید:

$$(x+a+b)[x^2 - (a+b)x + a^2 - ab + b^2] = 0$$

جواب: $x_1 = -(a+b)$ ، $x_{2,3} = \frac{1}{2}[a+b \pm i\sqrt{3}(a-b)]$

۱۹۸. اگر $a=0$ و یا $a=1$ باشد، معادله دارای دو ریشه مضاعف: $x=0$

و $x=1$ خواهد بود. ولی اگر $a \neq 0$ و $a \neq 1$ باشد، معادله نه ریشه صفر و

نه ریشه واحد ندارد. به سادگی دیده می‌شود که اگر x ریشه‌ای از این معادله

باشد $\frac{1}{a}$ و $1-a$ هم ریشه آن خواهد بود، از آنجا $\frac{1}{1-a}$ و $1-\frac{1}{a}$

و $\frac{1}{1-\frac{1}{a}}$ هم در معادله صدق خواهد کرد. وقتی که $a \neq 0$ و $a \neq 1$ باشد،

معادله از درجه ششم و دارای ۶ جواب است، یعنی کافی است یکی از این

جوابها را بدست آوریم. ولی $x=a$ در معادله صدق می‌کند، بنابراین جوابهای

معادله چنین است:

$$x_1 = a ; x_2 = \frac{1}{a} ; x_3 = 1-a ; x_4 = \frac{1}{1-a} ;$$

$$x_5 = \frac{a-1}{a} ; x_6 = \frac{a}{a-1}$$

۱۹۹. واضح است که $x=3$ ریشه معادله نیست، دوطرف معادله را بر

$(x-3)^2$ تقسیم می‌کنیم:

$$x^2 + \frac{(3x)^2}{(x-3)^2} = 16$$

سمت چپ تساوی را به مجذور يك دوجمله‌ای تبدیل می‌کنیم:

$$\left(x + \frac{3x}{x-3}\right)^2 = 16 + \frac{6x^2}{x-3}$$

$$\left(\frac{x^2}{x-3}\right)^2 - 6\left(\frac{x^2}{x-3}\right) - 16 = 0 ; \quad \text{و یا:}$$

$$\frac{x^2}{x-3} = 2, 8$$

جواب: $x_{3,4} = 2(2 \pm i\sqrt{2})$; $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{7}$

۲۰۰. معادله را نسبت به a منظم و به صورت زیر می نویسیم:

$$a^2 - 2(x^2 - 5x - 1)a + (x^4 - 10x^2 + 22x^2 + 12x) = 0$$

جوابهای a نسبت به x چنین خواهد بود:

$$a = x^2 - 6x ; a = x^2 - 4x - 2$$

هر يك از این جوابها ، خود نسبت به x از درجه دوم است و به سادگی

حل می شوند:

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{a+9} ; x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{a+6}$$

۲۰۱. اگر $\sqrt{3} = a$ فرض کنیم، معادله مفروض بصورت زیر در می آید:

$$x^2 + 2ax^2 + a^2x + a - 1 = 0$$

و یا:

$$x \cdot a^2 + (2x^2 + 1)a + (x^2 - 1) = 0$$

که اگر این معادله را نسبت به a حل کنیم، خواهیم داشت.

$$a = 1 - x ; -\frac{x^2 + x + 1}{x}$$

جواب: $x_{1,2} = \frac{-(\sqrt{3}+1) \pm \sqrt{12}}{2}$; $x_1 = 1 - \sqrt{3}$

۲۰۲. سمت چپ معادله مفروض را به ترتیب چنین می نویسیم:

$$x^5 - 5x^2 + 5x - 1 = (x^5 - 1) - 5x(x^2 - 1) =$$

$$= (x-1)(x^4 + x^2 - 2x^2 - 2x + 1) =$$

$$= \frac{1}{4}(x-1)[(4x^2 + 4x^2 + x^2) - 6(2x^2 + x) + 9 -$$

$$- 5(x^2 + 2x + 1)] = \frac{1}{4}(x-1)[(2x^2 + x - 3)^2 - 5(x+1)^2]$$

جواب: $x_{1,2} = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5} \pm (\sqrt{30} + 6\sqrt{5}))$, $x_1 = 3$

$$x_{۴,۵} = \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{5} \pm \sqrt{30 - 6\sqrt{5}})$$

۴۰۳. میدانیم که اگر $\frac{u}{v} = \frac{t}{z}$ باشد، می‌توان نوشت:

$$\frac{u+v}{u-v} = \frac{t+z}{t-z}$$

با این تبدیل، معادله مفروض بصورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{(x-a)^2 + (x-b)^2}{2(x-a)(x-b)} = \frac{2c^2 + 2}{2c^2 - 2}$$

یکبار دیگر از همان تبدیل استفاده می‌کنیم، می‌شود:

$$\frac{(x-a)^2 + (x-b)^2 + 2(x-a)(x-b)}{(x-a)^2 + (x-b)^2 - 2(x-a)(x-b)} = c^2$$

صورت و مخرج کسر سمت چپ معادله را می‌توان به‌مجذور دو جمله‌ای

تبدیل کرد:

$$\frac{(2x-a-b)^2}{(b-a)^2} = c^2 \Rightarrow \frac{2x-a-b}{b-a} = \pm c$$

جواب: $x_2 = \frac{1}{2}(ac - bc + a + b)$ ، $x_1 = \frac{1}{2}(bc - ac + a + b)$

۴۰۴. معادله را بهمین ترتیب و مثل يك معادله درجه دوم حل می‌کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} \Delta &= (3x^2 - 2x + 2)^2 - 4(2x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 6x - 3) = \\ &= x^4 + 8x^3 + 8x^2 - 32x + 16 = (x^2 + 4x - 4)^2 \end{aligned}$$

و بنابراین خواهیم داشت:

$$x = \frac{1}{2}[(3x^2 - 2x + 2) \pm (x^2 + 4x - 4)]$$

و از آنجا به دو معادله درجه دوم زیر می‌نویسیم:

$$x = 2x^2 + x - 1 ; x = x^2 - 3x + 3$$

جواب: $x_4 = 3$ ، $x_3 = 1$ ؛ $x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

۴۰۵. این معادله هم ارز معادله زیر است:

$$x(x+7)(x^4 + 2 \times 7x^3 + 3 \times 7^2x^2 + 2 \times 7^3x + 7^4) = 0$$

بنابراین دو ریشه معادله $x_1 = 0$ و $x_2 = -7$ است.

بین بقیه ریشه‌های معادله صفر وجود ندارد و بنابراین می‌توان فرض کرد :

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = y \quad (1)$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$x^4 + 2 \times yx^2 + 3 \times y^2x^2 + 2 \times y^2x + y^4 = y^2x^2(y^2 + 2y + 1)$$

بنابراین باید معادله $y^2 + 2y + 1 = 0$ را حل کرد که از آنجا

ریشه مضاعف $y = -1$ بدست می‌آید، این ریشه را در معادله (۱) قرار می‌دهیم، چنین می‌شود:

$$x^2 + 7x + 49 = 0$$

که داری دو ریشه موهومی زیر است:

$$x = \frac{1}{2}(-7 \pm 7i\sqrt{3}) \quad (i = \sqrt{-1})$$

جواب: $x_7 = x_8 = \frac{7}{2}(-1 + i\sqrt{3})$, $x_7 = 1$, $x_1 = 0$

$$x_5 = x_6 = \frac{7}{2}(-1 - i\sqrt{3})$$

۴۰۶. دوطرف معادله را بر x^2 تقسیم و $3x + \frac{4}{x} = y$ فرض کنید ، به دو معادله زیر می‌رسید :

$$3x^2 - x + 4 = 0$$

$$3x^2 - 4x + 4 = 0$$

هر چهار ریشه معادله موهومی است.

۴۰۷. دوطرف معادله را بر x^2 تقسیم و $2x + \frac{3}{x} = y$ فرض کنید ، به معادله زیر می‌رسید:

$$y^2 - 4y^2 - 17y + 60 = 0 ;$$

که به صورت زیر تجزیه می‌شود :

$$(y-2)(y-5)(y+4) = 0$$

و در نتیجه سه معادله درجه دوم زیر نسبت به x بدست می‌آید:

$$2x^2 - 3x + 3 = 0 \quad (\text{ریشه‌های موهومی})$$

$$2x^2 + 4x + 3 = 0 \quad (\text{ریشه‌های موهومی})$$

$$2x^2 - 5x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1, \frac{3}{2}$$

۲۰۸. سمت چپ معادله را به مجذور يك دو جمله‌ای تبدیل می‌کنیم:

$$\left(x + \frac{x}{x-1}\right)^2 - \frac{2x^2}{x-1} = 8 ;$$

و یا :

$$\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2 - 2\left(\frac{x^2}{x-1}\right) - 8 = 0 ,$$

$$x_3 = -1 - \sqrt{3} , x_4 = -1 + \sqrt{3} , x_1 = x_2 = 2 : \text{جواب}$$

۲۰۹. سمت چپ معادله را به مربع يك دو جمله‌ای تبدیل می‌کنیم:

$$[x(1+x) + x]^2 = 2x^2(1+x) + 8(1+x)^2 ;$$

و یا :

$$x^2(x+2)^2 = 2(x+1)(x+2)^2$$

و از آنجا :

$$(x+2)^2(x^2 - 2x - 2) = 0$$

$$x_3, x_4 = 1 \pm \sqrt{3} , x_1 = x_2 = -2 : \text{جواب}$$

۲۱۰. سمت چپ معادله را می‌توان چنین نوشت:

$$(1-x^2)^2 + 4x^2$$

و بنابراین معادله به صورت زیر در می‌آید:

$$(1-x^2)^2 - 4x(1-x^2) + 4x^2 = 0$$

و یا:

$$[(1-x^2) + 2x]^2 = 0$$

$$x_3 = x_4 = -(\sqrt{2} + 1) , x_1 = x_2 = \sqrt{2} - 1 : \text{جواب}$$

۲۱۱. پس از گویا کردن معادله جواب $x = \frac{(a-1)^2}{4}$ بدست می‌آید .

آزمایش درستی جواب: اگر مقدار x را در معادله قرار دهیم، بالاخره به رابطه زیر می‌رسیم:

$$|a+1| + |a-1| = 2a$$

و واضح است که این تساوی وقتی برقرار است که $a \geq 1$ باشد.

جواب: به ازای $a \geq 1$ داریم: $x = \frac{1}{4}(a-1)^2$ و به ازای $a < 1$

معادله جواب ندارد.

۲۱۲. معادله مفروض را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{(\sqrt{a+x})^2}{ax} = \sqrt{x} \Rightarrow (a+x)^{\frac{2}{3}} = ax^{\frac{2}{3}}$$

دو طرف را به توان $\frac{3}{2}$ می رسانیم، بدست می آید:

$$a+x = a^{\frac{2}{3}}x \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt[3]{a^2}-1}$$

جواب: وقتی که $-1 < a < 0$ یا $a > 1$ باشد، داریم:

$$x = \frac{a}{\sqrt[3]{a^2}-1}$$

و وقتی که $a < -1$ یا $0 \leq a < 1$ باشد، معادله جواب ندارد.

۲۱۳. جواب: $x = 17$

۲۱۴. پس از گویا کردن معادله، به معادله زیر می رسیم:

$$(x-1)[12x(2x-3)-27(x-1)^2] = 0$$

جواب: $x_1 = 1$ ، $x_2 = 3$.

۲۱۵. جواب: $x_1 = a$ ، $x_2 = b$ ، $x_3 = \frac{a+b}{2}$

۲۱۶. جواب: $x_1 = 1$ ، $x_2 = -\frac{27}{8}$

۲۱۷. جواب: $x_1 = -a$ ، $x_2 = 1-a$

۲۱۸. ابتدا معادله را چنین می نویسیم:

$$(6x+7)^2 \times \frac{1}{12}(6x+8)(6x+6) = 6$$

با فرض: $6x+7 = y$ بدست می آید:

$$y^2(y+1)(y-1) = 72 \Rightarrow y^4 - y^2 - 72 = 0 ;$$

$$\text{جواب: } x_{۲,۴} = \frac{-۷ \pm ۲i\sqrt{۲}}{۶}, \quad x_۲ = -\frac{۵}{۳}, \quad x_۱ = -\frac{۲}{۳}$$

$$۲۱۹. \text{ فرض کنید: } \sqrt[۵]{(۷x-۳)^۲} = y$$

$$\text{جواب: } x_۲ = ۵, \quad x_۱ = \frac{۲}{۷}$$

۲۲۰. چون جوابها رادرجوزه عددهای حقیقی می‌خواهیم، باید داشته باشیم:

$$\frac{۱+bx}{۱-bx} > ۰ \Rightarrow (۱+bx)(۱-bx) > ۰ \Rightarrow x^۲ < \frac{۱}{b^۲}$$

از طرف دیگر واضح است که باید داشته باشیم:

$$\frac{۱-ax}{۱+ax} > ۰ \Rightarrow (۱-ax)(۱+ax) > ۰ \Rightarrow x^۲ < \frac{۱}{a^۲}$$

اگر این شرطها برقرار نباشد، معادله دارای جواب نیست. اگر فرض کنیم که این شرطها برقرار باشد، دو طرف معادله مثبت می‌شود و می‌توان دو طرف آنرا مجذور کرد:

$$\left(\frac{۱-ax}{۱+ax}\right)^۲ \times \frac{۱+bx}{۱-bx} = ۱$$

با حل این معادله، جوابهای زیر بدست می‌آید:

$$x_۱ = ۰; \quad x_۲ = \sqrt{\frac{۲a-b}{a^۲b}}; \quad x_۳ = -\sqrt{\frac{۲a-b}{a^۲b}}$$

ریشه اول در معادله صدق می‌کند. برای ریشه‌های دوم و سوم: اولاً

برای حقیقی بودن ریشه‌ها باید داشته باشیم:

$$\frac{۲a-b}{a^۲b} > ۰ \Rightarrow \frac{۲a}{b} - ۱ > ۰ \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{۱}{۲}$$

ثانیاً باید شرطهای $x^۲ < \frac{۱}{b^۲}$ و $x^۲ < \frac{۱}{a^۲}$ برقرار باشد:

$$x^۲ = \frac{۲a-b}{a^۲b} < \frac{۱}{a^۲} \Rightarrow \frac{۲a-b}{b} < ۱ \Rightarrow \frac{a}{b} < ۱$$

یعنی باید داشته باشیم:

$$\frac{۱}{۲} < \frac{a}{b} < ۱$$

در اینصورت شرط $x^2 < \frac{1}{b^2}$ خود بخود برقرار است، زیرا:

$$x^2 - \frac{1}{b^2} = \frac{2a-b}{a^2b} - \frac{1}{b^2} = -\frac{(a-b)^2}{a^2b^2} < 0.$$

(زیرا $a \neq b$ است).

۲۲۱. فرض می‌کنیم:

$$\sqrt[5]{16 + \sqrt{x}} = u ; \sqrt[5]{16 - \sqrt{x}} = v$$

در اینصورت $u + v = 2$ می‌شود. دو طرف این معادله را به توان ۵

می‌رسانیم، بدست می‌آید:

$$v^5 + v^5 + 5uv(u+v)(u^4 - uv + v^4) + 10u^4v^4(u+v) = 32$$

و یا:

$$u^5 + v^5 + 5uv[(u+v)^4 - 4uv](u+v) + 10u^4v^4(u+v) = 32$$

اکنون اگر قرار دهیم: $u + v = 2$ و

$$u^5 + v^5 = (16 + \sqrt{x}) + (16 - \sqrt{x}) = 32$$

بدست می‌آید:

$$32 + 10uv(4 - 2uv) + 20u^4v^4 = 32 ;$$

و یا:

$$uv(4 - uv) = 0$$

$$a) \quad u = 0 \Rightarrow \sqrt[5]{16 + \sqrt{x}} = 0 \Rightarrow 16 + \sqrt{x} = 0$$

که غیرممکن است.

$$b) \quad v = 0 \Rightarrow \sqrt[5]{16 - \sqrt{x}} = 0 \Rightarrow x = 256$$

$$c) \quad 4 - uv = 0 \Rightarrow uv = 4$$

و باید دستگاه زیر را حل کنیم:

$$uv = 4 ; u + v = 2$$

$$u(2 - u) = 4 \Rightarrow u = 1 \pm i\sqrt{3} ;$$

و چون $u = \sqrt[5]{16 + \sqrt{x}}$ باید مقداری حقیقی باشد، در اینحالت هم

جواب نداریم.

۲۲۲. اگر n عددی فرد باشد، n^2 هم عددی است فرد و ریشه $(n+1)$ ام $x^n a^n$ در حالت $x < 0$ موهومی است. بنابراین در حالت فرد بودن n ، فرض می‌کنیم $x > 0$. در حالت زوج بودن n مقدار x می‌تواند هر عدد حقیقی دلخواه باشد، در هر دو حالت b باید عددی مثبت باشد، زیرا در حالت زوج بودن، هر دورادیکال سمت چپ تساوی مثبت و در حالت فرد بودن n ، مقادیر زیر رادیکالها مثبت است.

برای حل معادله، ابتدا فرض می‌کنیم که n عددی فرد باشد، بنابراین این $x > 0$ است و معادله را می‌توان به ترتیب چنین نوشت:

$$x^{\frac{n}{n+1}} \sqrt[n]{\frac{n}{x^{n+1}} + a^{\frac{n}{n+1}}} + a^{\frac{n}{n+1}} \sqrt[n]{a^{\frac{n}{n+1}} + x^{\frac{n}{n+1}}} = b;$$

$$\left(x^{\frac{n}{n+1}} + a^{\frac{n}{n+1}}\right) \sqrt[n]{\frac{n}{x^{n+1}} + a^{\frac{n}{n+1}}} = b;$$

$$\left(x^{\frac{n}{n+1}} + a^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}} = b; \quad x^{\frac{n}{n+1}} + a^{\frac{n}{n+1}} = b^{\frac{n}{n+1}};$$

$$x^{\frac{n}{n+1}} = b^{\frac{n}{n+1}} - a^{\frac{n}{n+1}} \Rightarrow x = \left(b^{\frac{n}{n+1}} - a^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}}$$

و برای اینکه این جواب قابل قبول باشد باید $b \geq a$ باشد.

از همین حل روشن می‌شود که اگر n عددی زوج باشد، دو جواب خواهیم داشت:

$$x_{1,2} = \pm \left(b^{\frac{n}{n+1}} - a^{\frac{n}{n+1}}\right)^{\frac{n+1}{n}}$$

۲۲۳. با توجه به شرط $n > k > 0$ ، معادله یک جواب $x_1 = 0$ دارد. حالا

اگر $x \neq 0$ فرض کنیم، می‌توانیم دو طرف معادله را بر $\sqrt[n]{a^{n-k} \cdot x^k}$ تقسیم کنیم، در اینصورت به معادله درجه دوم زیر می‌رسیم:

$$\sqrt[n]{a\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n-k}{n}}} - \sqrt[n]{b\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n-k}{n}}} + \sqrt[n]{a} = 0.$$

که با حل آن بدست می آید :

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n-2k}{2n}} = \frac{\sqrt{b} \pm \sqrt{b-a}}{\sqrt{a}} \Rightarrow \frac{x}{a} = \left(\frac{\sqrt{b} \pm \sqrt{b-a}}{\sqrt{a}}\right)^{\frac{2n}{n-2k}}$$

$$x_{2,3} = a^{\frac{2k}{2k-n}} (\sqrt{b} \pm \sqrt{b-a})^{\frac{2n}{n-2k}}$$

در حالت $n=2k$ این محاسبه‌ها مفهوم خود را از دست می‌دهد و تنها جواب $x=0$ باقی می‌ماند. در حقیقت در این حالت معادله بصورت $2\sqrt{ax}=2\sqrt{bx}$ در می‌آید که با توجه به اینکه $a \neq b$ است بجز $x=0$ جواب دیگری ندارد، ضمناً با توجه به مقدار سمت راست معادله اصلی، روشن است که باید $x > 0$ باشد و از این مطلب هم‌ضمن محاسبه استفاده شده است. شرط $b > a$ هم حقیقی بودن ریشه‌های x_2 و x_3 را تضمین می‌کند.

۲۲۴. دوطرف معادله رادر $\sqrt[n]{\frac{a+x}{x^2}}$ ضرب می‌کنیم، به ترتیب بدست می‌آید:

$$\frac{1}{x^2} \sqrt[n]{\frac{a^2 - x^2}{x^2}} - \frac{1}{a^2} \sqrt[n]{\frac{a^2 - x^2}{x^2}} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{a^2 - x^2}{a^2 x^2} \sqrt[n]{\frac{a^2 - x^2}{x^2}} = 1 ; \left(\frac{a^2 - x^2}{x^2}\right)^{\frac{n+1}{n}} = a^2 \Rightarrow$$

$$\frac{a^2 - x^2}{x^2} = a^{\frac{2n}{n+1}} \Rightarrow x = \pm \frac{a}{\sqrt[n+1]{1 + a^{\frac{2n}{n+1}}}}$$

در حالتی که n عددی زوج باشد، باید $-a < x \leq a$ و $a > 0$ باشد، در این حالت تمام عملهایی که انجام دادیم صحیح است و جواب هم با شرطهای مسأله می‌سازد زیرا داریم:

$$\sqrt[n+1]{1 + a^{\frac{2n}{n+1}}} > 1$$

در حالت فرد بودن n به سادگی روشن می‌شود که هیچ شرطی بجز

$a \neq 0$ لازم نیست.

۰۲۲۵. به ترتیب داریم (با فرض $a > 0$):

$$\sqrt[n]{\frac{n}{\sqrt[n]{a}} - \frac{n}{\sqrt[n]{x}}} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{x}} - \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \right) = \sqrt[n]{\frac{2n}{x}}$$

$$\sqrt[n]{\frac{\frac{n}{\sqrt[n]{a}} - \frac{n}{\sqrt[n]{x}}}{\frac{n}{\sqrt[n]{x}}}} \cdot \frac{\frac{n}{\sqrt[n]{a}} - \frac{n}{\sqrt[n]{x}}}{\frac{n}{\sqrt[n]{x}}} = \sqrt[n]{\frac{2n}{x}};$$

$$\left(\frac{\frac{n}{\sqrt[n]{a}} - \frac{n}{\sqrt[n]{x}}}{\frac{n}{\sqrt[n]{x}}} \right)^{\frac{r}{2}} = a^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \frac{\frac{n}{\sqrt[n]{a}} - \frac{n}{\sqrt[n]{x}}}{\frac{n}{\sqrt[n]{x}}} = a^{\frac{2}{r}}$$

و از آنجا: $x = a : \left[1 + a^{\frac{2n}{r}} \right]^n$

اگر مثل تمرین ۲۲۴ استدلال کنیم، نتیجه می‌گیریم که این تنها جواب x است.

۰۲۲۶. معادله نسبت به a از درجه دوم و قابل حل است.

جواب: $x_{1,2} = \frac{a - 2 \pm \sqrt{a^2 - 4a + 8}}{2}$; $x_1 = \frac{a + 3}{2}$

۰۲۲۷. میدانیم که $[a]$ یعنی بزرگترین عدد صحیحی که از a تجاوز نکند.

واضح است که معادله به ازای مقادیری از x که به ازای آنها

$$\frac{x^3 - 2}{3} < x - 1 \quad \text{یا} \quad \frac{x^3 - 2}{3} > x + 1$$

نامعادله اول $x > 3$ وجود دارد، زیرا داریم:

$$\frac{x^3 - 2}{3} > x + 1 \Rightarrow x^3 > 3x + 5 \Rightarrow$$

$$x^2(x - 3) > -3x^2 + 3x + 5$$

به ازای $x > 3$ سمت چپ نامساوی غیرمنفی و سمت راست نامساوی منفی

است. به این ترتیب مقادیر $x > 3$ جزو جوابهای این نامعادله است.

ثابت می‌کنیم که $x \leq -2$ بین جوابهای $x - 1 \leq \frac{x^2 - 2}{3}$ است ،

زیرا در اینحالت داریم:

$$x^2 \leq 3x - 1 \Rightarrow x^2(x+2) \leq 2x^2 + 3x - 1$$

به ازای $x \leq -2$ ، سمت چپ نامعادله مثبت نیست ، در حالیکه سمت راست نامعادله مثبت است .

بنابراین جوابهای معادله مفروض را باید در فاصله $-2 < x < 3$ جستجو کرد ، برای این منظور باید دستگاههای نامعادلههای زیر را حل کرد :

$$۱) \begin{cases} -2 < \frac{x^2 - 2}{3} < -1 \\ -2 < x < -1 \end{cases} ; \quad (۲) \begin{cases} -1 \leq \frac{x^2 - 2}{3} < 0 \\ -1 \leq x < 0 \end{cases} ;$$

$$۳) \begin{cases} 0 \leq \frac{x^2 - 2}{3} < 1 \\ 0 \leq x < 1 \end{cases} ; \quad ۴) \begin{cases} 1 \leq \frac{x^2 - 2}{3} < 2 \\ 1 \leq x < 2 \end{cases} ;$$

$$۵) \begin{cases} 2 \leq \frac{x^2 - 2}{3} < 3 \\ 2 < x < 3 \end{cases}$$

دستگاه (۳) دارای جواب نیست وجوابهای بقیه دستگاهها چنین است:

$$-\sqrt[3]{4} < x < -1 ; -1 \leq x < 0 ;$$

$$\sqrt[3]{5} \leq x < 2 ; 2 \leq x < \sqrt[3]{11}$$

$$\text{جواب: } -\sqrt[3]{4} < x < 0 ; \sqrt[3]{5} \leq x < \sqrt[3]{11}$$

۴۴۸. معادله مفروض را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(x+1)^4 - 6(x+1)^2 + a + 5 = 0 ;$$

$$x = -1 \pm \sqrt{3 \pm \sqrt{4-a}}$$

(۱) اگر $a > 4$ باشد ، معادله ریشه حقیقی ندارد .

(۲) اگر $-5 < a < 4$ باشد ، معادله چهار ریشه حقیقی دارد .

(۳) اگر $a < -5$ باشد، معادله دارای دو ریشه حقیقی است:

$$x = -1 \pm \sqrt{3 + \sqrt{4-a}}$$

(۴) اگر $a = 4$ باشد، معادله دارای دو ریشه مضاعف است:

$$x_1 = x_2 = -1 + \sqrt{3} ; x_3 = x_4 = -1 - \sqrt{3}$$

(۵) اگر $a = -5$ باشد، معادله یک ریشه مضاعف و دو ریشه ساده دارد:

$$x_1 = x_2 = -1 ; x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{6}$$

۲۲۹. میدانیم که حاصلضرب قدر مطلقهای چند عدد جبری برابر است با قدر مطلق حاصلضرب آنها، بنابراین معادله مفروض به صورت زیر می‌آید:

$$|x^2 + 7x^2 - 36| = |x^2 + 14x^2 + 49x + 36|$$

و این معادله هم ارز دو معادله زیر است:

$$۱) x^2 + 7x^2 - 36 = x^2 + 14x^2 + 49x + 36 ;$$

$$7x^2 + 49x + 72 = 0$$

$$۲) x^2 + 7x^2 - 36 = -(x^2 + 14x^2 + 49x + 36) ;$$

$$2x^3 + 21x^2 + 49x = 0$$

با حل این دو معادله، ریشه‌های معادله مفروض بدست می‌آید:

$$x_{1,2} = \frac{-49 \pm \sqrt{385}}{14} ; x_3 = 0 ; x_4 = -7 ; x_5 = -\frac{7}{2}$$

۲۳۰. داریم:

$$x^2 - (a+1)x - x + \sqrt{a+1} = 0 ;$$

$$x(x - \sqrt{a+1})(x + \sqrt{a+1}) - (x - \sqrt{a+1}) = 0 ;$$

$$(x - \sqrt{a+1})(x^2 + x\sqrt{a+1} - 1) = 0$$

و از آنجا:

$$x_1 = \sqrt{a+1} ; x_{2,3} = \frac{-\sqrt{a+1} \pm \sqrt{a+5}}{2}$$

۲۳۱. معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$2(\sqrt{p+x} + \sqrt{p-x}) = (p+x) - (p-x)$$

واضح است که $x=0$ جواب معادله نیست (زیرا $p > 0$ است). بنابراین می‌توان معادله را به $\sqrt{p+x} + \sqrt{p-x}$ ساده کرده. در این صورت بدست می‌آید:

$$\sqrt{p+x} - \sqrt{p-x} = 2$$

با مجذور کردن دو طرف و پس از تبدیلهای ساده خواهیم داشت:

$$x = 2\sqrt{p-1}$$

مقدار x را در سمت چپ معادله قرار دهیم، بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \sqrt{p+2\sqrt{p-1}} + \sqrt{p-2\sqrt{p-1}} &= \\ &= |\sqrt{p-1}+1| + |\sqrt{p-1}-1| = \\ &= \begin{cases} 2 & 1 \leq p \leq 2 \\ 2\sqrt{p-1} & (p \geq 2) \end{cases} \end{aligned}$$

جواب: به ازای $p > 2$ ، $x = 2\sqrt{p-1}$ و به ازای $p < 2$ معادله

جواب ندارد.

۰۳۳۲. فرض می‌کنیم:

$$a+b=\alpha+\beta \quad ; \quad a+c=\alpha+\gamma$$

$$c+d=\alpha-\beta \quad ; \quad b+d=\alpha-\gamma$$

از آنجا بدست می‌آید:

$$\alpha = \frac{1}{4}(a+b+c+d) \quad ; \quad \beta = \frac{1}{4}(a+b-c-d);$$

$$\gamma = \frac{1}{4}(a-b+c-d)$$

که با فرض $x+\alpha=y$ ، معادله مفروض به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{(y+\beta)^5 + (y-\beta)^5}{(y+\gamma)^5 + (y-\gamma)^5} = \frac{\beta^5}{\gamma^5}$$

که پس از تبدیلهای ساده و با توجه به اینکه $y \neq 0$ است، بدست می‌آید:

$$(\gamma^5 - \beta^5)y^4 + 10(\gamma^3 - \beta^3)\beta^2\gamma^2y^2 + 5(\gamma - \beta)\beta^4\gamma^4 = 0$$

که معادله‌ای است دو مجذور و قابل حل.

توضیح: اگر سمت راست معادله مفروض به صورت γ^2 : α^2 باشد، معادله اخیر به صورت زیر در می‌آید:

$$(\gamma^2 - \beta^2)y^4 + 5(\gamma^2\beta^2 - \beta^2\gamma^4) = 0$$

که با فرض $\gamma \neq \pm\beta$ بدست می‌آید:

$$y^4 = 5\beta^2\gamma^2$$

$$x = -\frac{1}{\gamma}(a+b+c+d) \pm \frac{1}{\gamma} \sqrt{5(a+b-c-d)^2(a-b+c-d)^2}$$

۲۳۳. معادله مفروض را می‌توان چنین نوشت:

$$2 + \frac{3y}{2x} = \left[1 + \frac{y^2}{x^2} \right]$$

واضح است که $\frac{3y}{2x} = k$ عددی است صحیح و از طرف دیگر می‌توان

نوشت:

$$\left[1 + \frac{y^2}{x^2} \right] = 1 + \left[\frac{y^2}{x^2} \right]$$

و بدست می‌آید:

$$1 + k = \left[\frac{y^2}{x^2} \right] = \left[\frac{4k^2}{9} \right]$$

و از آنجا:

$$1 + k < \frac{4k^2}{9} < 2 + k$$

و از آنجا دو نامعادله زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} 4k^2 - 9k - 9 > 0 \\ 4k^2 - 9k - 18 < 0 \end{cases}$$

از معادله اول دستگاه بدست می‌آید: $k > 3$ یا $k < -\frac{3}{4}$ و از معادله

دوم دستگاه (با $0/1$ تقریب): $-1/2 < k < 3/6$

بنابراین باید داشته باشیم:

$$-1/2 < k < 0/75 \text{ یا } 3 < k < 3/6$$

که با توجه به اینکه k عددی است صحیح، داریم:

$$k = -1 ; k = 3$$

و بالاخره:

$$y = -\frac{2}{3}x ; y = 2x$$

که در آن x عدد حقیقی دلخواه و مخالف صفر است.

۰.۲۳۴ اگر فرض کنیم: $\frac{15x-7}{5} = t$ ، معادله مفروض به صورت زیر در می‌آید:

$$\left[\frac{30t+117}{120} \right] = t \Rightarrow \left[-\frac{10t+39}{40} \right] = t$$

و از معادله اخیر نتیجه می‌شود.

$$0 < \frac{10t+39}{40} - t < 1$$

با حل این دستگاه نامعادله زیر بدست می‌آید:

$$-\frac{1}{30} < t < \frac{13}{10}$$

و چون t عددی است صحیح، جوابهای $t=0$ و $t=1$ را قبول دارد و از آنجا:

$$\frac{15x-7}{5} = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{7}{15}$$

$$\frac{15x-7}{5} = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{4}{5}$$

۰.۲۳۵ بعد از بازکردن پرانتزها معادله به صورت زیر در می‌آید:

$$11x^2 - 2(1+2+3+\dots+n)x^1 + 3(1^2+2^2+3^2+\dots+n^2)x - (1^3+2^3+3^3+\dots+n^3) = 0$$

از طرف دیگر می‌دانیم:

$$1+2+3+\dots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3}n^2(n+1)^2$$

و بنابراین معادله درجه سوم به صورت زیر در می‌آید:

$$4x^2 - 6(n+1)x^2 + 2(n+1)(2n+1)x - n(n+1)^2 = 0 \quad (1)$$

می‌دانیم معادله $ax^2 + bx^2 + cx + d = 0$ با تبدیل $x = y - \frac{b}{2a}$

به معادله درجه سوم فاقد جمله درجه دوم است تبدیل می‌شود. اگر این تبدیل را در مورد معادله (۱) انجام دهیم، یعنی فرض کنیم

$$x = y - \frac{n+1}{2}$$

به معادله زیر می‌رسیم:

$$4y^2 + (n^2 - 1)y = 0$$

$$y_1 = 0 ; y_{2,3} = \frac{1}{4}\sqrt{1 - n^2}$$

و بنابراین:

$$x_1 = \frac{1}{4}(n+1) ; x_{2,3} = \frac{1}{4}(n+1 \pm \sqrt{1 - n^2})$$

ضمناً روشن است که جوابهای x_2 و x_3 موهومی‌اند، زیرا n عددی است صحیح و مثبت.

در حالت $n=1$ معادله ریشه مکرر از مرتبه سوم دارد:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1$$

۲۳۶. با فرض $\sqrt{2} = a$ می‌توان معادله مفروض را چنین نوشت:

$$a^2 - (2x^2 + 1)a + (x^4 - x) = 0 \Rightarrow$$

$$a_1 = x^2 + x + 1, a_2 = x^2 - x$$

که اگر دوباره $a = \sqrt{2}$ بگیریم به دو معادله درجه دوم زیر می‌رسیم:

$$x^2 + x + 1 - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{4\sqrt{2} - 3}}{2}$$

$$x^2 - x - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{4\sqrt{2} + 1}}{2}$$

۲۳۷. می‌توان با تجزیه سمت چپ تساوی‌ویا با فرض $\sqrt{2} = a$ معادله را حل کرد.

$$x_{۲,۳} = \frac{1 \pm \sqrt{4\sqrt{2}+1}}{2}, \quad x_1 = \sqrt{2} \quad \text{جواب:}$$

۲۳۸. معادله را به این صورت می نویسیم :

$$2x^2 + (2-1)x + \sqrt{2} = 0$$

که اگر $\sqrt{2} = a$ فرض کنیم ، می شود:

$$a^2 x^2 + (a^2 - 1)x + a = 0$$

این معادله نسبت به a از درجه دوم است و جوابهای آن چنین می شود:

$$a_1 = \frac{x}{x^2 + 1} \quad \text{و} \quad a_2 = -\frac{1}{x}$$

که اگر $a = \sqrt{2}$ بگیریم جوابهای x بدست می آید:

$$x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_{۲,۳} = \frac{1 \pm i\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \quad (i = \sqrt{-1})$$

۲۳۹. $\sqrt{3} = a$ فرض کنید.

$$x_{۱,۲} = \frac{-1 \pm \sqrt{4\sqrt{3}+1}}{2} \quad \text{جواب:}$$

$$x_{۳,۴} = \frac{1 \pm \sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2}$$

۲۴۰. اگر $a = 3$ فرض کنیم ، معادله به اینصورت در می آید:

$$\sqrt{a + \sqrt{x}} = x - a \Rightarrow a + \sqrt{x} = (x - a)^2$$

که اگر نسبت به a منظم کنیم ، بدست می آید:

$$a^2 - (2x+1)a + (x^2 - \sqrt{x}) = 0$$

جوابهای این معادله چنین است:

$$a_1 = x - \sqrt{x} \quad \text{و} \quad a_2 = x + \sqrt{x} + 1$$

a_2 در معادله $\sqrt{a + \sqrt{x}} = x - a$ صدق نمی کند ، زیرا برای

آن داریم :

$$\sqrt{x+2\sqrt{x}+1} = -(\sqrt{x}+1) \Rightarrow \sqrt{x}+1 = -(\sqrt{x}+1)$$

که ممکن نیست . ولی a_1 در معادله اصلی صدق می کند . اگر بجای

مقدارش ۳ را قرار دهیم:

$$x - \sqrt{x} - 3 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

که جواب منفی برای $\sqrt{x}$ قابل قبول نیست، به این ترتیب تنها جواب معادله چنین می‌شود:

$$x = \frac{1}{4}(7 + \sqrt{13})$$

۲۴۱. شبیه تمرین قبل $\sqrt{5} = a$ فرض کنید.

$$x = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\sqrt{5}}}{2} \quad \text{جواب:}$$

۲۴۲. معادله را نسبت به $\sin x$ منظم می‌کنیم، اگر عامل $\sin^2 x$ را، که جواب $x = k\pi$ دارد، از آن خارج کنیم، بقیه ریشه مضاعف $\sin x = \frac{1}{2}$ (با جواب $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi$) دارد که اگر آنرا بر $(2\sin x - 1)^2$ تقسیم کنیم و در خارج قسمت $\sin x = t$ بگیریم، به معادله درجه سوم زیر می‌رسیم:

$$f(t) = 16t^3 + 12t^2 - 16t - 13 = 0 \quad (1)$$

در این معادله داریم:

$$f(1) = 16 + 12 - 16 - 13 = -1 < 0$$

$$f(2) = 128 + 48 - 32 - 13 = 131 > 0$$

و بنابراین یکی از ریشه‌های معادله (۱) بین ۱ و ۲ قرار دارد: $1 < t < 2$.

از طرف دیگر در معادله (۱) با تبدیل $t = y - \frac{1}{4}$ به این معادله می‌رسیم:

$$y^3 - \frac{19}{16}y - \frac{17}{32} = 0$$

که $4p^3 + 27q^2$ در آن مثبت است و بنابراین یک جواب حقیقی بیشتر ندارد. بنابراین معادله (۱) هم تنها یک جواب حقیقی $1 < t < 2$ دارد و چون $t = \sin x$ بود، این جواب قابل قبول نیست.

$$x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}, \quad x = k\pi \quad \text{جواب:}$$

۲۴۳. $x+2=y$ بگیرید و پرانترها را باز کنید، به معادله درجه چهارم زیر می‌رسید:

$$y^4 + 5y^2 + 7y^2 + 2y = 0$$

که به سادگی به صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$y(y+2)(y^2+3y+1)=0$$

که از اینجا جوابهای y و سپس x بدست می‌آید.

$$\text{جواب: } x_2 = -\frac{7-\sqrt{5}}{2}, \quad x_3 = -4, \quad x_1 = -2$$

$$x_4 = -\frac{7+\sqrt{5}}{2}$$

۲۴۴. این معادله همان معادله مسأله ۲۳۹ است که در آن بجای $\sqrt{3}$ مقدار پارامتر a گذاشته شده است:

$$\text{جواب: } x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{4a-3}}{2}, \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4a+1}}{2}$$

۲۴۵. واسطه عددی مخرجها را y فرض کنید:

$$y = \frac{x + (x+a) + (x+b) + (x+a+b)}{4} = x + \frac{a+b}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = y - \frac{a+b}{2}$$

که اگر بجای x در معادله قرار دهیم به معادله درجه سوم بدون مقدار ثابت نسبت به y می‌رسیم.

$$\text{جواب: } x_2 = \frac{1}{y}(\sqrt{a^2+b^2}-a-b), \quad x_1 = -\frac{a+b}{y}$$

$$x_3 = -\frac{1}{y}(\sqrt{a^2+b^2}+a+b)$$

۲۴۶. با فرض $x+a+b+c=y$ دو معادله زیر می‌رسیم:

$$۱) y=0$$

$$۲) (a+b+c)y^2 - (a+b+c)^2y +$$

$$+[(a+b+c)(ab+ac+bc)-abc]=0$$

۲۴۷. واسطه عددی مخرجها را مساوی y می‌گیریم:

$$y = x + \frac{ya}{y} \Rightarrow x = y - \frac{ya}{y}$$

که اگر در معادله مفروض قرار دهیم ، بعد از تبدیلهای ساده به این معادله می‌رسیم:

$$8y(48y^4 - 280a^2y^2 + 259a^4) = 0$$

$$x = \pm a \sqrt{\frac{25 \pm 8\sqrt{7}}{12}} - \frac{7a}{2}, \quad x = -\frac{7a}{2} \quad \text{جواب:}$$

۲۴۸. سمت چپ تساوی قابل تجزیه است و معادله به این صورت درمی‌آید:

$$(y+p)(y^2+py+2)=0$$

$$y_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2-8}}{2}, \quad y_1 = -p \quad \text{جواب:}$$

۲۴۹. $x = y + \frac{a+b}{2}$ بگیریم ، معادله حاصل نسبت به y دو مجذوری می‌شود .

۲۵۰. معادله نسبت به a دو مجذوری است:

$$4(x-1)a^4 - 4(x^2-2x)a^2 + (x^2-2x^2+4) = 0$$

و از آنجا:

$$a^2 = \frac{x-2}{2} \Rightarrow x_1 = 2(a^2+1)$$

$$a^2 = \frac{x^2-x-2}{2(x-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{1}{2} \left(2a^2 + 1 \pm \sqrt{4a^4 - 8a^2 + 9} \right)$$

۲۵۱. $x = y - \frac{a+b}{2}$ بگیریم . معادله نسبت به y دو مجذوری می‌شود .

اگر $\frac{a-b}{2} = a$ بگیریم ، این معادله دو مجذوری چنین است :

$$10ay^4 + 20a^2y^2 + 2a^5 - c^5 = 0$$

۲۵۲. تجزیه زیر را قبلاً دیده‌ایم (مسأله ۱۰۴ را ببینید) :

$$(x+y)^5 - x^5 - y^5 = 5xy(x+y)(x^2+xy+y^2) \quad (۱)$$

معادله مفروض را چنین می‌نویسیم :

$$[(x+a+b)^5 - x^5 - (a+b)^5] + [(a+b)^5 - a^5 - b^5] = 0$$

عبارتهای داخل کروشه‌ها را طبق رابطه (۱) تجزیه می‌کنیم :

$$\gamma x(a+b)(x+a+b)[x^2+(a+b)x+(a+b)^2]^2 + \\ + \gamma ab(a+b)(a^2+ab+b^2)^2 = 0.$$

اگر $a = -b$ باشد معادله به اتحاد تبدیل می شود و به ازای هر مقدار x صادق است. در حالت $a \neq -b$ دو طرف معادله را بر $\gamma(a+b)$ تقسیم می کنیم و به اینصورت می نویسیم:

$$[x(x+a)+bx][(x+a)(x+b)+(a^2+ab+b^2)]^2 + \\ + ab(a^2+ab+b^2)^2 = 0.$$

ضربها را انجام می دهیم:

$$x(x+a)^2(x+b)^2 + 2x(x+a)^2(x+b)(a^2+ab+b^2) + \\ + x(x+a)(a^2+ab+b^2)^2 + bx(x+a)^2(x+b)^2 + \\ + 2bx(x+a)(x+b)(a^2+ab+b^2) + \\ + bx(a^2+ab+b^2)^2 + ab(a^2+ab+b^2)^2 = 0.$$

جمله های سوم، ششم و هفتم را می توان به اینصورت تجزیه کرد:

$$(x+a)(x+b)(a^2+ab+b^2)^2$$

و بنابراین در تمام جمله های سمت چپ معادله مفروض عامل $(x+a)(x+b)$ وجود دارد و از اینجا دو جواب زیر بدست می آید:

$$x_1 = -a, \quad x_2 = -b$$

حالا اگر دو طرف معادله را بر $(x+a)(x+b)$ تقسیم کنیم، بدست می آید:

$$x(x+a)^2(x+b)^2 + 2x(x+a)(a^2+ab+b^2) + \\ + bx(x+a)(x+b)^2 + 2bx(a^2+ab+b^2) + \\ + (a^2+ab+b^2)^2 = 0.$$

دو جمله اول و سوم را با هم و دو جمله دوم و چهارم را با هم می گیریم و به اینصورت می نویسیم:

$$[x^2+(a+b)x+ab][x(x+a)+bx] + \\ + 2(a^2+ab+b^2)[x^2+(a+b)x+(a^2+ab+b^2)] = 0.$$

که بالاخره به اینصورت در می آید:

$$[x^2 + (a+b)x]^2 + (2a^2 + 2ab + 2b^2)[x^2 + (a+b)x] + (a^2 + ab + b^2)^2 = 0$$

که نسبت به $x^2 + (a+b)x$ معادله‌ای از درجه دوم و قابل حل است.

$$253 \quad \sqrt[5]{a - \sqrt{x}} = v \text{ و } \sqrt[5]{a + \sqrt{x}} = u \text{ فرض کنید، در نتیجه به دستگاه زیر می‌رسیم:}$$

$$u^5 + v^5 = 2a, u + v = \sqrt[5]{2a}$$

اگر $u^5 + v^5$ را به $u + v$ و uv تبدیل کنیم و بجای $u + v$ مقدارش $\sqrt[5]{2a}$ را قرار دهیم به معادله زیر نسبت به uv می‌رسیم:

$$uv(uv - \sqrt[5]{4a^2}) = 0 \rightarrow uv = 0 \text{ و } uv = \sqrt[5]{4a^2}$$

جواب $uv = \sqrt[5]{4a^2}$ منجر به جوابهای موهومی برای u و v می‌شود.

و جواب $uv = 0$ منجر به جواب $x = a^2$ برای معادله می‌شود.

254. اگر دو طرف معادله را بتوان 4 برسانیم، به اینصورت در می‌آید:

$$\sqrt[4]{(a-x)(b-x)} \times \left(2\sqrt{a-x} + 3\sqrt[4]{(a-x)(b-x)} + 2\sqrt{b-x} \right) = 0$$

مقدار داخل پرانتز نمی‌تواند مساوی صفر شود (چون هر سه جمله آن مثبت است) مگر در حالت $a = b = 0$ که در اینصورت جواب صفر را قبول دارد.

جواب: $x = a$ برای حالت $a < b$ و $x = b$ برای حالت $a > b$

255. معادله را به اینصورت می‌نویسیم:

$$\sqrt{2x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - x + 2} = \sqrt{2x^2 + 2x + 3} - \sqrt{x^2 - 3x - 2}$$

که پس از مجذور کردن دو طرف معادله و ساده کردن آن بدست می‌آید:

$$\sqrt{(2x^2 - 1)(x^2 - x + 2)} = \sqrt{(2x^2 + 2x + 3)(x^2 - 3x - 2)}$$

که اگر یکبار دیگر دو طرف آنرا مجذور کنیم، بعد از تبدیلهای ساده

چنین می‌شود:

$$x^2 + 5x^2 + 7x + 2 = 0$$

$$(x+2)(x^2+3x+1) = 0 \quad \text{و یا:}$$

ریشه $x = -2$ در معادله اصلی صدق می‌کند، ولی ریشه‌های معادله

$$x^2 + 3x + 1 = 0 \quad \text{یعنی} \quad -\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \text{در آن صدق نمی‌کنند. بنابراین}$$

معادله تنها يك ریشه $x = -2$ را قبول دارد.۲۵۶. واسطه عددی چهار عبارت $x+1$ ، $x+2$ ، $x+3$ و $x+4$ را

y می‌گیریم:

$$x + \frac{5}{y} = y \Rightarrow x = y - \frac{5}{y}$$

که در اینصورت معادله مفروض چنین می‌شود:

$$\begin{aligned} \left(y - \frac{5}{y}\right) \left(y - \frac{1}{y}\right) \left(y + \frac{1}{y}\right) \left(y + \frac{3}{y}\right) = \\ = \left(y - \frac{5}{y}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{y}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{y}\right)^2 \end{aligned}$$

که يك معادله دو مجذوری و قابل حل است.

۲۵۷. واضح است که $x = 0$ جواب معادله نیست. بنابراین $x > 0$. فرضمی‌کنیم $x - 1 = y\sqrt{x}$ ، در اینصورت بدست می‌آید: $x^2 + 1 = x(y^2 + 2)$

و معادله مفروض به اینصورت در می‌آید:

$$\sqrt{2(y^2 + 2)} = 2(a - y), \quad a \geq y$$

بعد از آنکه معادله را گویا کنیم، بدست می‌آید:

$$y^2 - 4ay + 2(a^2 - 1) = 0$$

$$y_1 = 2a + \sqrt{2(a^2 + 1)} \quad \text{از آنجا:}$$

$$y_2 = 2a - \sqrt{2(a^2 + 1)}$$

به ازای $a \geq 0$ داریم:

$$a - y_1 = -(a + \sqrt{2(a^2 + 1)}) < 0$$

$$a - y_2 = -(a + \sqrt{2(a^2 + 1)}) < 0 \quad \text{و به ازای} \quad a < 0:$$

بنابراین ریشه y_1 قابل قبول نیست. از طرف دیگر:

$$a - y_r = \sqrt{2(a^2 + 1)} - a$$

که به ازای $a \leq 0$ و $a > 0$ داریم: $a - y_r > 0$ ، بنابراین باید این معادله را حل کنیم:

$$x - 1 = y_r \sqrt{x}$$

$$\sqrt{x} = \frac{1}{y_r} \left(y_r + \sqrt{y_r^2 + 4} \right) \quad \text{و از آنجا}$$

و:

$$x = \frac{1}{y_r^2} \left[2a - \sqrt{2(a^2 + 1)} + \sqrt{9a^2 + 6 - 4a\sqrt{2(a^2 + 1)}} \right]$$

۲۵۸. معادله را تبدیل می‌کنیم:

$$x^4 - 6ax^3 + 10a^2x^2 - 6a^3x + a^4 = 0$$

و از آنجا:

$$x^4 - 6ax^3 + 6a^2x^2 - 4a^3x + a^4 - 2(ax^3 - 2a^2x^2 + a^3x) = 0$$

$$(x - a)^4 - 2ax(x - a)^2 = 0; \quad \text{یا:}$$

$$(x - a)^2(x^2 - 4ax + a^2) = 0$$

و بنابراین:

$$x_1 = x_r = a \quad \text{و} \quad x_r = a(2 + \sqrt{3}) \quad \text{و} \quad x_r = a(2 - \sqrt{3})$$

۲۵۹. به ترتیب داریم:

$$x^4 + 2x^3 + x^2 - x(x+1) - a = 0;$$

$$x^2(x+1)^2 - x(x+1) - a = 0$$

که معادله‌ای درجه دوم نسبت به $x(x+1)$ است:

$$x(x+1) = \frac{1}{y} \left(1 \pm \sqrt{4a+1} \right);$$

$$x^2 + x - \frac{1}{y} \left(1 \pm \sqrt{4a+1} \right) = 0;$$

$$x = \frac{1}{y} \left(-1 \pm \sqrt{3 \pm 2\sqrt{4a+1}} \right)$$

۲۶۰. روش اول: $x=2$ در معادله صدق می‌کند. از طرف دیگر تابع

$$y = 2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} - 4$$

است) و بنابراین معادله $y=0$ بیش از یک جواب نمی‌تواند داشته باشد.

روش دوم: با گویا کردن معادله به معادله درجه دوم زیر می‌رسیم:

$$9x^2 - 196x + 356 = 0$$

که دارای دو جواب $x = 2$ و $x = \frac{178}{9}$ است که تنها جواب $x = 2$ در

معادله اصلی صدق می‌کند.

$$x = \frac{3}{2} \quad \text{جواب: ۲۶۱}$$

$$x = -2 \quad \text{جواب: ۲۶۲}$$

۲۶۳. تابع $f(x) = 2\sqrt{x-1} + \sqrt{x} - 1$ همیشه صعودی است، زیرا:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$$

ضمناً این تابع به ازای $x \geq 1$ پیوسته است و بنابراین $f(x) = 0$ تنها یک جواب دارد.

$$x = 1 \quad \text{جواب: ۲۶۴}$$

$$x = 2 \quad \text{جواب: ۲۶۵}$$

$$x = 2 \quad \text{جواب: ۲۶۶}$$

۲۶۶. معادله را نسبت به a حل کنید.

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \left(a + 1 \pm \sqrt{a^2 + 6a + 1} \right), \quad x_1 = a \quad \text{جواب: ۲۶۷}$$

۲۶۷. معادله را نسبت به پارامتر a حل کنید.

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \left(a - 3 \pm \sqrt{a^2 - 2a + 4} \right), \quad x_1 = a - 1 \quad \text{جواب: ۲۶۸}$$

۲۶۸. اگر معادله را نسبت به a منظم کنیم به معادله معکوسه زیر تبدیل می‌شود:

$$x^4 - 2(x^2 + 1)a^2 + (x^4 + x^2 - 2x + 2)a^2 - 2(x^2 + 1)a + 1 = 0$$

که حل آن منجر به حل دو معادله درجه دوم زیر می‌شود:

$$x^2 + x + 2 = a + \frac{1}{a} \quad \text{و} \quad x^2 - x = a + \frac{1}{a}$$

۲۶۹. اگر معادله را نسبت به a حل کنیم، به دو معادله درجه دوم زیر نسبت به x می‌رسیم:

$$2x^2 + 5x - a + 2 = 0 \quad \text{و} \quad 2x^2 + x - a = 0$$

$$\text{جواب: } x_{1,2} = \frac{1}{4} \left(-5 \pm \sqrt{8a+9} \right)$$

$$x_{3,4} = \frac{1}{4} \left(-1 \pm \sqrt{8a+1} \right)$$

۲۷۰. معادله نسبت به x معکوسه و قابل حل است ولی اگر آنرا نسبت به a هم منظم کنیم، چنین می‌شود:

$$4x^2 \cdot a^2 - 6(x^3 + x) \cdot a^2 + (2x^4 + 9x^2 + 2) \cdot a^2 - \\ - 3(x^3 + x) \cdot a + x^2 = 0$$

دو طرف این معادله را بر a^2 تقسیم می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$x^2 \left(4a^2 + \frac{1}{a^2} \right) - 3(x^3 + x) \left(2a + \frac{1}{a} \right) + (2x^4 + 9x^2 + 2) = 0$$

و با فرض $2a + \frac{1}{a} = t$ به معادله زیر می‌رسیم:

$$x^2 \cdot t^2 - 3(x^3 + x) \cdot t + (2x^4 + 5x^2 + 2) = 0 ;$$

$$t_1 = \frac{x^3 + 2}{x} \quad \text{و} \quad t_2 = \frac{2x^2 + 1}{x}$$

که اگر بجای t مقدارش $2a + \frac{1}{a}$ قرار دهیم به دو معادله درجه دوم زیر

نسبت به x می‌رسیم:

$$ax^2 - (2a^2 + 1)x + 2a = 0$$

$$2ax^2 - (2a^2 + 1)x + a = 0$$

$$\text{جواب: } x_4 = \frac{1}{2a}, \quad x_3 = 2a, \quad x_2 = \frac{1}{a}, \quad x_1 = a$$

$$271. \text{ جواب: } x_4 = -\frac{1}{4}, \quad x_3 = -2, \quad x_2 = \frac{1}{3}, \quad x_1 = 3 \quad \text{و دو}$$

ریشه موهومی.

۲۷۲. این معادله نسبت به a معکوسه است، اگر دو طرف را بر a^3 تقسیم

کنیم و $a + \frac{1}{a} = t$ بگیریم، به معادله درجه سوم زیر نسبت به t می‌رسیم:

$$10t^3 - 19t^2 - 19t + 10 = 0$$

که جوابهای آن $t_1 = -1$ ، $t_2 = \frac{2}{5}$ ، $t_3 = \frac{5}{2}$ است و در نتیجه سه معادله درجه دوم زیر نسبت به a بدست می‌آید:

$$a^2 + a + 1 = 0 \quad \text{و} \quad 5a^2 - 2a + 5 = 0 \quad \text{و} \quad 2a^2 - 5a + 2 = 0$$

ریشههای دو معادله اول موهومی و ریشههای معادله آخر $a_1 = 2$ و $a_2 = \frac{1}{2}$ است.

۲۷۳. اگر ریشههای معادله را x_1 و x_2 و x_3 بگیریم، داریم:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a$$

و چون ریشهها به تصاعد حسابی هستند، داریم: $2x_2 = x_1 + x_3$ و از آنجا:

$$3x_2 = -a \Rightarrow x_2 = -\frac{a}{3}$$

این مقدار x_2 باید در معادله مفروض صدق کند.

$$2a^3 - 9ab + 27c = 0 \quad \text{جواب:}$$

۲۷۴. وقتی که یکی از ریشههای معادله‌ای با ضریبهای حقیقی $x_1 = 3 + i\sqrt{6}$ باشد، $x_2 = 3 - i\sqrt{6}$ (مزدوج x_1) نیز ریشه معادله خواهد بود. یعنی عبارت درجه چهارم سمت چپ تساوی بر $(x - x_1)(x - x_2)$ قابل قسمت می‌شود. داریم:

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = x^2 - 6x + 15$$

در نتیجه معادله درجه چهارم بصورت زیر در می‌آید:

$$(x^2 - 6x + 15)(4x^2 - 3) = 0$$

$$x_{3,4} = \pm \frac{1}{4}\sqrt{3} \quad ; \quad x_{1,2} = 3 \pm i\sqrt{6} \quad \text{جواب:}$$

۲۷۵. راه حل اول: α و β و γ را ریشههای معادله مفروض می‌گیریم،

$$\alpha + \beta + \gamma = -p \quad ; \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = q \quad \text{داریم:}$$

تفاضل $p^2 - 3q$ را محاسبه می‌کنیم:

$$p^2 - 3q = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma) =$$

$$= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \alpha\gamma$$

و بنابراین با توجه به فرض مسأله داریم:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \alpha\gamma < 0$$

$$(a - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2 < 0 \quad \text{و یا}$$

و روشن است که این رابطه برای مقادیر حقیقی α و β و γ نمی‌تواند صحیح باشد. بنابراین اگر ضریبهای معادله حقیقی باشد، دو ریشه آن موهومی و يك ریشه آن حقیقی است.

راه حل دوم: عبارت سمت چپ تساوی را $f(x)$ می‌گیریم و تفاضل

$f(x+h) - f(x)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \Delta y = f(x+h) - f(x) &= (x+h)^3 + p(x+h)^2 + \\ &+ q(x+h) + r - x^3 - px^2 - qx - r = \\ &= 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 2pxh + ph^2 + qh = \\ &= h[3x^2 + 2px + q + (3x + p)h + h^2] \end{aligned}$$

ثابت می‌کنیم که مقدار داخل کروشه برای هر مقدار دلخواه x و h مثبت است. برای این منظور کافی است ثابت کنیم که مبین این عبارت (که نسبت به h درجه دوم است) به ازای همه مقادیر x منفی است. اگر این مبین را d_1 بگیریم، داریم:

$$\begin{aligned} d_1 &= (3x + p)^2 - 4(3x^2 + 2px + q) = \\ &= -3x^2 - 2px + p^2 - 4q \end{aligned}$$

حالا d_1 مبین این سه جمله‌ای را (نسبت به x) محاسبه می‌کنیم:

$$d_1 = p^2 + 3(p^2 - 4q) = 4p^2 - 12q = 4(p^2 - 3q)$$

از شرط مسأله نتیجه می‌شود که $p^2 - 3q < 0$ است، بنابراین $d_1 < 0$ و از آنجا $d_1 < 0$ می‌شود و بالاخره نتیجه می‌شود که:

$$3x^2 + 2px + q + (3x + p)h + h^2 > 0$$

به این ترتیب وقتی $h > 0$ باشد $\Delta y > 0$ وقتی $h < 0$ باشد $\Delta y < 0$ خواهد بود. و این به معنای آنست که تابع $f(x)$ تابعی است صعودی و جز یکبار نمی‌تواند مساوی صفر شود. در نتیجه معادله $f(x) = 0$ تنها يك ریشه حقیقی خواهد داشت.

راه حل سوم. صعودی بودن تابع $f(x)$ را با کمک مشتق هم می توانستیم نتیجه بگیریم، زیرا وقتی که $p^2 < 3q$ باشد داریم:

$$f'(x) = 3x^2 + 2px + q > 0$$

۲۷۶. تابع زیر را در نظر می گیریم:

$$f_n(x) = x^n - x - n \quad (n = 1, 2, 3, \dots, k, \dots)$$

داریم:

$$x^n - x = x(x-1)(x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + 1)$$

و واضح است که به ازای $x > 1$ هر یک از این تابعها (عاملهای ضرب) صعودی هستند. از طرف دیگر داریم:

$$f_n(1) = -n < 0;$$

$$f_n(2) = 2(2-1)(2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 1) - n > 0$$

بنابراین معادله مفروض در فاصله $[1, 2]$ تنها دارای یک ریشه است.

این ریشه را به x_n نشان می دهیم. ثابت می کنیم که به ازای $n > 2$ داریم:

$$\sqrt[n]{n+1} < x_n < \sqrt[n-1]{n}$$

در حقیقت می توان نوشت:

$$f_n\left(\sqrt[n]{n+1}\right) = 1 - \sqrt[n]{n+1} < 0$$

با تبدیلهای ساده می توان از نامساوی واضح:

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < 3 \leq n$$

به نامساوی زیر رسید:

$$(n-1)\sqrt[n-1]{n} - n > 0$$

از طرف دیگر داریم:

$$f\left(\sqrt[n-1]{n}\right) = (n-1)\sqrt[n-1]{n} - n \Rightarrow f\left(\sqrt[n-1]{n}\right) > 0$$

بنابراین ریشه معادله بین مقادیر $\sqrt[n-1]{n}$ و $\sqrt[n]{n+1}$ قرار دارد.

از این نامساوی دو طرفه نتیجه می شود:

$$\sqrt[n+1]{n+2} < x_{n+1} < \sqrt[n]{n+1} < x_n < \sqrt[n-1]{n}$$

یعنی دنباله ریشه‌ها بطور یکنواخت نزولی است. بالاخره:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n-1]{n} = 1 ;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

و بنابراین .

زیرا $x_1 = 2$ و $x_2 < \sqrt{3} < x_3$ و دنباله ریشه‌ها با شروع از $n=2$ نزولی است.

۴۷۷. چند جمله‌ای سمت چپ تساوی را می‌توان چنین نوشت:

$$(x^2 - 2x)^2 + 8 \left[\left(x - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right]$$

جمله اول این عبارت غیر منفی و جمله دوم مثبت است و بنابراین مجموع آنها نمی‌تواند مساوی صفر شود.

۴۷۸. a, b, c را ضلعها و h_1, h_2, h_3 را ارتفاعهای مثلث می‌گیریم. داریم:

$$h_1 > 0 ; h_2 > 0 , h_3 > 0 \quad (1)$$

$$\begin{cases} h_1 + h_2 + h_3 = k \\ h_1 h_2 + h_1 h_3 + h_2 h_3 = q \\ h_1 h_2 h_3 = z \end{cases} \quad (2)$$

بنابراین، با توجه به نامساویهای (۱) خواهیم داشت:

$$k > 0 ; q > 0 ; z > 0 \quad (3)$$

$$2S = ah_1 = bh_2 = ch_3$$

از تساویهای:

می‌توان نتیجه گرفت:

$$a = \frac{2S}{h_1} ; b = \frac{2S}{h_2} ; c = \frac{2S}{h_3}$$

$$\begin{aligned} p &= \frac{a+b+c}{2} = S \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} \right) = \\ &= S \cdot \frac{h_1 h_2 + h_2 h_3 + h_1 h_3}{h_1 h_2 h_3} = \frac{Sq}{z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \\
 &= \sqrt{\frac{Sq}{z} \left(\frac{Sq}{z} - \frac{2S}{h_1} \right) \left(\frac{Sq}{z} - \frac{2S}{h_2} \right) \left(\frac{Sp}{z} - \frac{2S}{h_3} \right)} = \\
 &= S^2 \sqrt{\frac{q^2}{z^2} - 2 \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} \right) \frac{q^2}{z^2} + \dots} \\
 &\quad + 2 \left(\frac{1}{h_1 h_2} + \frac{1}{h_1 h_3} + \frac{1}{h_2 h_3} \right) \frac{q^2}{z^2} - \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \cdot \frac{q}{z} = \\
 &= S^2 \sqrt{-\frac{q^2}{z^2} + \frac{4kq^2}{z^2} - \frac{8q}{z^2}} = \frac{S^2}{z^2} \sqrt{q(4kqz - q^2 - 8z^2)} ; \\
 S &= \frac{z^2}{\sqrt{q(4kqz - q^2 - 8z^2)}}
 \end{aligned}$$

که در آن باید داشته باشیم:

$$4kqz > q^2 + 8z^2 \quad (4)$$

رابطه‌های (۳) و (۴) شرطهای لازم برای وجود ریشه‌های حقیقی در معادله مفروض است.

۰۲۷۹. اگر ممین معادله مفروض را D فرض کنیم، داریم:

$$D = -4p^2 - 27q^2 = -4(p^2 + q^2) - 23q^2$$

و چون $p^2 + q^2$ (طبق فرض) و $23q^2$ مضربی از ۲۳ هستند، پس D هم مضربی از ۲۳ خواهد بود. از طرف دیگر داریم:

$$D = (x_1 - x_2)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_3 - x_1)^2$$

و برای اینکه D مضربی از ۲۳ باشد، باید یکی از عوامل $x_1 - x_2$ ، $x_2 - x_3$ یا $x_3 - x_1$ مضرب ۲۳ باشند.

۰۲۸۰. ریشه‌های معادله:

$$(ab' - ba')z^2 + 2(ac' - ca')z + (bc' - cb') = 0 \quad (1)$$

تنها وقتی حقیقی است که داشته باشیم:

$$(ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb') \geq 0 \quad (2)$$

به سادگی می‌توان تحقیق کرد که نامساوی (۲)، هم‌ارزنامساوی زیر است:

$$[2(ac' + ca') - bb']^2 \geq (b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c') \quad (3)$$

حالا صحت نامساوی (۳) را تحقیق می‌کنیم به شرطی که معادله $a'x^2 + b'x + c' = 0$ دارای ریشه‌های موهومی باشد.

۱. فرض می‌کنیم ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ حقیقی باشد، در این صورت $b^2 - 4ac \geq 0$ و $b'^2 - 4a'c' < 0$ و نامساوی (۳) واضح است.
۲. اگر ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ هم موهومی باشند، در این صورت خواهیم داشت:

$$b^2 - 4ac < 0 : b'^2 - 4a'c' < 0$$

که از آنها نتیجه می‌شود:

$$ac > 0 ; a'c' > 0 ; |bb'| < 4 |aa'| \sqrt{\frac{cc'}{aa'}}$$

از نامساوی اخیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{bb'}{aa'} < 4 \sqrt{\frac{cc'}{aa'}}$$

که اگر نامساوی زیر را در نظر بگیریم:

$$\frac{c}{a} + \frac{c'}{a'} > 2 \sqrt{\frac{cc'}{aa'}}$$

بدست می‌آید:

$$\left[2 \left(\frac{c}{a} + \frac{c'}{a'} \right) - \frac{bb'}{aa'} \right]^2 > \left(4 \sqrt{\frac{cc'}{aa'}} - \frac{bb'}{aa'} \right)^2$$

از این نامساوی نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} & [2(ac' + a'c) - bb']^2 > (4\sqrt{aa'cc'} - bb')^2 = \\ & = (b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c') + 4(b\sqrt{a'c'} - b'\sqrt{ac}) > \\ & > (b^2 - 4ac)(b'^2 - 4a'c') \end{aligned}$$

به این ترتیب صحت نامساوی (۳) و در نتیجه صحت نامساوی (۲) ثابت می‌شود.

۲۸۱. به ازای $x < 0$ داریم:

$$P(x) > x^4 + a^2x^2 + 2ahx + b^2 = x^4 + (ax + b)^2 > 0$$

$$P(0) = b^2 > 0 : x = 0 \text{ به ازای}$$

$$: x > 0 \text{ به ازای}$$

$$P(x) > x^4 - 2ax^3 + a^2x^2 + b^2 = (x^2 - ax)^2 + b^2 > 0.$$

و چون $P(x)$ به ازای همه مقادیر حقیقی x مثبت است، $P(x) = 0$ دارای جواب حقیقی نیست.

۲۸۲. فرض می‌کنیم αi ریشهٔ موهومی خالص معادله باشد، اگر سمت چپ معادلهٔ مفروض را به $f(x)$ نشان دهیم، باید مقادیر حقیقی و ضریب $i = \sqrt{-1}$ در $f(\alpha i)$ برابر صفر شود:

$$\begin{cases} d - b\alpha^2 = 0 \\ ca - a\alpha^3 = 0 \end{cases}$$

با حذف α بین این دو رابطه بدست می‌آید: $ad = bc$ ؛ همچنین از تساوی $ac = a^2\alpha^2$ نتیجه می‌شود $ac > 0$ ($a \neq 0$): به این ترتیب لزوم شرطها ثابت شد.

حالا کفایت این شرطها را ثابت می‌کنیم. فرض کنیم $ad = bc$ و $ac > 0$ ، دو طرف معادلهٔ مفروض را در $a \neq 0$ ضرب می‌کنیم:

$$ax(ax^2 + c) + abx^2 + ad = 0$$

که با استفاده از تساوی $ad = bc$ می‌شود:

$$ax(ax^2 + c) + abx^2 + bc = 0$$

$$(ax^2 + c)(ax + b) = 0 \quad \text{و یا:}$$

و ریشه‌های معادلهٔ $ax^2 + c = 0$ چنین است:

$$x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}} = \pm \frac{\sqrt{ac}}{a} i;$$

۲۸۳. فرض می‌کنیم: $x' > x'' \geq 0$ ، در اینصورت داریم:

$$\begin{aligned} f(x'') - f(x') &= (ax'' - bx'') - (ax' - bx') = \\ &= ax'(ax'' - x' - 1) - bx'(bx'' - x' - 1) \end{aligned}$$

و چون داریم:

$$ax' > bx' > 0 \quad \text{و} \quad ax'' - x' > bx'' - x' > 1$$

نتیجه می‌شود:

$$f(x'') > f(x') \quad \text{و یا} \quad f(x'') - f(x') > 0$$

یعنی تابع $f(x)$ برای مقادیر $x > 0$ صعودی است.

حالا به معادله $۵^x - ۲^x = ۲۱$ می‌پردازیم روشن است که $x=۲$ یکی از ریشه‌های این معادله است و از آنجا تابع $g(x) = ۵^x - ۲^x$ برای مقادیر مثبت x صعودی است و معادله نمی‌تواند ریشه مثبت دیگری داشته باشد. از طرف دیگر، معادله ریشه منفی هم ندارد، زیرا برای مقادیر $x < ۰$ داریم:

$$۵^x - ۲^x < ۰ < ۲۱$$

به این ترتیب معادله مورد نظر، تنها يك ریشه $x=۲$ را قبول دارد. ۰۲۸۴ اگر ریشه مثبت معادله مفروض را x_0 فرض کنیم، روشن است که برای $n > ۱$ داریم: $x_0 < ۱$. از طرف دیگر چند جمله‌ای سمت چپ تساوی در معادله مفروض، مجموع n جمله از يك تصاعد هندسی است که جمله اول آن x و قدر نسبتش نیز x است، وقتی که n به سمت بی‌نهایت میل کند، حد مجموع جمله‌های سمت چپ تساوی، به حد مجموع جمله‌های يك تصاعد هندسی نزولی تبدیل می‌شود که برابر است با $\frac{x_0}{1-x_0}$ و بنابراین داریم:

$$\frac{x_0}{1-x_0} = 1 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}$$

توضیح: به سادگی می‌توان ثابت کرد که معادله (۱) حتماً دارای جواب مثبتی می‌باشد، معادله را چنین می‌نویسیم:

$$f(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x - 1 = 0$$

$$\text{داریم: } f(0) = -1 < 0 ; f(1) = n - 1 > 0$$

یعنی معادله مفروض در فاصله $[۰, ۱]$ دارای ریشه است.

۰۲۸۵ اگر α ریشه‌ای از معادله $x^2 - x + 1 = 0$ باشد، $\frac{1}{\alpha}$ ریشه معادله

$$x^2 - x^2 + 1 = 0$$
 خواهد بود و ضمناً به سادگی بدست می‌آید:

$$x^5 + x + 1 = (x^3 - x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$$

۰۲۸۶ فرض می‌کنیم، $x = y + \lambda$. معادله مفروض چنین می‌شود:

$$y^4 + 4(\lambda - 2)y^3 + 3(2\lambda^2 + \lambda\lambda + 7)y^2 + (4\lambda^3 - 24\lambda^2 + 42\lambda + a)y + \lambda^4 - \lambda\lambda^3 + 21\lambda^2 + a\lambda + 6 = 0$$

و برای اینکه معادله اخیر، معادله‌ای دومجذوری باشد، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} \lambda - 2 = 0 \\ 4\lambda^2 - 24\lambda^2 + 42\lambda + a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ a = -20 \end{cases}$$

با این مقادیر λ و a ، معادله دو مجذوری چنین می‌شود:

$$y^2 - 2y + 2 = 0 \Rightarrow y_{1,2} = \pm 1 ; y_{3,4} = \pm \sqrt{2}$$

$$x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{2}, x_2 = 2, x_1 = 1 \quad \text{جواب:}$$

۲۸۷. یکی از ریشه‌های معادله را x می‌گیریم، ریشه دیگر آن $x_1 = 2x$ می‌شود، باید x_1 در معادله صدق کند، که اگر قرار دهیم بدست می‌آید:

$$8x^2 - 84x^2 + 280x - 300 = 0 \quad (1)$$

این معادله و معادله مفروض دستگاهی تشکیل می‌دهند که می‌توان از آنها مقدار x را بدست آورد. برای این منظور دوطرف معادله مفروض را در ۲ ضرب و دو طرف معادله (۱) را بر ۴ تقسیم می‌کنیم، از تفاضل آنها بدست می‌آید:

$$21x^2 - 210x + 525 = 0 \Rightarrow (x - 5)^2 = 0 ;$$

$$x = 5 ; x_1 = 10$$

با در دست داشتن دو ریشه از معادله درجه سوم، می‌توان ریشه سوم آنرا نیز بدست آورد. برای این منظور مثلاً می‌توان از رابطه مجموع ریشه‌ها استفاده کرد:

$$x + x_1 + x_2 = 21 \Rightarrow x_2 = 6$$

۲۸۸. معادله درجه سومی تشکیل می‌دهیم که ریشه‌های آن $y_1 = \frac{m\alpha + n}{m\alpha - n}$

$$\text{و } y_2 = \frac{m\beta + n}{m\beta - n} \text{ و } y_3 = \frac{m\gamma + n}{m\gamma - n} \text{ باشد، باید داشته باشیم:}$$

$$y = \frac{mx + n}{mx - n} \Rightarrow x = \frac{n(y + 1)}{m(y - 1)}$$

در معادله مفروض قرار می‌دهیم:

$$\frac{n^2(y+1)^2}{m^2(y-1)^2} + \frac{pn(y+1)}{m(y-1)} + q = 0$$

و یا:

$$n^2(y+1)^2 + pm^2n(y+1)(y-1) + qm^2(y-1)^2 = 0 \quad (1)$$

مجموع مورد نظر S ، مجموع ریشه‌های همین معادله (۱) است:

$$S = \frac{3qm^2 + 2pm^2n - 3n^2}{n^2 + pm^2n + qm^2}$$

۲۸۹. شرط وجود يك ریشه مشترك بين دو معادله، از حذف مجهول بين آنها بدست می‌آید.

اگر دو معادله را از هم كنيم بدست می‌آید:

$$x = -\frac{q - q_1}{p - p_1}$$

این همان ریشه مشترك است و باید در هر يك از معادله‌ها صدق کند:

$$(q - q_1)^2 = (p - p_1)^2 (pq_1 - p_1q)$$

۲۹۰. اگر دوطرف معادله $x^5 - x + 1 = 0$ را در $x^2 - x + 1$ ضرب کنیم، معادله:

$$x^5 - x^3 + x^2 = 0$$

بدست می‌آید که واضح است x_1 و x_2 و x_3 در آن صدق می‌کند:

$$\begin{cases} x_1^5 - x_1^3 + x_1^2 = 0 \\ x_2^5 - x_2^3 + x_2^2 = 0 \\ x_3^5 - x_3^3 + x_3^2 = 0 \end{cases}$$

از جمع این رابطه‌ها بدست می‌آید:

$$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \quad (۱)$$

اکنون اگر x_1 و x_2 و x_3 را در معادله $x^2 - x + 1 = 0$ قرار دهیم:

$$\begin{cases} x_1^2 - x_1 + 1 = 0 \\ x_2^2 - x_2 + 1 = 0 \\ x_3^2 - x_3 + 1 = 0 \end{cases}$$

و از مجموع آنها،

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3) - 3 = -3$$

از طرف دیگر:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = (x_1 + x_2 + x_3)^3 - 3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 2$$

که اگر در رابطه (۱) قرار دهیم:

$$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = -3 - 2 = -5$$

۲۹۱. راه حل اول: این معادله سه ریشه حقیقی دارد، زیرا داریم:

$$\begin{cases} f(-2) < 0 & ; f(0) > 0 \\ f(1) < 0 & ; f(2) > 0 \end{cases}$$

و بنابراین معادله در فاصله‌های $(-2, 0)$ ، $(0, 1)$ و $(1, 2)$ دارای ریشه است. در نتیجه ریشه متوسط، مثبت و کوچکتر از واحد و ریشه کوچکتر بین -2 و صفر است. ثابت می‌کنیم:

$$x_2 = \frac{1}{1-x_1}$$

زیرا داریم:

$$\left(\frac{1}{1-x_1}\right)^3 - 3 \times \frac{1}{1-x_1} + 1 = \frac{-(x_1^3 - 3x_1 + 1)}{(1-x_1)^3} = 0$$

یعنی اگر x_1 ریشه‌ای از معادله باشد $\frac{1}{1-x_1}$ هم ریشه آن خواهد بود. از اینجا نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{1-x_1} < 1 \Rightarrow \frac{1}{1-x_1} < x_2$$

یعنی $\frac{1}{1-x_1}$ ریشه متوسط معادله است. حالا تفاضل مطلوب را بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} x_2^2 - x_1 &= \frac{1}{(1-x_1)^2} - x_1 = \frac{1-x_1 + 2x_1^2 - x_1^3}{(1-x_1)^2} = \\ &= \frac{-x_1^3 + 2x_1 - 1 + 2(1-x_1^2)}{(1-x_1)^2} = 2 \end{aligned}$$

راه حل دوم (استفاده از رابطه‌های مثلثاتی): اگر فرض کنیم $x = 2 \cos \varphi$

خواهیم داشت:

$$x^2 - 3x + 1 = 8 \cos^2 \varphi - 6 \cos \varphi + 1 = 2 \cos 2\varphi + 1 = 0;$$

$$\cos 2\varphi = -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{2k\pi}{3} \pm \frac{2\pi}{9};$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \cos \varphi_1 = 2 \cos \frac{2\pi}{9} \\ x_2 = 2 \cos \varphi_2 = 2 \cos \frac{8\pi}{9} = -2 \cos \frac{\pi}{9} \\ x_3 = 2 \cos \varphi_3 = 2 \cos \frac{14\pi}{9} = 2 \cos \frac{4\pi}{9} \end{cases}$$

و ضمناً: $x_2 < x_3 < x_1$

تفاضل مورد نظر را محاسبه می‌کنیم:

$$x_3^2 - x_2 = 4 \cos^2 \frac{4\pi}{9} + 2 \cos \frac{\pi}{9} = 2 \left(1 + \cos \frac{8\pi}{9} + \cos \frac{\pi}{9} \right) = 2$$

و به سادگی صحت تساوی زیر هم ثابت می‌شود:

$$x_1^2 - x_3 = x_2^2 - x_1 = 2$$

۴۹۲. معادله اول را از معادله دوم کم می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$4x^2 - 9x^2 - 2x + 1 = 0 \quad (1)$$

معادله اول را در ۴ و معادله (۱) را در ۳ ضرب می‌کنیم، از مقایسه آنها به معادله زیر می‌رسیم:

$$-x^2 + 6x^2 - 7x - 4 = 0 \quad (2)$$

دو طرف معادله (۲) را در ۴ ضرب و بسا معادله (۱) جمع می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$15x^2 - 30x - 15 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \quad (3)$$

روشن است که ریشه‌های مشترک دو معادله، بین ریشه‌های معادله (۳) می‌باشد، از طرف دیگر به سادگی می‌توان دید که عبارتهای سمت چپ تساوی در معادله‌های مفروض، بر $x^2 - 2x - 1$ قابل‌قسمت‌اند. بنابراین $x_1 = 1 + \sqrt{2}$ و $x_2 = 1 - \sqrt{2}$ ریشه‌های مشترک دو معادله‌اند.

دیگر محاسبه ریشه‌های غیر مشترک دو معادله مشکل نیست.

۴۹۳. اگر $\alpha = 1$ باشد، $\alpha^4 + \alpha^6 + \alpha^7 + \alpha^9 = 4$ می‌شود و معادله

$y - 4 = 0$ جواب مسأله است. اگر $\alpha \neq 1$ باشد، با توجه به $\alpha^{12} - 1 = 0$

خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \alpha^{12} + \alpha^{11} + \alpha^{10} + \alpha^9 + \alpha^8 + \alpha^7 + \alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \\ & + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

فرض می‌کنیم:

$$\begin{cases} y_1 = \alpha^4 + \alpha^7 + \alpha^9 + \alpha^8 \\ y_2 = \alpha^{11} + \alpha^{10} + \alpha^2 + \alpha^5 \\ y_3 = \alpha^{12} + \alpha^6 + \alpha^3 + \alpha \end{cases}$$

اولا با توجه به رابطه (۱) داریم:

$$y_1 + y_2 + y_3 = -1$$

ثانیاً داریم:

$$y_1 y_2 = \alpha^6 (\alpha^5 + \alpha^2 + \alpha^7 + 1) (\alpha^4 + \alpha^8 + \alpha + 1)$$

اگر ضربها را انجام دهیم و توجه کنیم که $\alpha^{12} = 1$ است، بدست می‌آید:

$$y_1 y_2 = -1 + y_3$$

$$y_2 y_3 = -1 + y_1$$

$$y_1 y_3 = -1 + y_2$$

و بهمین ترتیب:

و بنابراین بدست می‌آید:

$$y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3 = -3 + (y_1 + y_2 + y_3) = -4$$

ثالثاً داریم:

$$y_1 y_2 y_3 = (-1 + y_1) y_3 = -y_3 + y_1 y_3 = -y_3 + (-1 + y_2) = -1$$

و بنابراین معادله‌ای که ریشه‌های y_1 و y_2 و y_3 باشد، چنین می‌شود:

$$y^3 + y^2 - 4y + 1 = 0 \quad (2)$$

توضیح: اگر با استفاده از رابطه موافق ریشه‌های $x^{12} - 1 = 0$ را بدست

آوریم:

$$x^{12} = 1 = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi ;$$

$$x = \cos \frac{2k\pi}{12} + i \sin \frac{2k\pi}{12}$$

که ۱۲ جواب معادله به ازای مقادیر صحیح k از ۱ تا ۱۲ بدست می‌آید.

اگر x_n را ریشه n ام به‌ازای $k=n$ فرض کنیم، به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که عبارت:

$$x_n^4 + x_n^9 + x_n^7 + x_n^8$$

تنها به سه صورت زیر می‌تواند باشد:

$$\begin{cases} y_1 = x_1^4 + x_1^6 + x_1^7 + x_1^9 \\ y_2 = x_1^2 + x_1^3 + x_1^{10} + x_1^{11} \\ y_3 = x_1 + x_1^5 + x_1^8 + x_1^{12} \end{cases}$$

و از اینجا ثابت می‌شود که معادله (۲) تنها معادله درجه سوم است که می‌تواند ریشه‌ای مساوی $\alpha^4 + \alpha^7 + \alpha^6 + \alpha^4$ داشته باشد و اگر معادله $y - 4 = 0$ را هم در نظر بگیریم، جواب کلی مسأله چنین می‌شود:

$$(y-4)(y^3+y^2-4y+1)=0$$

۴۹۳. راه حل اول: داریم:

$$\begin{aligned} x_1^4 + x_2^4 &= (x_1 + x_2)^4 - 2x_1x_2(2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2) = \\ &= \frac{b^4}{a^4} - \frac{2c}{a} \left[2(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 \right] = \frac{b^4}{a^4} - \frac{2b^2c}{a^2} + \frac{2c^2}{a^2}; \\ x_1^4 x_2^4 &= (x_1 x_2)^4 = \frac{c^4}{a^4} \end{aligned}$$

و معادله مطلوب (پس از تبدیلهای ساده) چنین می‌شود:

$$a^4 x^2 - (b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2)x + c^4 = 0$$

راه حل دوم: داریم $x^4 = y$ را ریشه معادله مطلوب گرفته ایم.

$$y = \pm \sqrt[4]{x}$$

$y = \sqrt[4]{x}$ را در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ قرار می‌دهیم و معادله را کویا می‌کنیم، به معادله مطلوب می‌رسیم.

۴۹۵. اگر α را زاویه روبرو به ضلع a (قاعدۀ) فرض کنیم، داریم:

$$a = 2b \sin \frac{\alpha}{2}, \text{ در معادله مفروض قرار می‌دهیم، می‌شود:}$$

$$2 \left(2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 3 \sin \frac{\alpha}{2} \right) + \sqrt{3} = 0 ;$$

$$\sin \frac{3\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{9} \text{ و } \frac{4\pi}{9}$$

۴۹۶. اگر فرض کنیم $x_1 = 1$ ، در اینصورت خواهیم داشت:

$$x_1 x_2 = x_3 ; x_2 x_3 = x_1 ; x_1 x_3 = x_2$$

و دیگر تساوی حکم واضح است.

۰۲۹۷. روشن است که به ازای $x = \frac{1}{2}$ تساوی مفروض چنین می‌شود:

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{p}{2} + q\right)^{1^{\circ}} + \left(\frac{a}{2} + b\right)^{2^{\circ}} = 0$$

مجموع دومقدار غیرمنفی نمی‌تواند صفر شود، مگر اینکه هر دوی آنها مساوی صفر باشند، یعنی:

$$\begin{cases} 2p + 4q + 1 = 0 \\ a + 2b = 0 \end{cases} \quad (1)$$

از طرف دیگر برای اینکه تساوی مفروض بیک اتحاد نسبت به x تبدیل شود، باید ضریبهای توانهای مساوی x در دو طرف با هم برابر شود، ضریبهای $x^{2^{\circ}}$ را در دو طرف تساوی برابر قرار می‌دهیم:

$$2^{2^{\circ}} - a^{2^{\circ}} = 1 \Rightarrow a = \sqrt[2^{\circ}]{2^{2^{\circ}} - 1}$$

که با توجه به رابطه دوم (۱) خواهیم داشت:

$$b = -\frac{1}{2} \sqrt[2^{\circ}]{2^{2^{\circ}} - 1}$$

اکنون مقادیر ثابت را در دو طرف تساوی فرض برابر قرار می‌دهیم:

$$1 - b^{2^{\circ}} = q^{1^{\circ}} \Rightarrow q^{1^{\circ}} = \frac{1}{2^{2^{\circ}}} \Rightarrow q = \frac{1}{4}$$

و با مراجعه به رابطه اول (۱)، مقدار p بدست می‌آید: $p = -1$

اکنون اگر بجای a ، b ، p و q مقادیر بدست آمده را قرار دهیم،

بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} (2x-1)^{2^{\circ}} - \left(\sqrt[2^{\circ}]{2^{2^{\circ}}-1} x - \frac{1}{2} \sqrt[2^{\circ}]{2^{2^{\circ}}-1} \right)^{2^{\circ}} = \\ = \left(x^2 - x + \frac{1}{4} \right)^{1^{\circ}} \end{aligned}$$

و برای اینکه صحت این اتحاد را تحقیق کنیم، می‌توان به سادگی عبارت

سمت چپ تساوی را به عبارت سمت راست تبدیل کرد:

$$\begin{aligned}
 (2x-1)^{20} &= \left(\sqrt[20]{2^{20}-1} x - \frac{1}{\sqrt[20]{2^{20}-1}} \right)^{20} = \\
 &= 2^{20} \left(x - \frac{1}{2} \right)^{20} - (2^{20}-1) \left(x - \frac{1}{2} \right)^{19} = \\
 &= \left(x - \frac{1}{2} \right)^{20} = \left[\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{10} = \left(x^2 - x + \frac{1}{4} \right)^{10}
 \end{aligned}$$

۲۹۸. داریم:

$$\begin{aligned}
 \cos \frac{\pi}{V} + \cos \frac{2\pi}{V} + \cos \frac{\Delta\pi}{V} &= \frac{1}{\sqrt[20]{\sin \frac{\pi}{V}}} \left(\sqrt[20]{\sin \frac{\pi}{V}} \cos \frac{\pi}{V} + \sqrt[20]{\sin \frac{\pi}{V}} \cos \frac{2\pi}{V} + \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt[20]{\sin \frac{\pi}{V}} \cos \frac{\Delta\pi}{V} \right) = \frac{1}{\sqrt[20]{\sin \frac{\pi}{V}}} \left[\sin \frac{2\pi}{V} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\left. + \left(\sin \frac{4\pi}{V} - \sin \frac{2\pi}{V} \right) + \left(\sin \frac{6\pi}{V} - \sin \frac{4\pi}{V} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[20]{\sin \frac{\pi}{V}}} \times \sin \frac{6\pi}{V} = \frac{1}{\sqrt[20]{\sin \frac{\pi}{V}}} \times \sin \frac{\pi}{V} = \frac{1}{V};$$

$$\begin{aligned}
 \cos \frac{\pi}{V} \cos \frac{2\pi}{V} + \cos \frac{\pi}{V} \cos \frac{\Delta\pi}{V} + \cos \frac{2\pi}{V} \cos \frac{\Delta\pi}{V} &= \\
 = \frac{1}{V} \left[\left(\cos \frac{4\pi}{V} + \cos \frac{2\pi}{V} \right) + \left(\cos \frac{6\pi}{V} + \cos \frac{4\pi}{V} \right) + \left(\cos \frac{8\pi}{V} + \cos \frac{6\pi}{V} \right) \right] &= \\
 = \frac{1}{V} \left(\sqrt[20]{\cos \frac{4\pi}{V}} + \sqrt[20]{\cos \frac{2\pi}{V}} - \sqrt[20]{\cos \frac{\pi}{V}} \right) &= \\
 = - \left(\cos \frac{\pi}{V} + \cos \frac{2\pi}{V} + \cos \frac{\Delta\pi}{V} \right) &= -\frac{1}{V}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos \frac{\pi}{V} \cos \frac{2\pi}{V} \cos \frac{\Delta\pi}{V} &= \cos \frac{\pi}{V} \cos \frac{2\pi}{V} \cos \frac{2\pi}{V} = \\
 = \frac{1}{\sqrt[20]{\sin \frac{\pi}{V}}} \left(\sin \frac{2\pi}{V} \cos \frac{2\pi}{V} \cos \frac{4\pi}{V} \right) &=
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4 \sin \frac{\pi}{Y}} \left(\sin \frac{4\pi}{Y} \cos \frac{4\pi}{Y} \right) = \frac{1}{\lambda \sin \frac{\pi}{Y}} \left(\sin \frac{\lambda \pi}{Y} \right) = -\frac{1}{\lambda}$$

و بنابراین معادله درجه سوم مطلوب چنین می‌شود:

$$x^3 - \frac{1}{Y}x^2 - \frac{1}{Y}x + \frac{1}{\lambda} = 0$$

$$\lambda x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \text{و یا:}$$

۳۹۹. تساویهای مفروض را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} (p_1 - x)\lambda^2 + (p_2 - q_2)\lambda + q_1 - x = 0 \\ (q_2 - y)\lambda^2 + (p_1 - q_1)\lambda + p_2 - y = 0 \end{cases}$$

دستگاه را نسبت به λ و λ^2 حل می‌کنیم:

$$\lambda = \frac{(x - p_1)(p_2 - y) + (q_2 - y)(q_1 - x)}{(p_1 - q_1)(p_1 - x) - (p_2 - q_2)(q_2 - y)};$$

$$\lambda^2 = \frac{(x - q_1)(p_1 - q_1) + (p_2 - y)(p_2 - q_2)}{(p_1 - x)(p_1 - q_1) - (p_2 - q_2)(q_2 - y)}$$

و از آنجا:

$$\begin{aligned} & [(x - p_1)(p_2 - y) + (q_2 - y)(q_1 - x)]^2 = \\ & = [(x - q_1)(p_1 - q_1) + (p_2 - y)(p_2 - q_2)] \times \\ & \quad \times [(p_1 - q_1)(p_1 - x) - (p_2 - q_2)(q_2 - y)] \end{aligned}$$

۳۰۰. اگر مجهول معادله جدید را y قرض کنیم، باید داشته باشیم:

$$y = x^2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{y}$$

$x = \sqrt{y}$ را در معادله مفروض قرار می‌دهیم:

$$y^2 + 2y\sqrt{y} + y - 3\sqrt{y} + 5 = 0$$

معادله را گویا می‌کنیم:

$$(y^2 + y + 5)^2 = [\sqrt{y}(2y(2y - 3))]^2;$$

که پس از ساده کردن به معادله زیر می‌رسیم:

$$y^4 - 2y^3 + 22y^2 + y + 25 = 0$$

۳۰۱. معادله‌ای تشکیل می‌دهیم که ریشه‌های آن $\frac{1}{x_1^2-1}$ و $\frac{1}{x_2^2-1}$ باشد.

اگر معادله جدید را با مجهول y فرض کنیم، داریم:

$$y = \frac{1}{x^2-1} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{y+1}{y}}$$

در معادله مفروض $x = \sqrt{\frac{y+1}{y}}$ قرار می‌دهیم، پس از خلاصه کردن

چنین می‌شود:

$$100y^3 + 60y^2 + 8y - 1 = 0$$

مجموع مطلوب، مجموع ریشه‌های این معادله است: $S = -\frac{3}{5}$

۳۰۲. اگر ریشه $x=1$ را از معادله $x^n - 1 = 0$ خارج کنیم، بدست می‌آید:

$$x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x + 1 = 0$$

ریشه‌های این معادله $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ است، بنابراین داریم:

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1 = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\dots(x-\lambda)$$

که به ازای $x=1$ بدست می‌آید: $P=n$

۳۰۳. معادله‌ای تشکیل می‌دهیم که ریشه‌های آن $\frac{1}{x_1-1}$ ، $\frac{1}{x_2-1}$ و $\dots$ باشد، در این صورت داریم:

$$y = \frac{1}{x-1} \Rightarrow x = \frac{y+1}{y}$$

که اگر در معادله قرار دهیم:

$$\frac{(y+1)^n}{y^n} + \frac{(y+1)^{n-1}}{y^{n-1}} + \dots + \frac{y+1}{y} + 1 = 0$$

و یا،

$$(y+1)^n + y(y+1)^{n-1} + y^2(y+1)^{n-2} + \dots + y^{n-1}(y+1) + y^n = 0 \quad (1)$$

مجموع مطلوب، مجموع ریشه‌های معادله (۱) است. در معادله (۱) ضرب y^n :

$$a = 1 + 1 + \dots + 1 = n + 1$$

و ضرب y^{n-1} :

$$b = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{1}{2}n(n+1)$$

و بنابراین:

$$\sigma = -\frac{b}{a} = -\frac{n+1}{2}$$

۳۰۴. از رابطه‌های بین ریشه‌ها و ضریبها استفاده می‌کنیم، داریم:

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = -168$$

و چون طبق فرض $x_1 x_2 = 12$ است، پس $x_3 x_4 = -14$ می‌شود.
از طرف دیگر:

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 = 22$$

که با توجه به رابطه‌های قبل می‌شود:

$$(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = 25 \quad (1)$$

همچنین:

$$x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 = -a$$

$$\begin{cases} 12(x_3 + x_4) - 14(x_1 + x_2) = -a & \text{و یا:} \\ (x_3 + x_4) + (x_1 + x_2) = a & \text{همچنین:} \end{cases}$$

از حل دستگاه بدست می‌آید:

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = \frac{a}{2}$$

در رابطه (۱) قرار می‌دهیم، a بدست می‌آید:

$$a = \pm 10$$

$$1) \quad a = 10 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 x_2 = 12 \end{cases} ; \begin{cases} x_3 + x_4 = 5 \\ x_3 x_4 = -14 \end{cases}$$

$$۲) a = -۱۰ \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -۵ \\ x_1 x_2 = ۱۲ \end{cases}; \begin{cases} x_3 + x_4 = -۵ \\ x_3 x_4 = -۱۴ \end{cases}$$

که محاسبه جوابها مشکل نیست.

۳۰۵. اگر معادله‌ای دارای ریشه مضاعف باشد، این ریشه مضاعف در معادله مشتق هم صدق می‌کند. معادله مشتق چنین است:

$$۴x^2 - ۸x + ۴a = ۰$$

اگر x مقدار ریشه مضاعف باشد، هم در این معادله و هم در معادله فرض صدق می‌کند. بین این دو معادله a را حذف می‌کنیم، به معادله زیر می‌رسیم:

$$x(۳x^2 - x^2 - ۴x + ۲) = ۰$$

$$x(x-۱)(۳x^2 + ۲x - ۲) = ۰ \quad \text{و یا:}$$

مقادیر x که از این معادله بدست می‌آید، می‌توانند ریشه مضاعف معادله مفروض باشند.

$$۱) x = ۰ \Rightarrow a = ۰$$

$$۲) x = ۱ \Rightarrow a = ۱$$

$$۳) x = \sqrt{۷} - ۱ \Rightarrow a = \frac{۱۲۴ - ۴۰\sqrt{۷}}{۲۹}$$

$$۴) x = -\sqrt{۷} - ۱ \Rightarrow a = \frac{۱۲۴ + ۴۰\sqrt{۷}}{۲۹}$$

۳۰۶. اولاً به سادگی تحقیق می‌شود که $f(۱-x) = f(x)$.

ثانیاً بطور کلی اگر $f(x) = f(a-x)$ باشد، عبارت $f(x)$ را می‌توان بر حسب توانهای زوج $a - ۲x$ منظم کرد، زیرا اگر در $a - ۲x$ مقدار x را به $a - x$ تبدیل کنیم $a - ۲x$ می‌شود و برای اینکه تغییر نکند باید توان $a - ۲x$ زوج باشد.

در اینجا $f(x)$ را بر حسب توانهای $۱ - ۲x$ منظم می‌کنیم، به معادله زیر خواهیم رسید:

$$(۲x-۱)^4 - ۲۰(۲x-۱)^2 + ۹۱ = ۰$$

$$x_{۳,۴} = \frac{۱ \pm \sqrt{۷}}{۲}, \quad x_{۱,۲} = \frac{۱ \pm \sqrt{۱۳}}{۲} \quad \text{جواب:}$$

۳۰۷. از رابطه‌های بین ریشه‌ها و ضریبها استفاده می‌کنیم:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$$

و بنابراین با توجه به فرض خواهیم داشت:

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 4 \quad (۱)$$

مجموع حاصلضربهای دوبه‌دوی ریشه‌ها را می‌نویسیم:

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = m$$

و یا پس از تبدیلهای ساده:

$$x_1x_2 + x_3x_4 = m - ۱۶ \quad (۲)$$

و مجموع حاصلضربهای سه به سه ریشه‌ها:

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 8 ;$$

$$x_1x_2 + x_3x_4 = 2 \quad (۳) \quad \text{که از آنجا:}$$

از مقایسه رابطه‌های (۲) و (۳) بدست می‌آید:

$$m - ۱۶ = 2 \Rightarrow m = ۱۸$$

برای محاسبه ریشه‌ها، حاصلضرب چهار ریشه را می‌نویسیم:

$$x_1x_2x_3x_4 = -2 \quad (۴)$$

رابطه‌ها (۳) و (۴) مقادیر x_1x_2 و x_3x_4 را بمانده می‌دهند:

$$x_1x_2 = -1 ; x_3x_4 = 3$$

حالا با کمک دستگاههای زیر مقادیر چهار جواب بدست می‌آید:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1x_2 = -1 \end{cases} ; \begin{cases} x_3 + x_4 = 4 \\ x_3x_4 = 3 \end{cases}$$

۳۰۸. اگر ضلعهای مثلث را a ، b و c فرض کنیم، داریم:

$$a + b + c = ۱۲ \text{ و } ab + bc + ca = ۴۷ \text{ و } abc = ۶۰$$

از آنجا:

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) = p[p^2 - p^2(a+b+c) + p(ab+bc+ca) - abc] = -p^4 +$$

$$+ (ab+bc+ca)p^3 - abcp = -6^4 + 47 \times 6^3 -$$

$$- 60 \times 6 = 36 \Rightarrow S = 6$$

۳۰۹. روش اول: α ، β و γ را ریشه‌های معادله مفروض می‌گیریم، در اینصورت $\alpha^2 = -(\alpha + 1)$ و از آنجا:

$$\begin{aligned}\alpha^{11} &= -\alpha^9(\alpha + 1)^2 = -\alpha^5 - 3\alpha^4 - 3\alpha^3 - \alpha^2 = \\ &= -(\alpha^3 + \alpha + 1)(\alpha^2 + 3\alpha + 2) + 3\alpha^2 + 5\alpha + 2 = \\ &= 3\alpha^2 + 5\alpha + 2\end{aligned}$$

و به همین ترتیب:

$$\beta^{11} = 3\beta^2 + 5\beta + 2 \quad \text{و} \quad \gamma^{11} = 3\gamma^2 + 5\gamma + 2$$

و از آنجا:

$$\alpha^{11} + \beta^{11} + \gamma^{11} = 3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + 5(\alpha + \beta + \gamma) + 6$$

از طرف دیگر داریم:

$$\alpha + \beta + \gamma = 0;$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = -2$$

$$\alpha^{11} + \beta^{11} + \gamma^{11} = 3 \times -2 + 5 \times 0 + 6 = 0 \quad \text{و بنابراین:}$$

روش دوم: $S_k = \alpha^k + \beta^k + \gamma^k$ فرض می‌کنیم. تساویهای $\alpha^3 + \alpha + 1 = 0$ ، $\beta^3 + \beta + 1 = 0$ و $\gamma^3 + \gamma + 1 = 0$ را به ترتیب در α^n ، β^n و γ^n ضرب می‌کنیم؛ از جمع تساویهایی که بدست می‌آید به رابطه‌برگشتی زیر می‌رسیم:

$$S_{n+2} + S_{n+1} + S_n = 0 \quad (۱)$$

از طرف دیگر داریم:

$$S_0 = 3 \quad \text{و} \quad S_1 = \alpha + \beta + \gamma = 0 \quad \text{و}$$

$$S_2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = -2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = -2$$

حالا اگر در رابطه (۱) به ترتیب n را مساوی $0, 1, 2, \dots, 7, 8$ بگیریم بدست می‌آید:

$$S_7 = -3 \quad \text{و} \quad S_6 = 2 \quad \text{و} \quad S_5 = 5 \quad \text{و} \quad S_4 = 1 \quad \text{و} \quad S_3 = -7 \quad \text{و}$$

$$S_8 = -6 \quad \text{و} \quad S_9 = 6$$

و به ازای $n = 8$ داریم:

$$S_{11} + S_9 + S_8 = 0 \Rightarrow S_{11} = 0$$

۳۱۰. فرض می‌کنیم $d^2 - 4ac = b^2$ و d عددی صحیح و غیر منفی. چون

$$a > 0 \quad \text{و} \quad c > 0, \quad \text{پس} \quad d < b \quad \text{و} \quad \text{داریم:}$$

$$\begin{aligned} 4a \cdot \overline{abc} &= 4a(100a + 10b + c) = 400a^2 + 40ab + 4ac = \\ &= (20a + b)^2 - (b^2 - 4ac) = (20a + b)^2 - d^2 = \\ &= (20a + b + d)(20a + b - d) \end{aligned}$$

به این ترتیب باید عدد اول $\overline{abc}$ مقسوم علیه $20a + b + d$ یا $20a + b - d$ باشد. ولی

$$20a + b + d < 100a + b + b < 100a + 10b + c < \overline{abc}$$

$$20a + b - d < \overline{abc}$$

و در نتیجه بطور بدیهی :

یعنی $\overline{abc}$ مقسوم علیه هیچکدام از این دو عدد نیست و این تناقض حکم مسأله را ثابت می کند.

۳۱۱. α و β و γ را ریشه های معادله مفروض می گیریم ، در اینصورت :

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

و بنابراین :

$$\begin{aligned} \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 &= (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma) + \\ &+ 3\alpha\beta\gamma = -3q \\ \text{روش اول: داریم:} \end{aligned}$$

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 = 2(2n^2 + 6n + 7)$$

بنابراین $2n^2 + 6n + 7 = 5k$ این معادله درجه دوم را حل می کنیم:

$$n = \frac{-3 \pm \sqrt{5(2k-1)}}{2}$$

عدد n تنها وقتی طبیعی است که داشته باشیم: $5(2k-1) = 5(2t+1)^2$ به این ترتیب:

$$n = \frac{-3 + 5(2t+1)}{2} \Rightarrow n = 5t+1$$

که در آن t عددی است صحیح و غیر منفی.

روش دوم: داریم:

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 = (2n+3)^2 + 5$$

بنابراین باید رقم آخر عدد $2n+3$ مساوی ۵ باشد ، یعنی

$$2n+3 = 10t+5 \quad n = 5t+1$$

روش سوم: رقم آخر مجذور عددهای متوالی را می نویسیم:

$$۰, ۱, ۴, ۹, ۶, ۵, ۶, ۹, ۴, ۱$$

در این ردیف تنها به دو صورت می‌توان ۴ عدد متوالی در نظر گرفت که مجموع آنها مضربی از ۱۰ باشد:

$$۱+۴+۹+۶=۲۰ ; ۶+۹+۴+۱=۲۰$$

به این ترتیب رقم آخر عدد n باید مساوی ۱ یا ۶ باشد، یعنی $n=5t+1$.
۳۱۳. از تساوی $a^2+a+1=0$ نتیجه می‌شود:

$$a+\frac{1}{a}=-1, \quad a^3=1$$

و بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} a^{1967} + \frac{1}{a^{1967}} &= (a^3)^{655} \cdot a^2 + \frac{1}{(a^3)^{655} \cdot a^2} = \\ &= a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 = -1 \end{aligned}$$

۳۱۴. داریم:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}, \quad x'_1 + x'_2 = -\frac{b'}{a'},$$

$$x'_1 \cdot x'_2 = \frac{c'}{a'}$$

مبین این معادله‌ها به ترتیب $D=b^2-4ac$ و $D'=b'^2-4a'c'$ فرض می‌کنیم: $X_1=x_1+x'_1$ و $X_2=x_2+x'_2$ در این صورت:

$$X_1 + X_2 = -\frac{ab' + a'b}{aa'},$$

$$X_1 X_2 = \frac{2(ac' + a'c) + bb' - \sqrt{DD'}}{2aa'}$$

بنابراین یکی از دو معادله مجهول چنین است:

$$2aa'x^2 + 2(ab' + a'b)x + 2(ac' + a'c) + bb' - \sqrt{DD'} = 0$$

به همین ترتیب می‌توان معادله‌ای را بدست آورد که ریشه‌های آن x_1 و x'_2

باشد. این معادله چنین است:

$$2aa'x^2 + 2(ab' + a'b)x + 2(ac' + a'c) + bb' + \sqrt{DD'} = 0$$

$$\left| \begin{array}{l} x=4 \\ y=2 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x=2 \\ y=4 \end{array} \right| \quad \text{جواب ۳۱۵}$$

۳۱۶. دستگاه را می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{cases} xy + (x+y) = 11 \\ xy(x+y) = 30 \end{cases}$$

از اینجا $x+y$ و xy و سپس x و y بدست می‌آید.

$$\left| \begin{array}{l} x=3 \\ y=2 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x=2 \\ y=3 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x=1 \\ y=5 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x=5 \\ y=1 \end{array} \right| \quad \text{جواب:}$$

$$\left| \begin{array}{l} x=2 \\ y=3 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x=3 \\ y=2 \end{array} \right| \quad \text{جواب: ۳۱۷}$$

۳۱۸. سه برابر معادلهٔ دوم را با معادلهٔ اول دستگاه جمع کنید $x+y$ بدست می‌آید.

$$\left| \begin{array}{l} x=-1 \\ y=2 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x=2 \\ y=-1 \end{array} \right| \quad \text{جواب:}$$

۳۱۹. معادلهٔ اول دستگاه را چنین می‌نویسیم:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = a^4$$

از معادلهٔ دوم دستگاه داریم:

$$x^2 + y^2 = b^2 - 2xy$$

در نتیجه معادلهٔ زیر را که نسبت به xy از درجهٔ دوم است خواهیم داشت:

$$2x^2y^2 - 4b^2xy + (b^4 - a^4) = 0$$

و در نتیجه به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} xy = \frac{1}{2} \left(2b^2 \pm \sqrt{2(a^4 + b^4)} \right) \\ x + y = b \end{cases}$$

و جوابهای دستگاه ریشه‌های معادله‌های درجهٔ دوم زیر هستند:

$$t^2 - bt + \frac{1}{r} \left(r b^2 \pm \sqrt{r(a^2 + b^2)} \right) = 0$$

۰۳۲۰ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} x^5 + y^5 &= (x+y)^5 - 5xy(x^2 + y^2) - 10x^2y^2(x+y) = \\ &= (x+y)^5 - 5xy[(x+y)^2 - 2xy(x+y)] - 10x^2y^2(x+y) \\ &\text{که با توجه به اینکه } x+y=a \text{ و } x^5+y^5=a^5 \text{ است، بدست می‌آید:} \\ &-5axy(a^2 - xy) = 0 \Rightarrow xy=0, a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} xy=0 \\ x+y=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=a \end{cases} ; \begin{cases} x=a \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy=a^2 \\ x+y=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=a \frac{1+i\sqrt{r}}{2} \\ y=a \frac{1-i\sqrt{r}}{2} \end{cases} ; \begin{cases} x=a \frac{1-i\sqrt{r}}{2} \\ y=a \frac{1+i\sqrt{r}}{2} \end{cases}$$

۰۳۲۱ با توجه به اتحاد:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (x+y+z)(x^2 + y^2 + \\ &+ z^2 - xy - yz - xz) + 3xyz \end{aligned}$$

و با توجه به معادله‌های اول و سوم دستگاه، معادله دوم بصورت زیر درمی‌آید:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6 \Rightarrow xy + yz + xz = -3$$

و از آنجا که x و y و z ریشه‌های معادله درجه سوم زیر هستند:

$$t^3 - 3t - 2 = 0 \Rightarrow (t+1)^2(t-2) = 0$$

$$\begin{array}{|l|l|l|} \hline x=2 & x=-1 & x=-1 \\ \hline y=-1 & y=2 & y=-1 \\ \hline z=-1 & z=-1 & z=2 \\ \hline \end{array} \quad \text{جواب:}$$

$$\begin{array}{|l|l|l|} \hline x=a & x=0 & x=0 \\ \hline y=0 & y=a & y=0 \\ \hline z=0 & z=0 & z=a \\ \hline \end{array} \quad \text{جواب: ۰۳۲۲}$$

۰۳۲۳ در معادله درجه چهارم زیر صدق می‌کنند:

$$u^4 + tu^3 + zu^2 + yu - x = 0 \quad (۱)$$

و بنابراین ریشه‌های این معادله هستند. رابطه‌های بین ریشه‌ها و ضریبها، جوابها را بدست می‌دهند.

$$\begin{cases} x = -abcd \\ y = -(abc + abd + bcd + acd) \\ z = ab + ac + ad + bc + bd + cd \\ t = -(a + b + c + d) \end{cases} \quad \text{جواب:}$$

۳۲۴. اگر $a = k\pi$ ولی $b \neq k'\pi$ و $c \neq k''\pi$ باشند، دستگاه به دو معادله سه مجهولی تبدیل می‌شود که دستگاهی است سیال و x و y بر حسب z بدست می‌آید.

اگر $a = k\pi$ و $b = k'\pi$ و $c \neq k''\pi$ باشد، دستگاه یک معادله سه مجهولی تبدیل می‌شود و x بر حسب y و z بدست می‌آید.

اگر $a = k\pi$ ، $b = k'\pi$ و $c = k''\pi$ باشد، دستگاه به اتحاد تبدیل می‌شود.

حالا فرض می‌کنیم $a, b, c \neq k\pi$ باشد، در این صورت می‌توان دو طرف معادله‌ها را به ترتیب بر $\sin a$ ، $\sin b$ و $\sin c$ تقسیم کرد. پس از تبدیلهای ساده، به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} \lambda \cos^3 a - 4z \cos^2 a - 2(y+2) \cos a + (z-x) = 0 \\ \lambda \cos^3 b - 4z \cos^2 b - 2(y+2) \cos b + (z-x) = 0 \\ \lambda \cos^3 c - 4z \cos^2 c - 2(y+2) \cos c + (z-x) = 0 \end{cases} \quad (۱)$$

معادله درجه سوم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\lambda t^3 - 4zt^2 - 2(y+2)t + (z-x) = 0 \quad (۲)$$

مقادیر $\cos a$ ، $\cos b$ و $\cos c$ ، بنابر رابطه‌های (۱)، در معادله (۲) صدق می‌کنند و بنابراین ریشه‌های معادله (۲) هستند. با در نظر گرفتن رابطه‌های بین ریشه‌ها و ضریبها خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \cos a + \cos b + \cos c = \frac{z}{r} \\ \cos a \cos b + \cos a \cos c + \cos b \cos c = -\frac{y+r}{r} \\ \cos a \cos b \cos c = \frac{x-z}{\lambda} \end{cases}$$

و از آنجا:

$$\begin{cases} x = \lambda \cos a \cos b \cos c + r(\cos a + \cos b + \cos c) \\ y = -r(\cos a \cos b + \cos a \cos c + \cos b \cos c) - r \\ z = r(\cos a + \cos b + \cos c) \end{cases}$$

۳۲۵. فرض می‌کنیم، در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{cases} b^2 x^2 + abmx^2 + a^2 m^2 x^2 = r a^2 b^2 \\ b^2 x^2 + mx^2 - a^2 m^2 x^2 = ab \end{cases}$$

و از تقسیم دوطرف این دو معادله برهم بدست می‌آید:

$$\frac{b^2 + abm + a^2 m^2}{b^2 + m - a^2 m^2} = rab ;$$

$$a^2(rab + 1)m^2 - 2abm - b^2(rab - 1) = 0 ;$$

$$m_1 = \frac{b}{a} ; \quad m_2 = \frac{b(1 - rab)}{a(1 + rab)}$$

$$m = \frac{b}{a} \Rightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases} ; \begin{cases} x = -a \\ y = -b \end{cases}$$

$$m = \frac{b(1 - rab)}{a(1 + rab)} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm a \sqrt{\frac{rab + 1}{rab - 1}} \\ y = \pm b \sqrt{\frac{rab - 1}{rab + 1}} \end{cases}$$

۳۲۶. از جمع رابطه‌های مفروض بدست می‌آید:

$$2c^2 = c^2(a^2 + b^2) \Rightarrow c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$$

و بنابراین داریم:

$$a^4 = b^4 + \frac{a^4 + b^4 + 2a^2b^2}{4} - \frac{a^2b^2 + b^4}{2}$$

از آنجا بدست می‌آید $a^2 = b^2$ و سپس $a^2 = c^2$ و دیگر تحقیق صحت رابطه حکم مشکل نیست.

۳۲۷. دستگاه نسبت به مجهولهای خود متقارن است و بنابراین x و y و z

را ریشه‌های يك معادله درجه سوم فرض می‌کنیم. داریم:

$$x + y + z = 9; \quad xy + yz + xz = 27$$

و از معادله دوم دستگاه

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \Rightarrow \frac{xy + yz + xz}{xyz} = 1 \Rightarrow xyz = 27$$

x و y و z ریشه‌های معادله زیر هستند:

$$t^3 - 9t^2 + 27t - 27 = 0 \Rightarrow (t - 3)^3 = 0$$

جواب: $x = y = z = 3$

۳۲۸. معادله دوم را از اول و معادله سوم را از دوم کم می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$\begin{cases} (y - z)(x + y + z) = 9 \\ (x - y)(x + y + z) = 9 \end{cases}$$

$$y - z = x - y \Rightarrow 2y = x + z$$

$$(x - y)y = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{y} + y \quad \text{و بنابراین:}$$

اگر این مقدار x را در معادله ایل دستگاه قرار دهیم، به معادله دوم جذوری

زیر می‌رسیم:

$$3y^3 - 28y^2 + 9 = 0$$

$$\left| \begin{array}{l} x = \frac{-10\sqrt{3}}{3} \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ z = \frac{8\sqrt{3}}{3} \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x = \frac{10\sqrt{3}}{3} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ z = -\frac{8\sqrt{3}}{3} \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x = -4 \\ y = -3 \\ z = -2 \end{array} \right| , \left| \begin{array}{l} x = 4 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{array} \right| \text{ جواب:}$$

۳۲۹. از معادله اول دستگاه داریم:

$$x + y + z = 6$$

از معادله دوم دستگاه به سادگی بدست می‌آید.

$$xy + yz + xz = 9$$

اکنون اگر دوطرف معادله سوم دستگاه را مجذور کنیم، با توجه به معادله اول بدست می‌آید:

$$\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{xz} = 5$$

و اگر معادله اخیر را دوباره مجذور کنیم بدست می‌آید: $xyz = 4$
اکنون معادله درجه سوم تشکیل می‌دهیم که ریشه‌های آن x و y و z باشد:

$$t^3 - 6t^2 + 9t - 4 = 0 \Rightarrow (t-1)^2(t-4) = 0$$

$$\left| \begin{array}{l} x = 4 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 4 \\ z = 1 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 4 \end{array} \right| \text{ جواب:}$$

۳۳۰. اتحادهای زیر واضح است:

$$x^2 + 5x + 2y - 3 = (x^2 + 4x + 3y - 2) + (x - y - 1)$$

$$x^2 + x + y + 2 = (x^2 + 2y + 3) + (x - y - 1)$$

برای سهولت کار فرض می‌کنیم:

$$x^2 + 4x + 3y - 2 = A \quad ; \quad x^2 + 2y + 3 = B$$

در اینصورت معادله اول دستگاه را می‌توان چنین نوشت:

$$\sqrt{A + (x - y - 1)} + \sqrt{B + (x - y - 1)} = \sqrt{A} + \sqrt{B} \quad (۱)$$

البته باید مقادیر زیر رادیکالها مثبت باشد. اگر $x - y - 1 > 0$ باشد، داریم:

$$\sqrt{A+(x-y-1)} > \sqrt{A} \text{ و } \sqrt{B+(x-y-1)} > \sqrt{B}$$

و بنابراین تساوی (۱) ممکن نیست. بهمین ترتیب اگر $x-y-1 < 0$ باشد، باز هم تساوی (۱) غیرممکن می‌شود. به این ترتیب تنها در حالتی معادله (۱) می‌تواند جواب داشته باشد که $x-y-1=0$ ، یعنی $x-y=1$ باشد، که در این حالت معادله دوم دستگاه به صورت $x=2y-1$ درمی‌آید. بنابراین اگر دستگاه مفروض جواب داشته باشد، می‌توان این جوابها را از دستگاه زیر پیدا کرد:

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x-2y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

۳۳۱. هیچکدام از مجهولهای x و y و z نمی‌توانند مساوی صفر باشند، زیرا اگر مثلاً $x=0$ باشد، از معادله اول معلوم می‌شود که y یا z باید صفر باشند؛ اگر $y=0$ باشد، معادله سوم و اگر $z=0$ باشد، معادله دوم بدون معنا می‌شود. اگر دو طرف معادله اول را در yz ، دو طرف معادله دوم را در xz و دو طرف معادله سوم را در xy ضرب کنیم، بعد از تبدیلهای ساده به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} \frac{1}{z^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{2}{xyz} \\ \frac{1}{z^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{2}{xyz} \\ \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{2}{xyz} \end{cases} \Rightarrow x^2 = y^2 = z^2$$

حالا اگر در سمت چپ معادله اول دستگاه بجای z^2 مساوی y^2 را قرار دهیم به تساوی $y = xz$ می‌رسیم و بنابراین دستگاه سه معادله سه مجهولی زیر برای تعیین جوابها پیدا می‌شود:

$$x^2 = y^2 = z^2 \text{ و } y = xz$$

که به سادگی جوابهای $x^2 = y^2 = z^2 = 1$ بدست می‌آید.

برای تعیین جوابهای x و y و z باید توجه داشت که با توجه به معادله سوم دستگاه اخیر ($y = xz$) یا هر سه مجهول x و y و z مثبت اند و یا دوتای

آنها منفی است.

$$\text{جواب: } \begin{cases} x_1 = y_1 = z_1 = 1 \\ y_1 = z_1 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1 = 1 \\ x_1 = y_1 = -1 \end{cases}, \begin{cases} y_1 = 1 \\ x_1 = z_1 = -1 \end{cases}$$

۳۳۲. از مجموع و تفاضل دو معادله دستگاه، به دستگاه دو معادله زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} (x+y)(x^2-xy+y^2-a-b)=0 \\ (x-y)(x^2+xy+y^2-a+b)=0 \end{cases}$$

که خود این دستگاه هم به چهار دستگاه زیر تبدیل می‌شود:

$$۱) \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases}; \quad ۲) \begin{cases} x+y=0 \\ x^2+xy+y^2=a-b \end{cases};$$

$$۳) \begin{cases} x-y=0 \\ x^2-xy+y^2=a+b \end{cases}; \quad ۴) \begin{cases} x^2-xy+y^2=a+b \\ x^2+xy+y^2=a-b \end{cases}$$

که حل هیچیک از آنها مشکل نیست.

۳۳۳. اگر $\sqrt[4]{1+\Delta x}=u$ ، $\sqrt[4]{6-y}=v$ فرض کنیم، داریم:

$$u^4+v^4=(\Delta x-y)+v$$

که با توجه به معادله دوم دستگاه می‌شود:

$$u^4+v^4=18+v=25$$

بنابراین به دستگاه زیر می‌رسیم که حل آن مشکل نیست

$$u^4+v^4=25 \text{ و } u+v=3$$

۳۳۴. داریم:

$$y^2=x+3y, \quad x^2=3x-y \quad (۱)$$

واضح است که یکی از جوابها $x=0$ ، $y=0$ است. اگر $x \neq 0$ باشد $y \neq 0$ می‌شود. فرض می‌کنیم $y=tx$ ، در اینصورت:

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{x+3y}{3x-y} = \frac{1+3t}{3-t} = t^2$$

از آنجا بدست می‌آید:

$$t^4 - 3t^2 + 3t + 1 = 0$$

و یا ،

$$(t^2 - 1)^2 - 3t(t^2 - 1) + 3t^2 = 0$$

$$\text{بنابراین } t^2 - 1 = \frac{3t \pm t}{2} , \text{ از آنجا:}$$

$$1) \ t = 1 \pm \sqrt{2} , \quad 2) \ t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

از طرف دیگر طبق معادلهٔ دوم دستگاه (۱) داریم:

$$x^2 = 3x - tx$$

ولی $x \neq 0$ است و بنابراین:

$$x = \pm \sqrt{3-t} , \quad y = \pm t \sqrt{3-t}$$

که اگر بجای t چهار مقداری را که بدست آمده است قرار دهیم، ۸ جواب دستگاه بدست می‌آید که با جواب $(0,0)$ رویهم ۹ جواب می‌شود:

$$(0,0) ; \quad (\sqrt{2-\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2}}) ;$$

$$(-\sqrt{2-\sqrt{2}}, -\sqrt{2+\sqrt{2}}) ;$$

$$(\sqrt{2+\sqrt{2}}, -\sqrt{2-\sqrt{2}}) ; \quad (-\sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2-\sqrt{2}}) ;$$

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}, \frac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right) ;$$

$$\left(-\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}, \frac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right) ;$$

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}, -\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right) ;$$

$$\left(-\frac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}, \frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)$$

۳۳۵. دستگاه را نسبت به مجهولهای u و v حل می‌کنیم، یعنی $u = a$ و $v = b$

بر حسب x و y بدست می‌آوریم:

بین دو معادلهٔ اول و دوم c را حذف می‌کنیم:

$$\begin{cases} xa + zb - yc = x^r + z^r \\ -za + yb + xc = x^r + y^r \end{cases}$$

معادله اول را در x و معادله دوم را در y ضرب و سپس دو معادله را با هم جمع می‌کنیم، بدست می‌آید :

$$(x^r - yz)a + (y^r + xz)b = x^r + y^r + xz^r + x^r y \quad (۱)$$

به همین ترتیب بین معادله‌های اول و سوم دستگاه هم c را حذف می‌کنیم، به معادله زیر می‌رسیم:

$$(y^r + xz)a + (z^r - xy)b = y^r + z^r + x^r z + yz^r \quad (۲)$$

اکنون بین معادله‌های (۱) و (۲) مجهول b را حذف می‌کنیم، بعد از ساده کردن چنین می‌شود:

$$y(x^r + y^r + z^r + xyz)a = y(x + y) \times \quad (۳) \\ \times (x^r + y^r + z^r + xyz)$$

جواب $y = 0$ منجر به $x = 0$ و $z = 0$ می‌شود که از همان صورت دستگاه اصلی هم معلوم بود:

$$x_1 = y_1 = z_1 = 0$$

اگر $x^r + y^r + z^r + xyz \neq 0$ باشد، از معادله (۳) بدست می‌آید:

$$a = x + y \quad (۴)$$

و شبیه آن برای b و c به جوابهای زیر می‌رسیم:

$$b = y + z, \quad c = x + z \quad (۵)$$

و از این سه معادله بدست می‌آید:

$$x_r = \frac{a + c - b}{2}, \quad y_r = \frac{a + b - c}{2}, \quad z_r = \frac{b + c - a}{2}$$

به این جوابها به ترتیب دیگری هم می‌توانستیم برسیم. سمت راست هر يك از معادله‌های اصلی از درجه دوم و سمت چپ آنها از درجه اول است، بنابراین ax, by, cz باید به این صورت باشند:

$$\begin{cases} a = Ax + By + Cz \\ b = A'x + B'y + C'z \\ c = A''x + B''y + C''z \end{cases}$$

که اگر در معادله‌های اصلی قرار دهیم و در هر معادله دو طرف را متحد یکدیگر بگیریم، به همان معادله‌های (۴) و (۵) می‌رسیم.

در حالتی که $x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 0$ باشد، می‌توان بین سه معادله اصلی و این معادله xyz را حذف کرد و به رابطه‌ای بین a و b رسید. رابطه‌ای که بدست می‌آید به این معناست که با تحقق آن دستگاه مفروض به دو معادله سه مجهولی، یعنی یک دستگاه سیال، تبدیل می‌شود.

(I. ۳۳۶) اگر $t = 0$ باشد، $x = y = \frac{s}{2}$ و از آنجا:

$$s = p + q \cdot \frac{s^2}{4} \Rightarrow qs^2 - 4(s - p) = 0$$

(II) اگر $t \neq 0$ باشد، y و x ریشه‌های معادله درجه دوم زیر هستند:

$$tz^2 - 2z + s = 0 \quad (۱)$$

دو حالت پیش می‌آید: a و x هر دو مساوی یکی از ریشه‌های معادله (۱) باشند، یعنی $x = y = z_1$ یا $x = y = z_2$ در این حالت بدست می‌آید:

$$\begin{cases} tx^2 - 2x + s = 0 \\ qx^2 - 2x + p = 0 \end{cases}$$

که از آنجا خواهیم داشت:

$$(pt - qs)^2 = 4(q - t)(s - p)$$

(b) y و x ریشه‌های مختلف معادله (۱) هستند، یعنی:

$$\begin{cases} x = z_1 \\ y = z_2 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x = z_2 \\ y = z_1 \end{cases}$$

در این حالت داریم: $x + y = \frac{2}{t}$ ، $xy = \frac{s}{t}$. از معادله اول دستگاه مفروض

بدست می‌آید:

$$pt + qs = 2$$

به این ترتیب:

$$I \quad \begin{cases} t = 0 \\ qs^2 - 4(s - p) = 0 \end{cases}$$

$$\text{II} \begin{cases} t \neq 0 \\ (pt + qs - 2)[(pt - qs)^2 - 4(q - t)(s - p)] = 0 \end{cases}$$

۳۳۷. داریم:

$$(x + y)^2 = 3(x + y)(x^2 + y^2) - 2(x^3 + y^3)$$

و از آنجا رابطه مطلوب چنین می‌شود:

$$a^3 = 3ab - 2c$$

۳۳۸. از دو رابطه اول x و y را محاسبه کنید و در رابطه سوم قرار دهید:

$$a''(bc' - cb') + b''(ca' - ac') + c''(ab' - ba') = 0 \quad \text{جواب:}$$

۳۳۹. جواب:

$$x : y : z = (bc' - cb') : (ab' - ba') : (ca' - ac')$$

۳۴۰. با فرض $a < b + c$ (چون a, b, c ضلعهای مثلث‌اند) باید ثابت کنیم:

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c} \quad (1)$$

و دو رابطه دیگر شبیه آن. نامساوی (۱) را می‌توان چنین نوشت:

$$a < \left(\sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c} \right)^n = b + c + \dots < b + c$$

۳۴۱. رابطه‌های مفروض را می‌توان چنین نوشت:

$$\begin{cases} p^r - p \log N + r \log N = 0 \\ q^r - q \log N + r \log N = 0 \\ r^r - r \log N + r \log N = 0 \end{cases}$$

و بنابراین p, q, r ریشه‌های معادله زیر هستند:

$$t^r - t \log N + r \log N = 0$$

که در آن داریم:

$$\begin{cases} pq + qr + pr = \log N \\ pqr = -r \log N \end{cases}$$

و بنابراین داریم:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{pq + qr + pr}{pqr} = \frac{\log N}{-r \log N} = -\frac{1}{r}$$

۳۴۲. به ترتیب داریم:

$$2y = 10 - 3x \Rightarrow y = 5 - x - \frac{x}{2} ;$$

$$\frac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2t ; y = 5 - 3t$$

و برای مثبت بودن جوابها باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} 2t > 0 \\ 5 - 3t > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < t < \frac{5}{3}$$

و تنها عدد صحیح بین صفر و $\frac{5}{3}$ عدد ۱ است که به ازای آن $x = 2$ و $y = 2$ بدست می آید.

$$343. \text{ جواب: } y = 30 + 7t, x = 1 - 5t$$

که به ازای $-\frac{30}{7} < t < \frac{1}{5}$ یعنی $t = -4, -3, -2, -1, 0$ جوابهای مثبت زیر بدست می آید:

$$t = -4 \begin{cases} x = 21 \\ y = 2 \end{cases} ; t = -3 \begin{cases} x = 16 \\ y = 9 \end{cases} ; t = -2 \begin{cases} x = 11 \\ y = 16 \end{cases}$$

$$t = -1 \begin{cases} x = 6 \\ y = 23 \end{cases} ; t = 0 \begin{cases} x = 1 \\ y = 30 \end{cases}$$

۳۴۴. $x = 11t - 1, y = 5t - 2$ و جوابهای مثبت به ازای $t > 1$ بدست می آید.

۳۴۵. معادله جواب مثبت ندارد و جوابهای منفی و صحیح از رابطه‌های $x = 11t + 3$ و $y = -8t - 1$ بدست می آید.

۳۴۶. $y = 7y'$ فرض کنید، بدست می آید:

$$x + 9y' = 5 \Rightarrow x = 5 - 9y'$$

بنابراین جوابهای صحیح از رابطه‌های $x = 5 - 9y'$ و $y = 7y'$ بدست می آیند و معادله جواب مثبت ندارد.

۳۴۷. جوابهای صحیح از رابطه‌های $x = 28t + 3$ و $y = 5 - 15t$ بدست می‌آید و تنها به ازای $t = 0$ جوابهای مثبت $x = 3$ و $y = 5$ را قبول دارد.
۳۴۸. باید جوابهای صحیح و مثبت معادله زیر را پیدا کنیم:

$$7x + 11y = 100$$

(دو عدد مطلوب را $7x$ و $11y$ فرض کرده‌ایم) و تنها جواب مسأله ۴۴ و ۵۶ است.

۳۴۹. اگر تعداد تخته‌های به عرض ۱۱ سانتیمتر را x و تعداد تخته‌های به عرض ۱۳ سانتیمتر را y بگیریم، مسأله دو جواب دارد:

$$\left| \begin{array}{l} x = 6 \\ y = 18 \end{array} \right| \quad \text{یا} \quad \left| \begin{array}{l} x = 19 \\ y = 7 \end{array} \right|$$

۳۵۰. ۴ کیسه ۸۰ کیلو گرمی و ۲ کیسه ۶۰ کیلو گرمی و یا یک کیسه ۸۰ کیلو گرمی و ۶ کیسه ۶۰ کیلو گرمی.

۳۵۱. اگر عدد مجهول را x بگیریم، باید داشته باشیم:

$$x = 7t + 3 \quad \text{یا} \quad x = 11t' + 4$$

و از آنجا باید معادله سیال زیر را حل کرد:

$$7t + 3 = 11t' + 4$$

که از آنجا t و t' بصورت $t = 11\lambda - 3$ و $t' = 7\lambda - 2$ در می‌آید و از آنجا x به صورت زیر است:

$$x = 77\lambda - 18$$

۳۵۲. جواب: ۴ عدد تمبر ۴ ریالی، ۱۳ عدد ۲/۵ ریالی و ۳ عدد ۵/۰ ریالی و یا ۸ عدد ۴ ریالی، ۶ عدد ۲/۵ ریالی و ۶ عدد ۵/۰ ریالی.
۳۵۳. عدد بزرگتر را x و عدد کوچکتر را y می‌گیریم، باید داشته باشیم:

$$(x+y) + (x-y) + x \cdot y + \frac{x}{y} = 243$$

این معادله به سادگی به صورت زیر در می‌آید (x را بر حسب y بدست آورده‌ایم):

$$x = \frac{243y}{(y+1)^2}$$

y و $y+1$ مقسوم علیه مشترکی ندارند و بنابراین باید ۲۴۳ بر $(y+1)^2$ قابل قسمت باشد، ۲۴۳ برابر است با 3^5 و برای اینکه برمجذور کاملی قابل قسمت باشد، این مجذور کامل می تواند مساوی 9 یا 81 باشد، پس $y+1$ مساوی 3 یا 9 خواهد بود ($y+1=1$ جواب مثبت نمی دهد)، و از آنجا جوابهای yx بدست می آید.

جواب: ۲۴ و ۸ یا ۵۴ و ۲.

۳۵۴. اگر طول و عرض مستطیل را به ترتیب x و y فرض کنیم باید داشته باشیم:

$$2x + 2y = xy \Rightarrow y = \frac{2x}{x-2} = 2 + \frac{4}{x-2}$$

برای اینکه $\frac{4}{x-2}$ عددی صحیح بشود، باید $x-2$ یکی از مقسوم علیه های ۴ باشد. به ازای مقسوم علیه های منفی ۴، برای x یا y جواب منفی بدست می آید که قابل قبول نیست و به ازای مقسوم علیه های مثبت ۴ داریم:

$$x-2=1 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=6 \end{cases} ; x-2=2 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=4 \end{cases} ;$$

$$x-2=4 \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=3 \end{cases}$$

بنابراین ابعاد مستطیل ۶، ۳، یا ۴، ۴ است.

۳۵۵. اگر طول و عرض مستطیل را به ترتیب x و y فرض کنیم، طبق فرض مسأله باید داشته باشیم:

$$4(x+y+\sqrt{x^2+y^2})=xy$$

این معادله پس از گویا کردن بصورت قابل حل زیر در می آید:

$$y = \frac{8x-32}{x-8}$$

$$\begin{array}{|l} x=16 \\ y=12 \end{array} ; \begin{array}{|l} x=24 \\ y=10 \end{array} ; \begin{array}{|l} x=40 \\ y=9 \end{array} \quad \text{جواب:}$$

۳۵۶. اگر رقم یکان عدد y و رقم دهگان آن x باشد، باید داشته باشیم:

$$10x + y = x^2 + y^2 \Rightarrow x(10 - x) = (y - 1)y(y + 1)$$

سمت راست تساوی حاصلضرب سه عدد متوالی است و بنابراین عددی است زوج و قابل قسمت بر ۳. بنابراین $x(10 - x)$ و از آنجا خود x عددی است زوج. برای اینکه $x(10 - x)$ قابل قسمت بر ۳ باشد باید $x = 4$ یا $x = 6$ بشود. که در هر دو حالت $y = 3$ بدست می‌آید.

جواب: ۴۳ یا ۶۳.

۳۵۷. معادله را می‌توان به ترتیب چنین نوشت:

$$y = \frac{3x - 4}{2x - 5} = \frac{1}{2} \times \frac{6x - 8}{2x - 5} = \frac{1}{2} \times \frac{3(2x - 5) + 7}{2x - 5} = \frac{1}{2} \left(3 + \frac{7}{2x - 5} \right)$$

ادامهٔ عمل روشن است.

جواب: $y = 2$ ، $x = 6$ یا $y = 5$ ، $x = 3$.

۳۵۸. پس از تبدیلهای ساده، معادلهٔ مفروض به صورت زیر درمی‌آید:

$$(2x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 9^2 + 4^2$$

که با توجه به فرد بودن $2x - 1$ داریم:

$$\begin{cases} 2x - 1 = 9 \\ y - 3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 7 \end{cases}$$

۳۵۹. جوابها در جدول زیر داده شده است:

x	۱	۳	۴	۶	۷	۹
y	۴	۳	۱	۹	۷	۶

۳۶۰. جواب: $y = 8$ ، $x = 3$ یا $y = 8$ ، $x = 5$

۳۶۱. جواب: $y = 7$ ، $x = 2$ یا $y = 19$ ، $x = 4$

۳۶۲. معادلهٔ مفروض را می‌توان چنین نوشت:

$$y^2 - (x - 2)^2 = 5 \Rightarrow (y + x - 2)(y - x + 2) = 5$$

که جوابهای مثبت و صحیح آن منحصر به $x = 3$ و $y = 4$ است.

۳۶۳. معادله مفروض را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$(4x-1)^2 - 4y^2 = 85 ;$$

$$(4x+2y-1)(4x-2y-1) = 85 ;$$

۸۵ را می‌توان به چهار صورت 1×85 ، 5×17 ، -1×-85 یا -5×-17 نوشت که از آنجا ۸ دستگاه مختلف تشکیل می‌شود و از بین آنها جوابهای مثبت $x=11$ ، $y=21$ یا $x=3$ ، $y=3$ بدست می‌آید.

۳۶۴. معادله را می‌توان چنین نوشت:

$$(2x-3)^2 + 4(y-2)^2 = 101 = 10^2 + 1^2$$

و چون $2x-3$ عددی فرد و $2(y-2)$ عددی زوج است داریم:

$$\begin{cases} 2x-3 = \pm 1 \\ 2(y-2) = \pm 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=7 \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} x=2 \\ y=7 \end{cases}$$

۳۶۵. تعداد گوسفند، مرغ و کبوتر را به ترتیب x و y و z می‌گیریم. دو معادله زیر را داریم:

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ 500x+200y+10z=10000 \end{cases} \Rightarrow 49x+19y=900 ;$$

که پس از حل معادله سیال درجه اول، مقادیر x و y و سپس z بدست می‌آید. جواب: ۱۱ گوسفند، ۱۹ مرغ و ۷۰ کبوتر.

۳۶۶. اگر عدد را به صورت $\overline{abcd}$ در نظر بگیریم، باید داشته باشیم:

$$\overline{abcd} = (a+b+c+d)^2$$

داریم:

$$10000 \leq \overline{abcd} < 100000 \Rightarrow 100 \leq a+b+c+d < 1000$$

و بنابراین $\overline{abcd}$ توان چهارم یکی از عددهای ۸، ۷، ۶ یا ۹ می‌تواند باشد که از بین آنها تنها توان چهارم ۷ یعنی ۲۴۰۱ رقمهایی به مجموع ۷ دارد.

جواب: ۲۴۰۱

۳۶۷. اگر فرض کنیم $\overline{mc} = a$ و $\overline{du} = b$ ، باید داشته باشیم:

$$100a+b = (a+b)^2 \Rightarrow (a+b)(a+b-1) = 99a$$

سمت چپ تساوی، حاصلضرب دو عدد متوالی است، بنابراین باید $99a$ به صورت حاصلضرب دو عدد متوالی درآید:

(۱) $a=98$ که در این صورت $b=1$ و عدد مطلوب به صورت 9801 در می‌آید.

(۲) اگر $a=xy$ فرض کنیم، تنها می‌توان $11x$ و $9y$ را به صورت دو عدد متوالی در آورد، در این صورت باید داشته باشیم:

$$11x+1=9y \quad \text{یا} \quad 11x=9y+1$$

در حالت $11x=9y+1$ ، از حل معادله سیال درجه اول به جوابهای زیر می‌رسیم:

$$x=9t-4; \quad y=11t-5$$

و بنابراین خواهیم داشت:

$$a=x \cdot y=99t^2-89t+20$$

ولی باید $a < 100$ باشد، از حل نامساوی $99t^2-89t+20 < 100$

به جواب $-\frac{5}{9} < t < \frac{16}{11}$ می‌رسیم که چون t عددی است صحیح $t=0$ می‌شود.

ولی چون به ازای $t=0$ مقادیر x و y منفی می‌شوند، تنها $t=1$ قابل قبول است که به ازای آن $x=5$ و $y=6$ و در نتیجه $a=30$ و $b=25$ بدست می‌آید و عدد مطلوب به صورت 3025 است.

در حالت $11x+1=9y$ هم اگر مثل حالت قبل عمل کنیم، به جواب 3025 می‌رسیم:

جواب: 9801 یا 3025 یا 3025

۳۶۸. $uv \cdot t = b$ ، فرض کنید، معادله به صورت زیر در می‌آید:

$$(a+b)(a+b-1)=999a$$

و با توجه به اینکه $999=37 \times 27$ است شبیه تمرین قبل عمل کنید.

جواب: 998001 یا 494209

۳۶۹. معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$3(2x+5)=y^2-5x^2$$

سمت چپ تساوی مضربی است از ۳. بنابراین سمت راست تساوی هم باید مضربی از ۳ باشد. بنابراین باید yx هر دو مضرب ۳ باشند (زیرا در غیر-

اینصورت باقیمانده‌های y^2 و x^2 بر ۳ مساوی واحد و تفاضل $5y^2 - x^2$ غیر-قابل قسمت بر ۳ می‌شود. ولی اگر xy هر دو مضرب ۳ باشند $5y^2 - x^2$ مضرب ۹ می‌شود و باید $5x + 2$ مضرب ۳ باشد که غیرممکن است (زیرا x را مضرب ۳ گرفته‌ایم).

۳۷۰. بین دو معادله $m + d = 2c$ و $m^2 + d = 10c$ مجهول d را حذف می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$m(m+1) = 12c$$

از دو عدد متوالی m و $m+1$ باید یکی مضرب ۳ و دیگر مضرب ۴ باشد. بنابراین $m = 3$ یا $m = 8$ می‌تواند باشد، ولی به‌ازای $m = 3$ برای d عدد منفی ۱ - بدست می‌آید که قابل قبول نیست و به‌ازای $m = 8$ خواهیم داشت:

$$c = 6 ; d = 4$$

جواب: ۸۶۴

۳۷۱. بین دو معادله z را حذف کنید، به یک معادله سیال درجه اول می‌رسید که بدون جواب است.
۱۰۳۷۲ فرض می‌کنیم:

$$\begin{cases} m \cdot c \cdot d \cdot u = \alpha^3 \\ c - d = \alpha \end{cases}$$

واضح است که $\alpha \neq 0$ ، زیرا اگر $\alpha = 0$ باشد، باید یکی از رقمها برابر صفر شود که مخالف فرض است و اگر $\alpha = 1$ باشد باید همه رقمها برابر ۱ باشند که در اینصورت $\alpha = c - d = 0$ می‌شود.
برای بقیه موارد دو حالت تشخیص می‌دهیم:

حالت اول) α عددی است اول (۲، ۳، ۵، یا ۷)، در اینصورت می‌توان

نوشت:

$$m \cdot c \cdot d \cdot u = \alpha^3 \times 1 \times 1 \times 1 = \alpha^2 \times \alpha \times 1 \times 1 = \alpha \times \alpha \times \alpha \times 1$$

بنابراین یکی از موردهای زیر امکان پذیر است:

$$۱) \alpha^3 - 1 = \alpha ; \quad ۲) \alpha^2 - \alpha = \alpha ;$$

(۱) اساس حل این مسأله از کتاب «حساب استدلالی» مجموعه علوم برداشته شده است.

$$۳) \alpha^2 - 1 = \alpha ; \quad ۴) \alpha - 1 = \alpha$$

معادله‌های (۱) و (۲) و (۴) ریشه صحیح ندارند و از معادله (۲) جواب $\alpha = ۲$ بدست می‌آید که از آنجا:

$$\overline{mcdu} = ۱۴۲۱$$

حالت دوم α عددی است غیر اول (۴، ۶ یا ۸).

برای $\alpha = ۴$ داریم:

$$m \cdot c \cdot d \cdot u = ۶۴ ; c - d = ۴$$

از مقسوم‌علیه‌های ۶۴ که تفاضلی برابر ۴ داشته باشند $c = ۸$ و $d = ۴$ قابل قبول است و در نتیجه $m \cdot u = ۲$ و جوابهای مسأله ۱۸۴۲ و ۲۸۴۱ می‌شود. برای $\alpha = ۶$ داریم:

$$m \cdot c \cdot d \cdot u = ۲۱۶ ; c - d = ۶$$

از مقسوم‌علیه‌های ۲۱۶ که تفاضل ۶ داشته باشند $c = ۹$ و $d = ۳$ قابل قبول اند. از آنجا $m \cdot u = ۸$ و جوابهای مسأله ۸۹۳۱، ۱۹۳۸، ۲۹۳۴ می‌شود.

برای $\alpha = ۸$ داریم:

$$m \cdot c \cdot d \cdot u = ۵۱۲ ; c - d = ۸$$

چون همه مقسوم‌علیه‌های ۵۱۲ توانهایی از ۲ هستند، تفاضل بین دو مقسوم‌علیه هرگز برابر ۸ نیست و در نتیجه مسأله در این حالت جواب ندارد.

جواب: ۱۴۲۱، ۱۸۴۲، ۲۸۴۱، ۸۹۳۱، ۱۹۳۸، ۲۹۳۴ و ۴۹۳۲. جواب: ۱۲۱ و ۴۸۴.

۳۲۴. دوطرف معادله را ۴ برابر و سپس به دوطرف يك واحد اضافه می‌کنیم، می‌شود:

$$(2x+1)^2 = 4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1$$

سمت راست معادله را چنین می‌نویسیم:

$$۱) \quad 4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1 = (2y^2 + y)^2 + 3y^2 + 4y + 1$$

عبارت $3y^2 + 4y + 1$ دو ریشه -۱ و $-\frac{1}{3}$ را دارد، یعنی به ازای همه مقادیر صحیح y (بجز $y = -۱$) مثبت است. بنابراین به‌ازای همه

مقادیر y (بجز $y = -1$) داریم:

$$(2x+1)^2 > (2y^2+y)^2$$

از طرف دیگر می‌توان نوشت:

$$4y^4 + 4y^3 + 4y^2 + 4y + 1 = (2y^2 + y + 1)^2 - (y^2 - 2y)$$

به استثنای $y = 0, 1, 2$ به ازای همه مقادیر y داریم $y^2 - 2y > 0$ و بنابر-

این اگر $y \neq 0, 1, 2$ باشد داریم:

$$(2x+1)^2 < (2y^2+y+1)^2$$

و بنابراین به استثنای مواردی که y مساوی $1, 0, -1$ باشد، داریم:

$$(2y^2+y)^2 < (2x+1)^2 < (2y^2+y+1)^2$$

یعنی اگر معادله مفروض جوابهای صحیح داشته باشد، این جوابها تنها به

ازای $y = -1, 0, 1, 2$ است:

$$y = -1 \Rightarrow 2x+1 = \pm 1$$

$$y = 0 \Rightarrow 2x+1 = \pm 1$$

$$y = 1 \Rightarrow (2x+1)^2 = 17$$

$$y = 2 \Rightarrow 2x+1 = \pm 11$$

$$\left| \begin{array}{l} x = -6 \\ y = 2 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{l} x = 5 \\ y = 2 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{l} x = -1 \\ y = 0 \end{array} \right| ; \quad \text{جواب:}$$

$$\left| \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x = -1 \\ y = -1 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ y = -1 \end{array} \right|$$

و جوابهای صحیح و مثبت منحصر به $x = 5$ و $y = 2$ است.

۳۷۵. واضح است که در این رشته عددها بزرگترین عدد، یکی از دو عدد اول

یا دوم است. روشن است که در این مورد هم وقتی که بزرگترین عدد جمله

دوم باشد، رشته طولانی‌تر خواهد شد، زیرا اگر این رشته عددها $a, b, \dots$

باشند که در آن $a < b$ باشد، می‌توان $a - b$ را بعنوان اولین جمله به آن

اضافه کرد بدون اینکه در عددهای بعدی تغییری حاصل شود. به این ترتیب

طولانی‌ترین رشته مطلوب وقتی بدست می‌آید که آنها را به صورت زیر بنویسیم:

$$1; \dots; 1965; 1966; 1; 1967; 1966$$

که در اینصورت به سادگی روشن می‌شود که در آن 2952 عدد خواهد بود.

حالا ثابت می‌کنیم که اگر اولین عدد در اعداد دیگری بجز ۱۹۶۶ بنویسیم، تعداد از ۲۹۵۲ تجاوز نمی‌کند.

اثبات را به طریق استقراء ریاضی انجام می‌دهیم و ثابت می‌کنیم که اگر رشته‌های عددی که با قانون فوق تشکیل شده‌اند از بزرگترین جمله خود مساوی n شروع شده باشد، تعداد جمله‌هایش از $\left[\frac{3n+1}{2}\right]$ تجاوز نمی‌کند.^۱

تحقیق حکم برای $n=1, 2$ مشکل نیست. فرض کنید $n > 2$ و رشته‌ها به این ترتیب شروع شده باشد:

$$n; k; n-k; \dots$$

دو حالت در نظر می‌گیریم:

(۱) $\frac{n}{2} < k < n$ ، در این صورت رشته‌ای که از k شروع می‌شود، طبق

فرض استقراء، از $\left[\frac{3k+1}{2}\right]$ جمله بیشتر ندارد و از آنجا نتیجه می‌شود که در رشته اصلی حداکثر تعداد جمله‌ها چنین است:

$$\begin{aligned} \left[\frac{3k+1}{2}\right] + 1 &\leq \left[\frac{3(n-1)+1}{2}\right] + 1 = \\ &= \left[\frac{3n}{2}\right] < \left[\frac{3n+1}{2}\right] \end{aligned}$$

(۲) $k < \frac{n}{2}$. در این صورت رشته‌های مفروض چنین است:

$$n; k; n-k; n-2k; k; \dots$$

رشته‌ای را که از $m=k$ یا $m=n-2k$ شروع می‌شود در نظر می‌گیریم (یعنی اولین جمله آن یکی از جمله‌هایی باشد که زیر آن خط کشیده‌ایم). در این رشته حداکثر $\left[\frac{3m+1}{2}\right]$ جمله است و چون $m \leq n-2$ است و حداقل سه جمله رشته را حذف کرده‌ایم، تعداد جمله‌های رشته اصلی حداکثر چنین است:

(۱) منظور از $[\alpha]$ بزرگترین عدد صحیحی است که از α تجاوز نکند (تابع قسمت صحیح α).

$$\left[\frac{3(n-2)}{2} + 1 \right] + 3 = \left[\frac{3n+1}{2} \right]$$

در حالت‌های $k=n$ و $k=\frac{n}{2}$ حداکثر تعداد جمله‌ها $\left[\frac{3n+1}{2} \right] < 3$ است. بنابراین ثابت شد که اگر رشته عددهایی از بزرگترین عدد خود یعنی n شروع شود، حداکثر $\left[\frac{3n+1}{2} \right]$ جمله خواهد داشت. از اینجا نتیجه می‌شود که اگر در رشته $a; b; \dots$ داشته باشیم $a < b < 1967$ حداکثر تعداد جمله‌ها چنین است:

$$1 + \left[\frac{3b+1}{2} \right] \leq \left[\frac{3 \times 1967 + 1}{2} \right] = 2952$$

۳۷۶. طبق فرض مسأله باید داشته باشیم:

$$x + 5 + 2 + y + z + t = 11n \quad (1)$$

با توجه به اینکه $x \neq 0$ است، حداقل $x + y + z + t$ مساوی ۱ و حداکثر آن ۳۶ است و بنابراین نامساوی $8 \leq 11n \leq 43$ برقرار است، یعنی n می‌تواند مقادیر ۳ و ۴ را اختیار کند که در اینصورت یکی از سه معادله زیر را خواهیم داشت:

$$x + y + z + t = 4 \quad (2)$$

$$x + y + z + t = 15 \quad (3)$$

$$x + y + z + t = 26 \quad (4)$$

برای اینکه خود عدد بر ۱۱ قابل قسمت باشد، باید داشته باشیم:

$$x - 5 + 2 - y + z - t = 11m$$

که با توجه به حداقل و حداکثر مقدار سمت چپ تساوی بدست می‌آید: $-25 \leq 11m \leq 25$ و بنابراین m می‌تواند یکی از مقادیر ۱، ۰ و -۱ باشد. را اختیار کند که در اینصورت یکی از سه معادله زیر باید برقرار باشد:

$$x - y + z - t = -8 \quad (5)$$

$$x - y + z - t = 3 \quad (6)$$

$$x - y + z - t = 14 \quad (7)$$

برای حل مسأله باید هر يك از معادله‌های (۲) و (۳) و (۴) را با هر

يك از معادله‌های (۵) و (۶) و (۷) حل کرد که در اینصورت ۹ دستگاه مختلف بدست می‌آید. دستگاه‌های (۲) و (۵) ؛ (۲) و (۶) ؛ (۲) و (۷) ؛ (۳) و (۵) ؛ (۳) و (۷) ؛ (۴) و (۶) ؛ (۴) و (۷) جواب صحیح و مثبت ندارند. بنابراین دستگاه (۳) و (۶) و یا دستگاه (۴) و (۵) را باید حل کنیم. از دستگاه :

$$\begin{cases} x+y+z+t=15 \\ x-y+z-t=3 \end{cases}$$

بدست می‌آید : $x+z=9$ و $y+t=6$. مقادیر متناظر x و z و همچنین مقادیر متناظر t و y را در جدولهای زیر داده‌ایم :

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
z	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰
y	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶		
t	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰		

که از اینجا $9 \times 7 = 63$ جواب بدست می‌آید. همچنین از دستگاه :

$$\begin{cases} x+y+z+t=26 \\ x-y+z-t=-8 \end{cases}$$

بدست می‌آید : $x+z=9$ و $y+t=17$ ، مقادیر متناظر x و z مثل حالت قبل است و برای y و t : $y=8$ ، $t=9$ یا $y=9$ ، $t=8$ بدست می‌آید که از آنجا $9 \times 2 = 18$ جواب و رویم برای مسأله $63 + 18 = 81$ جواب خواهیم داشت.

اگر عدد شش رقمی را با رقمهای نامساوی در نظر بگیریم ۸ جواب بیشتر نخواهیم داشت، این ۸ جواب چنین‌اند :

از دستگاه اول :

$$۱۵۲۰۸۶ ; ۱۵۲۶۸۰ ; ۸۵۲۰۱۶ ; ۸۵۲۶۱۰$$

از دستگاه دوم :

$$۳۵۲۸۶۹ ; ۳۵۲۹۶۸ ; ۶۵۲۸۳۹ ; ۶۵۲۹۳۸$$

۰۲۷۷. فرض می‌کنیم :

$$\log_2(x^2 - 4x - 1) = m$$

در اینصورت خواهیم داشت:

$$x^2 - 4x - (2^m + 1) = 0 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{5 + 2^m}$$

اگر $\sqrt{5 + 2^m}$ عددی گویا باشد، x هم گویاست و برعکس. بنابراین باید ببینیم به ازای چه مقادیری از m عدد $\sqrt{5 + 2^m}$ عددی گویاست؟ دو حالت در نظر می‌گیریم:

(۱) $m \geq 0$. در اینصورت اگر k عددی صحیح باشد، باید داشته

باشیم:

$$5 + 2^m = (2k + 1)^2 \Rightarrow 2^{m-2} = k(k+1) - 1$$

سمت راست این تساوی عددی است فرد و بنابراین باید $m = 2$ باشد

که در اینصورت $x_1 = 5$ و $x_2 = -1$ می‌شود.

(۲) $m < 0$. اگر $m = -n$ فرض کنیم $n > 0$ می‌شود و داریم:

$$\sqrt{5 + 2^m} = \sqrt{\frac{5 \times 2^n + 1}{2^n}}$$

از اینجا نتیجه می‌شود که باید $n = 2p$ باشد (p عددی است صحیح)

و اگر k عددی صحیح باشد:

$$5 \times 4^p + 1 = (2k + 1)^2 \Rightarrow 5 \times 4^{p-1} = k(k+1)$$

چون k و $k+1$ ، همچنین 5 و 4^{p-1} نسبت بهم اولند باید داشته

باشیم:

$$\begin{cases} k+1=5 \\ k=4^{p-1} \end{cases} \Rightarrow p=2 \Rightarrow m=-4$$

که از آنجا جواب‌های $x_2 = -\frac{1}{4}$ و $x_3 = \frac{17}{4}$ بدست می‌آید.

جواب: $x_1 = 5$ ، $x_2 = -1$ ، $x_3 = \frac{17}{4}$ و $x_4 = -\frac{1}{4}$.

۰۳۷۸. معادله مفروض را می‌توان چنین نوشت:

$$(x-p)(y-p)=p^2$$

حاصلضرب دو عدد صحیح $x-p$ و $y-p$ مساوی مجذور یک عدد

اول شده است و بنابراین تنها حالت‌های زیر را خواهیم داشت:

$$۱) \quad x-p=p \quad ; \quad y-p=p \quad ;$$

$$۲) \quad x-p=-p \quad ; \quad y-p=-p \quad ;$$

$$۳) \quad x-p=۱ \quad ; \quad y-p=p^2 \quad ;$$

$$۴) \quad x-p=-۱ \quad ; \quad y-p=-p^2 \quad ;$$

$$۵) \quad x-p=p^2 \quad ; \quad y-p=۱ \quad ;$$

$$۶) \quad x-p=-p^2 \quad ; \quad y-p=-۱$$

و بنابراین برای معادله ۶ جواب بدست می‌آید:

$$\begin{cases} x_1=2p \\ y_1=2p \end{cases} ; \begin{cases} x_2=0 \\ y_2=0 \end{cases} ; \begin{cases} x_3=p+1 \\ y_3=p+p^2 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} x_4=p-1 \\ y_4=p-p^2 \end{cases} ; \begin{cases} x_5=p+p^2 \\ y_5=p+1 \end{cases} ; \begin{cases} x_6=p-p^2 \\ y_6=p-1 \end{cases}$$

۰۳۲۹ داریم:

$$8x^2-2x-3=(4x-3)(2x+1)$$

اگر $4x-3=0$ باشد، $x=\frac{3}{4}$ در شرط مسأله صدق می‌کند و اگر

$4x-3 \neq 0$ باشد داریم:

$$\sqrt{8x^2-2x-3}=|4x-3|\sqrt{\frac{2x+1}{4x-3}}$$

بنابراین طبق شرط مسأله باید داشته باشیم:

$$\frac{2x+1}{4x-3}=m^2 \Rightarrow x=\frac{3m^2+1}{4m^2-2}$$

جواب: $x=\frac{3}{4}$ و $x=\frac{3m^2+1}{4m^2-2}$ که در آن m عددی گویا و دلخواه است.

۰۳۸۵. به سادگی می‌توان ثابت کرد که اگر یکی از چهار مجهول مساوی

صفر باشد، سه مجهول دیگر نیز برابر صفر می‌شود. بنابراین دستگاه جوابهای $x=y=z=t=0$ را قبول دارد. حالا اگر مجهولها را مخالف صفر فرض کنیم، معادله دوم را، پس از ضرب دو طرف آن در x^2 ، می‌توان چنین نوشت:

$$x^4 - 2x^2y^2 + 3(x^2z^2) - 6x^2t^2 = 0$$

که اگر بجای x^2z^2 مساویش $4y^2t^2$ را از معادله اول قرار دهیم، پس از تجزیه، عبارت اخیر به صورت زیر در می‌آید:

$$(x^2 - 2y^2)(x^2 - 6z^2) = 0$$

و این معادله هم (با فرض صفر نبودن جوابها) دارای جواب صحیح نیست. بنابراین معادله بجز جوابهای صفر، جواب دیگری ندارد. ۳۸۱. از محاسبه باقیمانده تقسیم جمله‌ها، بر ۳ یا بر ۴ استفاده کنید. ۳۸۲. طبق شرط مسأله بدست می‌آید:

$$1000a + 100b + 10c + a = (5c + 1)^2$$

معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$1000a + 100b - 25c^2 = 1 - a$$

چون سمت چپ معادله بر ۲۵ قابل قسمت است، باید داشته باشیم: $a = 1$ و معادله چنین می‌شود:

$$c^2 = 4(b + 10) \Rightarrow b = 6; c = 8$$

جواب: ۱۶۸۱

۳۸۳. اگر x, y و z عددهای مجهول باشند و داشته باشیم $x < y < z$ ، مسأله منجر به جستجوی جوابهای صحیح دستگاه زیر می‌شود:

$$\begin{cases} x + y + z = 376 \\ x^2 + z^2 = 2y^2 \end{cases}$$

از معادله دوم روشن است که اگر x و z عددهایی فرد باشند، y هم عددی است فرد (زیرا مجموع مربعات دو عدد فرد عددی است زوج و غیر قابل قسمت بر ۴) که در این صورت مجموع $x + y + z$ عددی فرد و متناقض با معادله اول می‌شود. پس x و z هر دو زوج‌اند و در نتیجه y هم زوج است. اگر

فرض کنیم:

$$x = 2x_1 ; y = 2y_1 ; z = 2z_1$$

دستگاه چنین می‌شود:

$$\begin{cases} x_1 + y_1 + z_1 = 188 \\ x_1^2 + z_1^2 = 2y_1^2 \end{cases}$$

با استدلالی شبیه استدلال بالا، می‌توان بالاخره به دستگاه زیر رسید:

$$\begin{cases} u + v + w = 47 \\ u^2 + w^2 = 2v^2 \end{cases}$$

که در آن $x = 8u$ ، $y = 8v$ و $z = 8w$ است اینجا دیگر u و v و w عددهای فرد هستند و ضمناً داریم: $1 < v < 23$.

اگر $v \leq 11$ باشد $2v^2 \leq 242$ و $u + w \geq 36$ و $u^2 + w^2 > 324$ می‌شود که غیر ممکن است.

بنابراین برای v مقادیر $13, 15, 17, 19, 21$ باقی می‌ماند. با قرار

دادن هر یک از این مقادیر v در دستگاه به جواب منحصر $u = 7$ ، $v = 17$ و $w = 23$ می‌رسیم.

جواب. $184, 56, 136, 184$.

۳۸۴. اگر عبارت $ax^3 + bx^2 + cx + d$ به ازای $x = 19$ برابر ۱ و به ازای $x = 62$ برابر ۲ شود، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} a \times 19^3 + b \times 19^2 + c \times 19 + d = 1 \\ a \times 62^3 + b \times 62^2 + c \times 62 + d = 2 \end{cases}$$

رابطه اول را از رابطه دوم کم می‌کنیم:

$$a(62^3 - 19^3) + b(62^2 - 19^2) + c(62 - 19) = 1$$

می‌بینیم که سمت چپ تساوی بر $62 - 19 = 43$ قابل قسمت است، درحالی‌که سمت راست تساوی بر این عدد قابل قسمت نیست.

۳۸۵. عددهای $\frac{40}{31}$ و $\frac{xyzt + xy + xt + zt + 1}{yzt + y + t}$ را به کسر مسلسل

تبدیل می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$x + \frac{1}{y + \frac{1}{z + \frac{1}{t}}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}}$$

و چون هر کسر تنها به یک صورت، می تواند به کسر مسلسل تبدیل شود، خواهیم داشت:

$$x=1 ; y=3 ; z=2 ; t=4$$

۳۸۶. معادله را نسبت به y منظم می کنیم:

$$y^2 - 2x^2 y + (x^4 - x^2 + 7) = 0$$

و از آنجا :

$$y = x^2 \pm \sqrt{x^4 - 7} \quad (۱)$$

برای اینکه y عددی صحیح باشد، باید $x^4 - 7$ مجذور کامل باشد، فرض می کنیم:

$$x^4 - 7 = k^2 \Rightarrow (x^2 + k)(x^2 - k) = 7$$

و چون ۷ را می توان به صورت ۱×۷ یا -۱×-۷ نوشت، مقادیر x و k بدست می آید.

جوابهای x منحصر به ± 2 است که از آنجا، با توجه به رابطه (۱)،

مقدار y هم محاسبه می شود.

$$\left| \begin{array}{l} x = -2 \\ y = -125 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x = -2 \\ y = -131 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 125 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 131 \end{array} \right| \quad \text{جواب:}$$

که جوابهای مثبت $x_1 = 2$ ، $x_2 = 2$ و $y_1 = 131$ ، $y_2 = 125$ است. روش دوم. معادله را می توان به این صورت نوشت:

$$(x^2 + x^2 - y)(-x^2 + x^2 + y) = 7$$

و بنابراین مقادیر x و y باید در یکی از دستگاههای زیر صدق کنند:

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + x^2 - y = 1 \\ -x^2 + x^2 + y = 7 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} x^2 + x^2 - y = 7 \\ -x^2 + x^2 + y = 1 \end{array} \right. ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + x^2 - y = -1 \\ -x^2 + x^2 + y = -7 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} x^2 + x^2 - y = -7 \\ -x^2 + x^2 + y = -1 \end{array} \right.$$

و از آنجا جوابها بدست می‌آید.

۳۸۷. فرض می‌کنیم $tx \neq 0$ ، در این صورت به ازای $t=y$ بنا بر معادله اول دستگاه داریم $x=z$ و بنابراین $t+x=y+z$ که متناقض با معادله دوم دستگاه است. بنابراین $t \neq y$ و همچنین $t \neq z$ است. با توجه به این مقدمه جوابهای به صورت:

$$t=mn ; x=pq ; y=mp ; z=nq \quad (I)$$

در معادله اول صدق می‌کنند (q, p, n, m عددهای صحیح هستند).

با قراردادن مقادیر (I) در معادله دوم دستگاه بدست می‌آید:

$$mn+pq=mp+nq+2 \Rightarrow (m-q)(n-p)=2 \quad (II)$$

از تساوی (II) دستگاههای زیر بدست می‌آید:

$$۱) \quad \begin{cases} m-q=2 \\ n-p=1 \end{cases} ; ۲) \quad \begin{cases} m-q=-2 \\ n-p=-1 \end{cases} ;$$

$$۳) \quad \begin{cases} m-q=1 \\ n-p=2 \end{cases} ; ۴) \quad \begin{cases} m-q=-1 \\ n-p=-2 \end{cases}$$

و از آنجا:

$$\left. \begin{array}{l} \begin{cases} p_1=n-1 \\ q_1=m-2 \end{cases} ; \begin{cases} p_2=n+1 \\ q_2=m+2 \end{cases} \\ \begin{cases} p_3=n-2 \\ q_3=m-1 \end{cases} ; \begin{cases} p_4=n+2 \\ q_4=m+1 \end{cases} \end{array} \right\} \quad (۵)$$

با قرار دادن مقادیر (۵) در رابطه‌های (I) خواهیم داشت:

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1=mn \\ x_1=(m-2)(n-1) \\ y_1=m(n-1) \\ z_1=(m-2)n \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} t_2=mn \\ x_2=(m+2)(n+1) \\ y_2=m(n+1) \\ z_2=(m+2)n \end{array} \right. ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t_p = mn \\ x_p = (m-1)(n-2) \\ y_p = m(n-2) \\ z_p = (m-1)n \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} t_p = mn \\ x_p = (m+1)(n+2) \\ y_p = m(n+2) \\ z_p = (m+1)n \end{array} \right.$$

چهار دستگاه جواب شامل تمام جوابهای ممکن دستگاه مفروض می باشند. فقط متذکر می شویم که دستگاه معادله های مفروض با تبدیل t و x به یکدیگر و همچنین y و z یکدیگر تغییر نمی کند ، بنابراین از هر دسته جواب (λ و γ و β و α) می توان ، با تبدیل دوری ، سه دسته جواب دیگر هم بدست آورد (که در حقیقت این جوابهای جدید به ازای مقادیر جدیدی از m و n هستند):

t	α	α	β	β
x	β	β	α	α
y	γ	λ	γ	λ
z	λ	γ	λ	γ

به این ترتیب به ازای هر مقدار دلخواه m و n می توان $16 = 4 \times 4$ دسته جواب بدست آورد.

۳۸۸. از معادله معلوم است که y عددی است فرد. فرض کنیم $y = 2z + 1$ بدست می آید:

$$x^2 = 10z^2 + 10z + 6$$

از اینجا معلوم می شود که y عددی است زوج ، $x = 2u$ می گیریم، در این صورت بدست می آید:

$$2u^2 - 5z(z+1) = 3$$

که غیر ممکن است، زیرا $2u^2$ و $z(z+1)$ زوج اند ، درحالی که ۳ عددی است فرد .

۳۸۹. از تساوی $۱۲۱n - ۲ = k(k+۱)$ نتیجه می‌شود:

$$k = \frac{-۱ \pm \sqrt{۱۱(۴۴n - ۱)}}{۲}$$

مقدار زیر رادیکال به ازای هیچ مقداری از n نمی‌تواند مجذور کامل باشد، زیرا بر ۱۱ قابل‌قسمت است ولی بر $۱۱^۲$ قابل‌قسمت نیست، یعنی به ازای هر مقداری از n ، عدد k کنگ است.

۳۹۰. جواب: $x=۱$ ، $y=۲$.

۳۹۱. اگر بین دو معادله x را حذف کنیم به معادله $y = \frac{۳z-۴}{z-۳}$ می‌رسیم که قابل حل است.

۳۹۲. اگر عدد را $\overline{ab}$ فرض کنیم، باید داشته باشیم:

$$۱۰a + b = (a+b)^2 \Rightarrow a = ۵ - b \pm \sqrt{۲۵ - ۹b}$$

$۲۵ - ۹b$ تنها به ازای $b=۰$ و $b=۱$ مجذور کامل است ولی به ازای $b=۰$ برای a دو جواب صفر و ۱۰ بدست می‌آید که هیچکدام قابل قبول نیست.

به ازای $b=۱$ جواب $a=۸$ و $a=۰$ بدست می‌آید که تنها $a=۸$ قابل قبول است.

جواب: ۸۱

۳۹۳. داریم:

$$۱+۲+۳+\dots+n = \frac{1}{2}n(n+۱)$$

$$۱^۲+۲^۲+۳^۲+\dots+n^۲ = \frac{1}{6}n(n+۱)(۲n+۱)$$

و از آنجا معادله مفروض به صورت زیر در می‌آید:

$$\left[\frac{1}{4}n^۲(n+۱)^۲ \right] \times \frac{1}{3}(۲n+۱) = m^۲$$

$n(n+۱)$ عددی است زوج و بنابراین $\frac{1}{4}n^۲(n+۱)^۲$ مجذور يك عدد

صحیح است، پس کافی است $\frac{1}{3}(۲n+۱)$ مجذور يك عدد صحیح باشد.

برای اینکه $2n+1$ بر ۳ قابل قسمت باشد، باید باقیمانده تقسیم $2n$ بر ۳ مساوی ۲ یا باقیمانده تقسیم n بر ۳ مساوی ۱ باشد، یعنی داشته باشیم:

$$n=3k+1, \text{ در اینصورت } \frac{1}{3}(2n+1) \text{ به صورت } 2k+1 \text{ در می آید}$$

که باید مجذور کامل باشد و چون $2k+1$ عددی است فرد، باید مجذور یک عدد فرد باشد:

$$2k+1=(2r+1)^2 \Rightarrow k=2r^2+2r$$

که اگر در رابطه $n=3k+1$ قرار دهیم، بدست می آید:

$$n=6r^2+6r+1$$

به ازای هر عدد صحیح غیر منفی از مقدار n و سپس m بدست می آید.

$$394. \text{ جواب: } z=3, y=0, x=5$$

395. N را عددی مجهول می گیریم، باید داشته باشیم:

$$N=n^2+(n+1)^2=2n^2+2n+1;$$

$$N=(2n+1)^2+4n^2(2n+1)+4n^2=$$

$$=(2n+1)^2+4n^2(n+1)^2;$$

$$N^2=[4n^2(n+1)^2-(2n+1)^2]^2+[4n(n+1)(2n+1)]^2$$

چون N^2 باید مجموع مربعات دو عدد متوالی باشد، باید داشته باشیم:

$$4n(n+1)(2n+1)-(2n+1)^2+4n^2(n+1)^2=1$$

که پس از خلاصه کردن، چنین می شود:

$$|4n(n+1)^2(n-2)-1|=1$$

که منجر به حل دو معادله زیر می شود:

$$n(n+1)^2(n-2)=0$$

$$2n(n+1)^2(n-2)=1$$

معادله اول سه جواب $n=0$ ، $n=-1$ و $n=2$ را قبول دارد و معادله دوم دارای جواب صحیح نیست.

$$\text{از آنجا: } N_1=N_2=1; N_3=4+9=13$$

توضیح. برای حل کامل مسأله باید ضمناً ثابت کرد که صورت N^2 ، که در بالا آوردیم، تنها صورتی است که می تواند به شکل مجموع دو مربع کامل

نوشته شود.

۳۹۶. اگر فرض کنیم:

$$N = 5^{2n-1} \times 2^{n+1} + 3^{n+1} \times 2^{2n-1}$$

داریم:

$$\begin{aligned} 10N &= 4 \times 25^n \times 2^n + 15 \times 3^n \times 4^n = \\ &= 4(5^{2n} - 12^n) + 19 \times 12^n \end{aligned}$$

تفاضل $5^{2n} - 12^n$ بر ۵۰ یعنی $50 - 12$ یعنی $38 = 2 \times 19$ قابل قسمت است و بنابراین N بر ۱۹ قابل قسمت است یعنی به ازای هر عدد صحیح و مثبت n برای m هم عددی صحیح و مثبت بدست می‌آید.

۳۹۷. چون حاصلضرب دو عدد سه رقمی $\overline{xyz}$ و $\overline{zyx}$ يك عدد پنج رقمی شده است، بنابراین باید حاصلضرب دو رقم zx ، عددی یکرقمی باشد، اگر یکان عملهای ضرب را با یکان حاصلضرب مقایسه کنیم، باید داشته باشیم:

$$x \cdot z = x \Rightarrow z = 1 \quad (x \neq 0 ; z \neq 0)$$

در اینصورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} (100x + 10y + 1)(100z + 10y + x) &= 10000x + \\ &+ 1000 + 1000y + 10y + x ; \end{aligned}$$

$$101xy + 10x^2 + 90y + 10y^2 = 90 \quad \text{و یا:}$$

جمله $101xy$ در سمت چپ تساوی به این معناست که x یا y باید صفر باشند، زیرا در غیر اینصورت سمت چپ تساوی از ۹۰ بزرگتر می‌شود. ولی اگر $y \neq 0$ باشد وجود $10y^2 + 90y$ باز هم سمت چپ تساوی را از ۹۰ بزرگتر می‌کند، پس $y = 0$ و از آنجا $x = 3$ بدست می‌آید.

جواب: ۳۱۰۰۳

۳۹۸. می‌خواهیم تعداد ریشه‌های صحیح و غیر منفی معادله $\Delta x + 2y + z = 10n$ را بدست آوریم (n عددی صحیح، مثبت و مفروض است).

واضح است که جوابهای x_0, y_0, z_0 از معادله $\Delta x + 2y + z = 10n$ متناظرند با جوابهای $2 + x_0, y_0$ و z_0 از معادله:

$\Delta x + 2y + z = 10(n+1)$. اگر در معادله اخیر $x \geq 2$ باشد، پیدا کردن جوابهای آن منجر به پیدا کردن جوابها در معادله اصلی می‌شود (منتهی با

این شرط که در معادله اصلی x را دو واحد کمتر بگیریم.

مثلا اگر در معادله $5x + 2y + z = 10(n+1)$ فرض کنیم $x=2$

مثل اینست که در معادله $5x + 2y + z = 10n$ فرض کنیم $x=0$. به این

ترتیب اگر تعداد جوابهای صحیح و غیر منفی در معادله:

$5x + 2y + z = 10(n+1)$ را $\varphi(n+1)$ و تعداد جوابهای صحیح و غیر

منفی معادله $5x + 2y + z = 10n$ را $\varphi(n)$ فرض کنیم، اختلاف

$\varphi(n+1)$ و $\varphi(n)$ برابر می شود با تعداد جوابهای معادله:

$5x + 2y + z = 10(n+1)$ به ازای $x=0$ و $x=1$. ولی این معادله به

ازای $x=0$ دارای $5n+6$ جواب $(0 < y < 5n+5)$ و به ازای $x=1$

دارای $5n+3$ جواب $(0 < y < 5n+2)$ است.

بنابراین داریم:

$$\varphi(n+1) - \varphi(n) = 10n + 9$$

از طرف دیگر با جستجو می توان تحقیق کرد که $\varphi(1) = 10$ ، به

این ترتیب داریم:

$$\begin{array}{r} \varphi(1) = 10 \\ + \varphi(2) - \varphi(1) = 10 \times 1 + 9 \\ \varphi(3) - \varphi(2) = 10 \times 2 + 9 \\ \hline \varphi(n) - \varphi(n-1) = 10(n-1) + 9 \end{array}$$

و از جمع این رابطه ها بدست می آید:

$$\varphi(n) = 5n^2 + 4n + 1$$

۳۹۹. معادله مفروض را به صورت زیر می نویسیم:

$$\frac{z}{x} = \frac{bz + cy}{ay}$$

و فرض می کنیم $\frac{z}{y} = \frac{m}{n}$. در این صورت خواهیم داشت:

$$\frac{z}{x} = \frac{bm + cn}{an}$$

و از آنجا:

$$x:y:z = amn:n(bm+cn):m(bm+cn)$$

۴۰۰. داریم:

$$x! + y! = (x+y)!$$

$$\frac{1}{x!} + \frac{1}{y!} = \frac{(x+y)!}{x!y!} \quad \text{و یا:}$$

سمت راست تساوی عددی صحیح است، سمت چپ تساوی تنها وقتی صحیح خواهد بود که $x=y=0$ یا $x=y=1$ یا $x=y=2$ باشد.
جواب: $z=2$ ، $x=y=1$.

۴۰۱. از معادله معلوم است که x و y یا هردو زوج و یا هردو فرداند.
(۱) اگر $x=2\alpha+1$ و $y=2\beta+1$ باشد، در اینصورت داریم:

$$4\alpha(\alpha+1) + 4\beta(\beta+1) + 2 = 4^n$$

که پس از ساده کردن به ۲ بدست می‌آید:

$$2\alpha(\alpha+1) + 2\beta(\beta+1) + 1 = 2 \times 4^{n-1}$$

که غیرممکن است، زیرا سمت راست تساوی عددی زوج و سمت چپ آن عددی فرد است.

(۲) اگر $x=2m$ و $y=2p$ باشد، داریم:

$$m^2 + p^2 = 4^{n-1}$$

از معادلهٔ اخیر هم معلوم می‌شود که باید $m=2r$ و $p=2s$ باشد:

$$r^2 + s^2 = 4^{n-2}$$

که بالاخره به رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$u^2 + v^2 = 4$$

و معادلهٔ اخیر هم جواب غیر صفر ندارد. بنابراین معادلهٔ مفروض مسأله، جواب صحیح غیر صفر ندارد.

۴۰۲. اگر عدد مفروض را به N و مبنای مجهول را x فرض کنیم، داریم:

$$N = x^{n+2} + x^{n+1} + x^n + \dots + x^2 + x^1 + 1 =$$

$$= x^{n+2} + \frac{x^2(x^n - 1)}{x - 1} + 1 =$$

$$= \frac{x^{n+2} - x^{n+2} + x^{n+2} - x^2 + x - 1}{x - 1} =$$

$$= \frac{(x^2 - x + 1)(x^{n+2} - 1)}{x - 1} =$$

$$= (x^2 - x + 1)(x^{n+1} + x^n + \dots + x + 1)$$

عبارت $x^2 - x + 1$ به ازای $x = 14$ بر ۶۱ قابل قسمت است و به

ازای $x < 14$ بر ۶۱ قابل قسمت نیست. بنابراین به ازای $x = 14$ عدد N مضربی از ۶۱ است (به ازای هر عدد n). $x = 14$ کوچکترین عددی با این خاصیت است، زیرا در حالت $x < 14$ به ازای $n = 1$ عدد N بر ۶۱ قابل قسمت نیست و در حالت $x = 13$ به ازای $n = 2$.

۴۵۳. داریم:

$$۱) x = 1 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

$$۲) x = 3 \Rightarrow y^2 = 1 + 2 + 3 = 6 \Rightarrow y = \pm \sqrt{6}$$

(به ازای $x = 2$ برای y عدد صحیحی بدست نمی آید).

به ازای $x = 4$ داریم:

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

که مجذور کامل نیست و چون ۵۱ برابر ۱۲۰ است وقتی $x \geq 4$ باشد، سمت چپ معادله، عددی بدست می آید که به ۳ ختم می شود و نمی تواند مجذور کامل باشد.

$$\left| \begin{array}{l} x=3 \\ y=\pm\sqrt{6} \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x=1 \\ y=\pm 1 \end{array} \right| \quad \text{جواب:}$$

۴۵۴. فرض کنید عددهای

$$A = a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n \text{ و } A_1 = a_n a_1 \dots a_{n-1} a_n$$

بر ۷ قابل قسمت باشند. در این صورت تفاضل این دو عدد، یعنی:

$$A - A_1 = (10^n - 1)(a_1 - a_n)$$

هم باید بر ۷ قابل قسمت باشد. ولی A عدد دلخواه n رقمی است و بنابراین در حالت کلی $a_1 - a_n$ بر ۷ قابل قسمت نیست، بنابراین باید عدد:

$$10^{n-1} - 1 = \underbrace{99 \dots 99}_{\text{رقم } n-1}$$

بر ۷ قابل قسمت باشد. تقسیم را انجام می‌دهیم:

$$99 \dots 99 : 7 = 1428571 \dots$$

یعنی وقتی بر ۷ قابل قسمت است که از ۰۰۰، ۱۸، ۱۲، ۶ رقم تشکیل شده باشد.

به این ترتیب $n-1$ بر ۶ قابل قسمت است، یعنی $n = 6k + 1$ ، که

در آن k عددی صحیح و غیر منفی است (روشن است که حالت $n=1$ هم با شرط مسأله می‌سازد).

۴۵۵. فرض کنید معادله:

$$x^x + y^y + z^z = t^t \quad (1)$$

برای بعضی از عددهای طبیعی برقرار باشد. می‌توان فرض کرد: $x < y < z$ ،

در این صورت $t > z$. اگر $z=1$ باشد، $x=y=1$ می‌شود، ولی $t^t \neq 3$.

اگر $z=2$ باشد، در این صورت $t > 3$ و

$$t^t > 3^3 > 3 \times 2^2 > x^x + y^y + z^z$$

که با تساوی (۱) متناقض است.

اگر $z > 3$ باشد، داریم:

$$t^t > (z+1)^{z+1} > z^{z+1} = z \cdot z^z > 3 \cdot z^z > x^x + y^y + z^z$$

که باز هم با رابطه (۱) متناقض است. بنابراین معادله مفروض جواب طبیعی

ندارد.

۴۵۶. اگر m و n را تعداد پاره خطهایی بگیریم که به ترتیب به طول ۷

سانتیمتر و ۱۲ سانتیمتر باشند و از آنها پاره خطی به طول یک متر یا ۱۰۰

سانتیمتر بدست آید، در این صورت:

$$7m + 12n = 100 \quad (1)$$

چون ۱۲ و ۱۰۰ بر ۴ قابل قسمت‌اند، پس m هم بر ۴ قابل قسمت است. علاوه

بر این عدد m نمی‌تواند بزرگتر از ۱۴ باشد (چون $7 \times 15 > 100$). از

اینجا معلوم می‌شود که m مساوی ۴ یا ۸ یا ۱۲ است. اگر این مقادیر را

در معادله (۱) قرار دهیم، معلوم می‌شود که تنها به ازای $m=4$ و $n=6$

برقرار است.

۴۰۷. بعد از ساده کردن بدست می آید:

$$1000x - 889y + 1109z + t = 0 \Rightarrow \quad (1)$$

$$\Rightarrow 111(9x - 8y + 10z) = (y + z) - (x + t)$$

از آنجا که x, y, z, t عددهایی یک رقمی هستند باید داشته باشیم:

$$9x - 8y + 10z = 0 \quad (2)$$

$$y + z = x + t \quad (3) \quad \text{و در آن صورت}$$

رابطه (۲) را می توان به اینصورت نوشت:

$$10(y + z) = 9(2y - x)$$

تنها دو حالت ممکن است:

$$(1) \quad y + z = 2y - x = 0 \quad \text{در اینصورت } x + t = 0$$

که به جواب بی معنی $x = y = z = t = 0$ می رسد.

$$(2) \quad y + z = 9, \quad 2y - x = 10 \quad \text{یعنی باید این دستگاه را حل}$$

کنیم:

$$\begin{cases} y + z = 9 \\ z + t = 9 \\ 2y - x = 10 \end{cases}$$

از معادله آخر معلوم می شود که x عددی زوج است؛ x را به ترتیب $x_1 = 0$,

$x_2 = 2$, $x_3 = 4$, $x_4 = 6$, $x_5 = 8$ می گیریم و جوابها را بدست

می آوریم:

	۱	۲	۳	۴	۵
x	۰	۲	۴	۶	۸
y	۵	۶	۷	۸	۹
z	۴	۳	۲	۱	۰
t	۹	۷	۵	۳	۱

۴۰۸. بنابر شرط مسأله داریم:

$$\overline{abcd} = (\overline{cd})^2$$

واز آنجا

$$۱۰۰(۱۰a+b)+(۱۰c+d)=(۱۰c+d)^2$$

و یا :

$$۱۰۰(۱۰a+b)=(۱۰c+d)(۱۰c+d-۱)$$

اگر $۱۰c+d=k$ بگیریم، چون $c \neq ۰$ است k عددی دورقمی می‌شود.
بنابراین

$$۱۰۰(۱۰a+b)=k(k-۱)$$

حاصلضرب $k(k-۱)$ بر ۱۰۰ قابل‌قسمت است، بنابراین یکی از دو عدد k و $k-۱$ بر ۴ و دیگری بر ۲۵ قابل‌قسمت است. به سادگی معلوم می‌شود که $k=۲۵$ و $k-۱=۲۴$ یا $k=۷۶$ و $k-۱=۷۵$.
در حالت اول داریم:

$$۱۰a+b=۶$$

که باید $a=۰$ باشد و ممکن نیست.
در حالت دوم داریم:

$$۱۰a+b=۱۹ \times ۳=۵۷$$

و از آنجا $a=۵$ و $b=۷$. در اینصورت

$$۷۶=۱۰c+d \Rightarrow c=۷, d=۶$$

و عدد مورد نظر ۵۷۷۶ است.

۴۰۹. اگر در مثلث قائم‌الزاویه وتر را z و دو ضلع مجاور به زاویه قائمه را y و x بگیریم، باتوجه به بند ۱۴ همین فصل (صفحه ۲۱۳) باید داشته باشیم:

$$z = \frac{m^2 + n^2}{2}, y = \frac{m^2 - n^2}{2}, x = mn$$

طبق شرط مسأله باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} z-y=A^2 \\ z-x=B^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n^2=A^2=A^2 \cdot A \\ (m-n)^2=2B^2=B^2 \cdot 2B \end{cases} \quad (۱)$$

و بنابراین باید A و $2B$ مجذور کامل باشند، یعنی داشته باشیم:

$$A=k^2 : B=2t^2$$

که در اینصورت دستگاه (۱) به اینصورت در می‌آید:

$$\begin{cases} n^2 = k^2 \\ (m-n)^2 = 4t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = k^2 \\ m = k^2 + 4t^2 \end{cases}$$

که در آنها k و t هر عدد طبیعی دلخواهند. مثلاً به ازای $k=t=1$ داریم:

$$\begin{cases} m=5 \\ n=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=13 \\ y=12 \\ x=5 \end{cases}$$

و همانطور که می‌بینیم $z-x=2^2$ و $z-y=1^2$ و یا به ازای $k=3$ و $t=2$ داریم:

$$\begin{cases} m=59 \\ n=27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=2105 \\ y=1376 \\ x=1593 \end{cases}; \begin{cases} z-y=9^2 \\ z-x=4^2 \end{cases}$$

تعمیم مسأله. می‌توان این مسأله را به اینصورت کلی کرد:

مثلث قائم‌الزاویه‌ای با ضلعهای صحیح پیدا کنید نحوی که با فرض فرد بودن p ، تفاضل هر ضلع آن با وتر مساوی توان p ام یک عدد طبیعی باشد. در اینجا هم باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} z-y=n^2=A^p \\ z-x=\frac{(m-n)^2}{2}=B^p \end{cases}$$

چون n عددی فرد است، بنابراین باید $A=k^2$ و $B=2t^2$ باشد، در نتیجه:

$$n=k^p \quad \text{و} \quad m-n=2^{\frac{p+1}{2}} t^p$$

و از آنجا:

$$n=k^p \quad \text{و} \quad m=k^p+2^{\frac{p+1}{2}} t^p \quad (1)$$

و برای اینکه مثلث قائم‌الزاویه اصلی بدست آید، باید k و $2t$ نسبت بهم

(1) مثلث قائم‌الزاویه‌ای را اصلی گویند که ضلعهای آن نسبت بهم اول

باشند.

اول باشند.

مثلا برای $p=5$ ، اگر $k=3$ و $t=2$ بگیریم، بدست می‌آید:

$$n=3^5=243, \quad m=3^5+2^2 \times 2^5=499,$$

$$x=499 \times 243=121257,$$

$$y=(499^2-243^2):2=94976,$$

$$z=(499^2+243^2):2=154025;$$

$$z-x=8^5, \quad z-y=9^5$$

و روشن است که همیشه کوچکترین مثلث قائم الزاویه اصلی به ازای $k=t=1$ بدست می‌آید.

مثلا برای پیدا کردن کوچکترین مثلث قائم الزاویه اصلی که تفاضل هر ضلع آن از وتر مساوی توان هفدهم يك عدد صحیح باشد، به ازای $k=t=1$ و $p=17$ بدست می‌آید:

$$x=513, \quad y=131584, \quad z=131585;$$

$$z-x=2^{17}, \quad z-y=1$$

توضیح: تمرینهایی که در این بخش حل نشده‌اند به مناسبت شباهتی است که به حل تمرینهای دیگر داشته‌اند.
۴۱۰. به ازای $n=1$ داریم:

$$\frac{1}{a(a+1)} = \frac{1}{a(a+1)}$$

فرض می‌کنیم تساوی به ازای $n=k$ صحیح باشد، یعنی داشته باشیم:

$$S_k = \frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \dots + \frac{1}{(a+k-1)(a+k)} = \frac{k}{a(a+k)}$$

ثابت می‌کنیم که در اینصورت به ازای $n=k+1$ هم صحیح است، داریم:

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(a+k)(a+k+1)} = \frac{k}{a(a+k)} +$$

$$\begin{aligned}
 + \frac{1}{(a+k)(a+k+1)} &= \frac{k(a+k+1)+a}{a(a+k)(a+k+1)} = \\
 &= \frac{(a+k)(k+1)}{a(a+k)(a+k+1)} = \frac{k+1}{a(a+k+1)}
 \end{aligned}$$

۴۱۱. تساوی به ازای $n=1$ صحیح است:

$$1=1^2$$

حالا اگر فرض کنیم که تساوی به ازای $n=k$ صحیح باشد:

$$1+3+5+\dots+(2k-1)=k^2$$

خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 1+3+5+\dots+(2k-1)+ \\
 +(2k+1) &= k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2
 \end{aligned}$$

یعنی به ازای $n=k+1$ هم صحیح است.

۴۱۲. حکم به ازای $n=1$ صحیح است:

$$1 \times 1! = 2! - 1$$

اگر مجموع سمت چپ تساوی حکم را S_n بگیریم و داشته باشیم:

$$S_k = (k+1)! - 1$$

$$\begin{aligned}
 S_{k+1} &= S_k + (k+1)(k+1)! = \\
 &= [(k+1)! - 1] + (k+1)(k+1)! = \\
 &= (k+1)!(1+k+1) - 1 = (k+2)! - 1
 \end{aligned}$$

۴۱۳. برای $n=1$ داریم:

$$\cos X = \frac{\sin 2X}{2 \sin X}$$

که رابطه واضحی است. اگر داشته باشیم:

$$P_k = \cos X \cdot \cos 2X \cdot \cos 4X \dots \cos 2^k X = \frac{\sin 2^{k+1} X}{2^{k+1} \sin X}$$

خواهیم داشت:

$$P_{k+1} = P_k \cdot \cos 2^{k+1} X = \frac{\sin 2^{k+1} X}{2^{k+1} \sin X} \cdot \cos 2^{k+1} X = \frac{\sin 2^{k+2} X}{2^{k+2} \sin X}$$

۴۱۴. به ازای $n=2$ داریم ($n > 1$ فرض شده است):

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{13}{24} \Rightarrow \frac{7}{12} > \frac{13}{24}$$

که واضح است. حالا اگر فرض کنیم نامساوی:

$$S_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24}$$

صحیح باشد، برای $n = k+1$ بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{2(k+1)} = \\ &= S_k + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} = \\ &= S_k - \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{2k+1} = \frac{13}{24} + \alpha - \\ &\quad - \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{2k+1} > \frac{13}{24} \end{aligned}$$

$S_k = \alpha + \frac{13}{24}$ فرض کردیم. در اینصورت α مثبت و در عین حال

$$\frac{1}{2(k+1)} < \frac{1}{2k+1} \text{ می‌باشد.}$$

$x + \frac{1}{x} = t \cdot 415$ نسبت به t از درجه اول است (بدون مقدار ثابت). اگر دوطرف

این تساوی را مجذور کنیم، خواهیم داشت: $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$. یعنی

$x^2 + \frac{1}{x^2}$ نسبت به t از درجه دوم است و تمام توانهای t هم زوج است (۲ و صفر).

رابطه زیر واضح است:

$$x^n + \frac{1}{x^n} = \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}} \right) \left(x + \frac{1}{x} \right) - \left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}} \right)$$

که اگر برای سهولت کار $x^n + \frac{1}{x^n} = S_n$ فرض کنیم می‌شود:

$$S_n = S_{n-1} \cdot S_1 - S_{n-2} \quad (2)$$

اگر در این رابطه n زوج باشد، $n-1$ فرد و $n-2$ زوج می‌شود
 $S_1 = t$ نسبت به t از درجه اول است (بدون مقدار ثابت)، بنابراین اگر
 S_{n-1} نسبت به t از درجه $n-1$ (و فقط با توانهای فرد t) و S_{n-2}
نسبت به t از درجه $n-2$ (و فقط با توانهای زوج t) باشد، S_n هم نسبت به
 t از درجه n (و فقط با توانهای زوج t) خواهد بود.

همچنین درحالتی که n فرد باشد، باز هم با فرض صحت حکم برای
 S_{n-1} و S_{n-2} ، نسبت به t از درجه n (و فقط با توانهای فرد) خواهد بود.
رابطه (۱) یک رابطه برگشتی است که محاسبه S_n را به محاسبه S_{n-1}
و S_{n-2} منجر می‌کند.

۴۱۶. واضح است که به ازای $n=17$ خواهیم داشت:

$$n^2 + n + 17 = 17 \times 19$$

و بنابراین $n^2 + n + 17$ نمی‌تواند عددی اول باشد (البته این عبارت به
ازای مقادیر $n=0, 1, \dots, 15$ عددی اول است: به ازای $n=16$ به صورت
 17^2 در می‌آید).

۴۱۷. اگر فرض کنیم $A_n = 4^n + 2^n + 1$ ، داریم:

$$A_0 = 4 + 2 + 1 = 7; \quad A_1 = 4^2 + 2^2 + 1 = 21 = 3 \times 7$$

حالا می‌نویسیم:

$$A_{k+1} = 4^{2^{k+1}} + 2^{2^{k+1}} + 1$$

$$A_k = 4^{2^k} + 2^{2^k} + 1$$

دو رابطه را از هم کم می‌کنیم:

$$A_{k+1} - A_k = 4^{2^{k+1}} + 2^{2^{k+1}} - 4^{2^k} - 2^{2^k};$$

از طرف دیگر داریم:

$$4^{2^{k+1}} = 4^{2 \times 2^k} = 4^{2^k}$$

و بنابراین خواهیم داشت:

$$A_{k+1} - A_k = 4^{2^{k+1}} - 2^{2^k} =$$

$$= 4 \times 2^k - 2^k = 16^k - 2^k = (14 + 2)^k - 2^k = 7m$$

بنابراین اگر A_k بر ۷ قابل قسمت باشد $A_{k+1} = A_k + 7m$ هم بر ۷ قابل قسمت خواهد بود و حکم ثابت است.

۴۱۸. داریم:

$$y' = \frac{-1}{(x+a)^2} \quad \therefore y'' = \frac{1 \times 2}{(x+a)^3} = \frac{2!}{(x+a)^3}$$

$$y''' = \frac{-1 \times 2 \times 3}{(x+a)^4} = \frac{-(3!)}{(x+a)^4}$$

حدس می‌زنیم که برای مشتق مرتبه‌ام داشته باشیم (مشتق مرتبه n ام را بصورت $y^{(n)}$ نشان می‌دهیم):

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$$

برای اثبات این رابطه کافی است یکبار دیگر از آن مشتق بگیریم، تصاحباتنباط ثابت شود.

۴۱۹. می‌توان نوشت:

$$y = \frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right)$$

و اگر شبیه مسأله قبل عمل کنیم بدست می‌آید:

$$y^{(n)} = \frac{1}{2a} \left[\frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-a)^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1} \cdot n!}{(x+a)^{n+1}} \right]$$

۴۲۰. داریم:

$$y' = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right),$$

$$y'' = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(2 \times \frac{\pi}{2} + x\right),$$

$$y''' = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(3 \times \frac{\pi}{2} + x\right),$$

$$y^{(n)} = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right)$$

۴۲۱. صحت تساوی به ازای $n=1$ واضح است و اگر سمت چپ تساوی را P_n فرض کنیم، داریم:

$$P_{n+1} = P_n \left(1 - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{n+2}$$

و حکم ثابت است.

۴۲۳. تساوی به ازای $n=1$ واضح است و ضمناً اگر مقدار سمت چپ تساوی را S_n فرض کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + \frac{n}{(n+1)!} = \left(1 - \frac{1}{n!} \right) + \frac{n}{(n+1)!} = \\ &= 1 - \frac{(n+1) - n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

۴۲۴. به ازای $n=1$ طرف اول تساوی $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2$ است و طرف راست تساوی چنین می‌شود:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x^2-1} \left(x^2 - \frac{1}{x^2} \right) - 3 = \\ &= \frac{(x^2-1)(x^2+x^2+1)}{x^2(x^2-1)} - 3 = \frac{x^2+x^2+1}{x^2} - 3 = \\ &= x^2+1+\frac{1}{x^2}-3 = x^2+\frac{1}{x^2}-2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \end{aligned}$$

حالا اگر سمت چپ تساوی را S_n بگیریم و داشته باشیم:

$$S_n = \frac{1}{x^2-1} \left(x^{2n+2} - \frac{1}{x^{2n}} \right) - 2n-1$$

باید ثابت کنیم:

$$S_{n+1} = \frac{1}{x^2-1} \left(x^{2n+2} - \frac{1}{x^{2n+2}} - 2(n+1) - 1 \right)$$

داریم:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + \left(x^{2n+2} - \frac{1}{x^{2n+2}} \right) = \\ &= \frac{1}{x^2-1} \left(x^{2n+2} - \frac{1}{x^{2n}} \right) - 2n-1 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + x^{2n+2} + \frac{1}{x^{2n+2}} - 2 = \\
 & = \frac{x^{4n+2} - 1}{x^{2n}(x^2 - 1)} + \frac{x^{4n+2} + 1}{x^{2n+2}} - 2(n+1) - 1 = \\
 & = \frac{x^{4n+2} - x^2 + x^{4n+2} + x^2 - x^{4n+2} - 1}{x^{2n+2}(x^2 - 1)} - \\
 & = 2(n+1) - 1 = \frac{x^{4n+2} - 1}{x^{2n+2}(x^2 - 1)} - 2(n+1) - 1 = \\
 & = \frac{1}{x^2 - 1} \left(x^{2n+2} - \frac{1}{x^{2n+2}} \right) - 3(n+1) - 1
 \end{aligned}$$

۴۲۸. به ازای $n=1$ سمت چپ نامساوی چنین است:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} > 1$$

فرض می‌کنیم داشته باشیم:

$$S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n+1} > 1$$

می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
 S_{n+1} &= S_n + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+4} - \frac{1}{n+1} = \\
 &= 1 + \alpha + \frac{2}{2(n+1)(2n+2)(2n+4)} > 1
 \end{aligned}$$

$S_k = 1 + \alpha$ فرض کردیم که در آن α عددی است مثبت.

۴۲۹. به ازای $n=1$ حکم صادق است:

$$2^0(a^1 + b^1) = (a+b)^1$$

و به ازای $n=2$ $2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2 \Rightarrow (a-b)^2 \geq 0$

فرض می‌کنیم که داشته باشیم:

$$2^{k-1}(a^k + b^k) \geq (a+b)^k \quad (1)$$

ثابت می‌کنیم که در اینصورت داریم:

$$2^k(a^{k+1} + b^{k+1}) \geq (a+b)^{k+1} \quad (2)$$

برای این منظور، دو طرف نامساوی (۱) را در $a+b$ ضرب می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$(a+b)^{k+1} \leq 2^{k+1}(a^k+b^k)(a+b) = \\ = 2^k \times \frac{a^{k+1} + ab^k + a^k b + b^{k+1}}{2}$$

حالا نامساوی زیر را ثابت می‌کنیم:

$$\frac{a^{k+1} + ab^k + a^k b + b^{k+1}}{2} \leq a^{k+1} + b^{k+1}$$

که در اینصورت نامساوی (۲) هم صحیح خواهد بود. تفاضل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(a^{k+1} + b^{k+1}) - \frac{a^{k+1} + ab^k + a^k b + b^{k+1}}{2} \\ = \frac{(a-b)(a^k - b^k)}{2}$$

$a-b$ و $a^k - b^k$ (با توجه به مثبت بودن مقادیر a و b) هم علامت‌اند و بنابراین داریم:

$$\frac{(a-b)(a^k - b^k)}{2} \geq 0$$

و از آنجا نتیجه می‌شود:

$$\frac{a^{k+1} + ab^k + a^k b + b^{k+1}}{2} \leq a^{k+1} + b^{k+1}$$

و به این ترتیب نامساوی (۲) ثابت شد.

۴۳۰. سه عدد متوالی را $n-1$ ، n و $n+1$ فرض می‌کنیم. باید ثابت کنیم عدد:

$$A_n = (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = 3n^2 + 6n$$

بر 9 قابل قسمت است. به ازای $n=1$ صحت حکم واضح است. اگر فرض کنیم:

$$A_k = 3k^2 + 6k$$

بر 9 قابل قسمت باشد، داریم:

$$A_{k+1} = 3(k+1)^2 + 6(k+1) = A_k + 9(k+1)$$

و واضح است که اگر A_k مضربی از ۹ باشد، A_{k+1} هم مضربی از ۹ خواهد بود.

۴۳۱. به ازای $x=1$ و $x=2$ صحت حکم واضح است. اگر فرض کنیم:

$$A_k = 9k^5 - 5k^3 - 4k$$

در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= 9(k+1)^5 - 5(k+1)^3 - 4(k+1) = \\ &= A_k + 15k(k+1)(3k^2 + 3k + 2) = \\ &= A_k + 15k(k+1)[3k(k+1) + 2] \end{aligned}$$

ثابت می‌کنیم که عبارت $[3k(k+1) + 2]$ بر $15k(k+1)$ و یا 8 قابل قسمت است.

$k(k+1)$ عددی است زوج که اگر بر ۴ قابل قسمت باشد، عبارت $3k(k+1) + 2$ بر ۲ و حاصلضرب آنها بر ۸ قابل قسمت می‌شود. اگر $k(k+1)$ تنها بر ۲ قابل قسمت باشد (یعنی در تقسیم بر ۴ باقیمانده‌ای مساوی ۲ بدهد) $3k(k+1) + 2$ بر ۴ قابل قسمت می‌شود و حاصلضرب آنها باز هم بر ۸ قابل قسمت است، بنابراین داریم:

$$A_{k+1} = A_k + 120m$$

یعنی اگر A_k بر ۱۲۰ قابل قسمت باشد، A_{k+1} هم بر ۱۲۰ قابل قسمت خواهد بود.

۴۳۲. تقسیم را تا چند جمله خارج قسمت انجام دهیم:

$$\begin{array}{r} \frac{1-x^2}{-1+2x\cos\alpha-x^2} \bigg| \frac{1-2x\cos\alpha+x^2}{1+2x\cos\alpha+2x^2\cos 2\alpha+\dots} \\ \hline 2x\cos\alpha - 2x^2 \\ \hline -2x\cos\alpha + 4x^2\cos^2\alpha - 2x^3\cos\alpha \\ \hline 2x^2\cos 2\alpha - 2x^3\cos\alpha \\ \hline -2x^2\cos 2\alpha + 4x^3\cos\alpha\cos 2\alpha - 2x^4\cos 2\alpha \\ \hline 2x^3\cos 3\alpha - 2x^4\cos 2\alpha \\ \hline \dots \end{array}$$

احتمال داده می شود که جمله شامل x^n در خارج قسمت به صورت $2x^n \cos n\alpha$ باشد و در آن صورت باقیمانده ای مساوی:

$$2x^{n+1} \cos(n+1)\alpha - 2x^{n+2} \cos n\alpha$$

داشته باشد. برای اطمینان نسبت به این استنباط کافیتست برای يك جمله باقیمانده احتمالی را بر مقسوم علیه تقسیم کنیم و ببینیم جمله بعدی خارج قسمت و عبارت بعدی باقیمانده از قانونی که حدس زده ایم پیروی می کنند یا نه ؟

و این تقسیم صحت استنباط را ثابت خواهد کرد.
۴۳۳ ابتدا صحت اتحاد را برای $n=2$ ثابت می کنیم:

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} - 2 ;$$

$$\frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} - 2 = \frac{2}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} - 2 = \frac{2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha$$

فرض می کنیم داشته باشیم :

$$S_n = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 3\alpha + \dots + \\ + \operatorname{tg}(n-1) \operatorname{tg} n\alpha = \frac{\operatorname{tg} n\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} - n$$

در اینصورت خواهیم داشت:

$$S_{n+1} = S_n + \operatorname{tg} n\alpha \operatorname{tg}(n+1)\alpha = \\ = \frac{\operatorname{tg} n\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} + \operatorname{tg} n\alpha \operatorname{tg}(n+1)\alpha - n = \\ = \frac{\operatorname{tg} n\alpha + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} n\alpha \operatorname{tg}(n+1)\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} - n ;$$

از طرف دیگر داریم :

$$\operatorname{tg} n\alpha + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} n\alpha \operatorname{tg}(n+1)\alpha = \operatorname{tg} n\alpha + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} n\alpha \frac{\operatorname{tg} n\alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} n\alpha \operatorname{tg} \alpha} = \\ = \frac{\operatorname{tg} n\alpha + \operatorname{tg} n\alpha \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 - \operatorname{tg} n\alpha \operatorname{tg} \alpha} = \frac{(\operatorname{tg} n\alpha + \operatorname{tg} \alpha) - \operatorname{tg} \alpha (1 - \operatorname{tg} n\alpha \operatorname{tg} \alpha)}{1 - \operatorname{tg} n\alpha \operatorname{tg} \alpha} = \\ = \operatorname{tg}(n+1)\alpha - \operatorname{tg} \alpha$$

و از آنجا بدست می‌آید :

$$S_{n+1} = \frac{tg(n+1)\alpha - tg\alpha}{tg\alpha} - n = \frac{tg(n+1)\alpha}{tg\alpha} - (n+1)$$

و به این ترتیب اگر رابطه برای n صحیح باشد ، برای $n+1$ هم صحیح خواهد بود و حکم ثابت است.

۴۳۵. به ازای $n=1$ تساوی چنین می‌شود:

$$1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (1+p) =$$

$$= \frac{1}{p+2} \times 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (1+p)(2+p)$$

که صحت آن واضح است، حالا فرض می‌کنیم داشته باشیم:

$$\sum_{m=1}^n m(m+1)\dots(m+p) = \frac{1}{p+2} n(n+1)\dots(n+p+1)$$

در اینصورت داریم:

$$\sum_{m=1}^{n+1} m(m+1)\dots(m+p) = \sum_{m=1}^n m(m+1)\dots$$

$$\dots(m+p) + (n+1)(n+2)\dots(n+p+1) =$$

$$= \frac{1}{p+2} n(n+1)\dots(n+p+1) + (n+1)(n+2)\dots$$

$$\dots(n+p+1) = (n+1)(n+2)\dots(n+p+1) \times$$

$$\times \left[\frac{n}{p+2} + 1 \right] = \frac{1}{p+2} (n+1)(n+2)\dots(n+p+2)$$

و بنابراین اتحاد اصلی صحیح است.

۴۳۹. به ازای $n=0$ حکم واضح است. فرض می‌کنیم $A_n = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$

مضری از ۱۳۳ باشد ، در اینصورت:

$$A_{n+1} - A_n = (11^{n+3} - 11^{n+2}) + (12^{2n+3} - 12^{2n+1}) =$$

$$= 11^{n+2}(11-1) + 12^{2n+1}(144-1) =$$

$$= 10 \times 11^{n+2} + 143 \times 12^{2n+1} = 10(11^{n+2} + 12^{2n+1}) +$$

$$+ 133 \times 12^{2n+1} = 10A_n + 133 \times 12^{2n+1}$$

و از اینجا روشن است که اگر A_n بر ۱۳۳ قابل قسمت باشد، A_{n+1} هم بر ۱۳۳ قابل قسمت است.

۴۴۹. مقدمه. فیبوناچی ریاضی دان ایتالیایی در یکی از کارهای خود مسئله زیر را مورد بحث قرار می دهد:

يك جفت خرگوش در هر ماه دو بچه می آورند (از دو جنس مختلف). ضمناً بچه هایی که متولد می شوند. بعد از ۲ ماه می توانند اولین بچه های خود را به دنیا بیاورند. اگر در ابتدای سال دو بچه خرگوش تازه به دنیا آمده داشته باشیم، در آخر سال چند خرگوش خواهیم داشت؟

از شرطهای مسئله نتیجه می شود که بعد از يك ماه همان يك جفت خرگوش را خواهیم داشت، در آخر ماه دوم ۲ جفت، در آخر ماه سوم باز هم همان خرگوشهای اول بچه می آورند و ۳ جفت خواهیم داشت؛ يك ماه بعد، یعنی در آخر ماه چهارم هم بچه خرگوشهای اول و هم آنها که ۲ ماه بعد به دنیا آمده اند دارای بچه می شوند و ۵ جفت خرگوش خواهیم داشت.

تعداد جفت خرگوشهایی که بعد از گذشت n ماه از اول سال وجود خواهد داشت به $F(n)$ نشان می دهیم. در آخر ماه $(n+1)$ ام این $F(n)$ جفت خرگوش وجود دارد به اضافه اینکه همه جفت خرگوشهایی که در آخر ماه $n-1$ ام بوده اند بچه های جدیدی به دنیا می آورند. به عبارت دیگر رابطه برگشتی زیر بدست می آید.

$$F(n+1) = F(n) + F(n-1)$$

و چون طبق شرط $F(0) = 1$ و $F(1) = 1$ پس به ترتیب بدست می آید:

$$F(2) = 2, F(3) = 3, F(4) = 5, F(5) = 8, \dots,$$

$$F(12) = 233$$

عددهای $F(n)$ را عددهای فیبوناچی و دنباله عددهای

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

را دنباله فیبوناچی گویند. همانطور که می بینیم این دنباله را می توان با

شرطهای $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ معین کرد.

حالا به اثبات تساوی مسئله ۴۴۹ می پردازیم:

اگر $n = 1$ بگیریم، داریم:

$$a_{2n+2} = a_2 = 5 = 1 + 3 + 1 = a_1 + a_2 + 1$$

یعنی به ازای $n=1$ حکم درست است.

فرض می‌کنیم تساوی برای $n=k$ درست باشد، یعنی

$$a_{2k+2} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2k+1} + 1 \quad (1)$$

ثابت می‌کنیم که در اینصورت به ازای $n=k+1$ هم درست است، یعنی باید ثابت کنیم:

$$a_{2k+4} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2k+1} + a_{2k+2} + 1$$

طبق تعریف برای دنباله فیبوناچی داریم:

$$a_{2k+4} = a_{2k+2} + a_{2k+3}$$

از آنجا با استفاده از رابطه (۱) بدست می‌آید:

$$a_{2k+4} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2k+1} + a_{2k+2} + 1$$

۴۵۰. برای $n=1$ حکم صحیح است.

فرض می‌کنیم $a_k - a_{k-1} \cdot a_{k+1} = (-1)^k$ در اینصورت داریم:

$$a_{k+1}^2 - a_k \cdot a_{k+2} = a_{k+1}^2 - a_k(a_{k+1} + a_k) =$$

$$= a_{k+1}(a_{k+1} - a_k) - a_k^2 = a_{k+1} \cdot a_{k-1} - a_k^2 =$$

$$= -(a_k^2 - a_{k-1} \cdot a_{k+1}) = -(-1)^k = (-1)^{k+1}$$

۴۵۳. برای $n=1$ حکم واضح است.

فرض می‌کنیم که حکم برای $n \leq k$ صحیح باشد، در این صورت داریم (برای $n=k+1$):

$$a_{k+10} = a_{k+9} + a_{k+8} = (a_{k-1} \cdot a_8 + a_k \cdot a_9) +$$

$$+ (a_{k-2} \cdot a_8 + a_{k-1} \cdot a_9) = (a_{k-1} + a_{k-2})a_8 +$$

$$+ (a_k + a_{k-1})a_9 = a_k \cdot a_8 + a_{k+1} \cdot a_9$$

۴۵۴. حکم برای $n=1$ درست است.

فرض می‌کنیم که حکم برای $n \leq k$ درست باشد ثابت می‌کنیم که در اینصورت

برای $n=k+1$ هم درست است، یعنی ثابت می‌کنیم $a_{k+1} = 2^{k+1} + 1$.

طبق تعریف دنباله داریم: $a_{k+1} = a_1 \cdot a_k - a_0 \cdot a_{k-1}$. از طرف

دیگر به استناد فرض استقراء داریم:

$$a_k = 2^{k+1} + 1; \quad a_{k-1} = 2^{k-1} + 1,$$

و از آنجا:

$$a_{k+1} = 2 \times 2^k - 2^k + 2 - 2 = 2^{k+1} + 1$$

۴۵۵. در رابطه‌های حکم $n=1$ می‌گیریم:

$$a_1 = a + \frac{2}{3} (b-a) \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{a+b}{2},$$

$$\begin{aligned} b_1 &= a + \frac{2}{3} (b-a) \left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{a+2b}{2} = \frac{(a+b) + 2b}{2} \\ &= \frac{2a_1 + 2b}{2} = \frac{a_1 + b}{2} \end{aligned}$$

بنابراین رابطه‌های حکم به ازای $n=1$ برقرارند.

حالا فرض می‌کنیم:

$$a_k = a + \frac{2}{3} (b-a) \left(1 - \frac{1}{4^k}\right)$$

$$b_k = a + \frac{2}{3} (b-a) \left(1 + \frac{1}{2 \times 4^k}\right) \quad (1)$$

و ثابت می‌کنیم که:

$$a_{k+1} = a + \frac{2}{3} (b-a) \left(1 - \frac{1}{4^{k+1}}\right)$$

$$b_{k+1} = a + \frac{2}{3} (b-a) \left(1 + \frac{1}{2 \times 4^{k+1}}\right)$$

طبق شرط داریم: $a_{k+1} = \frac{1}{2} (a_k + b_k)$ با استفاده از رابطه‌های (۱)

بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{1}{2} \left[a + \frac{2}{3} (b-a) \left(1 - \frac{1}{4^k}\right) + a + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} (b-a) \left(1 + \frac{1}{2 \times 4^k}\right) \right] = \frac{1}{2} \left[2a + \frac{2}{3} (b-a) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(1 - \frac{1}{4^k} + 1 + \frac{1}{2 \times 4^k}\right) \right] = a + \frac{1}{3} (b-a) \left(\frac{2 \times 4^{k+1} - 2}{4^{k+1}} \right) = \\ &= a + \frac{2}{3} (b-a) \left(1 - \frac{1}{4^{k+1}}\right) \end{aligned}$$

و بهمین ترتیب:

$$\begin{aligned}
 b_{k+1} &= \frac{1}{r}(a_{k+1} + b_k) = \frac{1}{r} \left[a + \frac{r}{r} (b-a) \left(1 - \frac{1}{r^{k+1}} \right) + \right. \\
 &+ a + \frac{r}{r} (b-a) \left(1 + \frac{1}{r \times r^k} \right) \left. \right] = \frac{1}{r} \left[2a + \frac{r}{r} (b-a) \times \right. \\
 &\times \left(1 - \frac{r}{r \times r^{k+1}} + 1 + \frac{1}{r \times r^k} \right) \left. \right] = \\
 &= a + \frac{1}{r} (b-a) \left(\frac{r \times r \times r^{k+1} + r}{r \times r^{k+1}} \right) = a + \frac{r}{r} (b-a) \times \\
 &\times \left(1 + \frac{1}{r \times r^{k+1}} \right)
 \end{aligned}$$

۴۵۶. از استقراء ریاضی به شکلی که در مسئله ۴۵۳ عمل کردیم، استفاده کنید.

۴۵۷. مسأله را به صورت کلی خود طرح می‌کنیم و ثابت می‌کنیم برای همه مقادیر n داریم:

$$\begin{aligned}
 1 - \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^3} + \dots + \frac{1}{r^{n-1}} - \frac{1}{r^n} &= \quad (۱) \\
 &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{r^n}
 \end{aligned}$$

به ازای $n=1$ تساوی (۱) واضح است. فرض می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 1 - \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^3} + \dots + \frac{1}{r^{k-1}} - \frac{1}{r^k} &= \\
 &= \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{r^k}
 \end{aligned}$$

ثابت می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 1 - \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^3} + \dots + \frac{1}{r^{k-1}} - \frac{1}{r^k} + \frac{1}{r^{k+1}} - \\
 - \frac{1}{r^{k+2}} + \dots = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{r^{k+2}}
 \end{aligned}$$

در حقیقت داریم:

$$\begin{aligned}
 & \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) + \\
 & + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} = \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k}\right) + \\
 & + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \\
 & + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2k+2}\right) = \\
 & = \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}
 \end{aligned}$$

۴۵۹. فرض می‌کنیم:

$$P_n = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{4^2} \cdot \frac{1}{8^2} \cdot \frac{1}{16^2} \dots (\frac{1}{2^n})^{\frac{1}{2^n}}$$

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$$

در اینصورت:

داریم $\frac{1}{2^n} = 2^{\frac{n}{2^n}}$ و بنابراین اگر فرض کنیم: $P_n = 2^{S_n}$ باید داشته باشیم:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{n}{2^n}$$

به ترتیب داریم:

$$S_1 = \frac{1}{2} = 2 - \frac{3}{2} = 2 - \frac{1+2}{2^1}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1 = 2 - 1 = 2 - \frac{2+2}{2^2}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} = \frac{11}{8} = 2 - \frac{5}{8} = 2 - \frac{3+2}{2^3}$$

$$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} = \frac{26}{16} = 2 - \frac{6}{16} = 2 - \frac{4+2}{2^4}$$

بنابراین می‌توان حدس زد :

$$s_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

و این حدس به سادگی باروش استقراء ریاضی به یقین تبدیل می‌شود. از طرف دیگر :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{n+2}{2^n} \right) = 2$$

و بنابراین :

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 4$$

۴۶۲. از رابطه $(2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n \sqrt{3}$ به ازای $n=1$ بدست می‌آید:

$$a_1 = 2, \quad b_1 = 1$$

از طرف دیگر به ازای $n=1$ رابطه حکم چنین می‌شود:

$$a_1^2 - 3b_1^2 = 4 - 3 = 1$$

فرض می‌کنیم رابطه $a_n^2 - 3b_n^2 = 1$ درست باشد، باید ثابت کنیم:

$$a_{n+1}^2 - 3b_{n+1}^2 = 1$$

طبق فرض داریم:

$$(2 + \sqrt{3})^{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} \sqrt{3}$$

یعنی:

$$(a_n + b_n \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = a_{n+1} + b_{n+1} \sqrt{3}$$

که از آنجا بدست می‌آید:

$$b_{n+1} = a_n + 2b_n, \quad a_{n+1} = 2a_n + 3b_n$$

و از آنجا:

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 - 3b_{n+1}^2 &= (2a_n + 3b_n)^2 - 3(a_n + 2b_n)^2 = \\ &= a_n^2 - 3b_n^2 = 1 \end{aligned}$$

۴۶۳. به ترتیب داریم :

$$\begin{aligned}\frac{73}{43} &= 1 + \frac{30}{43} = 1 + \frac{1}{\frac{43}{30}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{13}{30}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{30}{13}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{4}{13}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}}\end{aligned}$$

$$\frac{73}{43} = (1, 1, 2, 3, 4) \quad \text{یعنی:}$$

۴۶۴. تقاربهایی اول تا پنجم به ترتیب عبارتند از:

$$\frac{2}{3}, \frac{6}{7}, \frac{14}{15}, \frac{30}{31}, \frac{62}{63}$$

۴۶۵. از شرطهای مسأله داریم:

$$\frac{36524}{2953} = \text{ماه قمری} = \frac{365/24}{29/53} = \text{ماه قمری} = 365/24 = \text{روز} = \text{یکسال شمسی}$$

$$= 12 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{155}}}}}$$

تقاربهایی متوالی این کسر مسلسل عبارتند از:

$$12, \frac{25}{2}, \frac{37}{3}, \frac{99}{8}, \frac{235}{19}$$

تقارب آخر یعنی $\frac{235}{19}$ تقریب خوبی است و از آنجا حکم مسأله ثابت می‌شود.

۴۶۶. اگر مقدار کسر مسلسل را به x نشان دهیم، داریم:

$$x = \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + x}} = \frac{3 + x}{7 + 2x};$$

$$2x^2 + 6x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(\sqrt{15} - 3)$$

(روشن است که مقدار x مثبت است و ریشه منفی معادله قابل قبول نیست).
۴۶۷. داریم:

$$x = \frac{a}{1+y}, \quad y = \frac{b}{1+x},$$

و از آنجا:

$$\begin{cases} x + xy = a \\ y + xy = b \end{cases} \Rightarrow x - y = a - b$$

۴۶۸. داریم:

$$x = \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c+x}}} = \frac{bc+x+1}{abc+abx+a+c+x}$$

$$y = \frac{1}{b + \frac{1}{a + \frac{1}{c+y}}} = \frac{ac+y+1}{abc+aby+b+c+y}$$

و از آنجا:

$$\begin{cases} abcx + abx^2 + ax + cx + x^2 - bc - bx - 1 = 0 \\ abcy + aby^2 + by + cy + y^2 - ac - ay - 1 = 0 \end{cases}$$

از تفاضل این دو معادله بدست می‌آید:

$$(x+y+c)[(x-y)(ab+1)+a-b]=0$$

و چون x و y مثبت‌اند، بنابراین $x+y+c \neq 0$ و داریم:

$$x - y = \frac{b-a}{ab+1}$$

۴۶۹. داریم:

$$x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + x}} = \frac{a_2 + x}{a_1 a_2 + a_1 x + 1}$$

که از آنجا (و بهمین ترتیب برای y و z) بدست می‌آید:

$$\begin{cases} a_1 x^2 + a_1 a_2 x - a_2 = 0 \\ a_1 y^2 + 2a_1 a_2 y - a_2 = 0 \\ a_1 z^2 + 3a_1 a_2 z - a_2 = 0 \end{cases}$$

که اگر بین این سه معادله a_1 ، $a_1 a_2$ و $-a_2$ را حذف کنیم، به رابطه مورد نظر می‌رسیم.

۴۷۰. با استفاده از رابطه مربوط به محاسبه تقارنهای متوالی، رابطه مطلوب بدست می‌آید.

۴۷۱. می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{na_1} + \frac{1}{na_2} + \frac{1}{na_3} + \frac{1}{na_4} + \dots = \\ & = \frac{n}{n^2 a_1} + \frac{n}{na_2} + \frac{1}{na_3} + \frac{1}{na_4} + \dots = \\ & = \frac{n}{n^2 a_1} + \frac{n}{na_2} + \frac{n}{n^2 a_3} + \frac{n}{na_4} + \dots + \frac{n}{na_{2r-1}} + \frac{n}{n^2 a_{2r}} + \dots \end{aligned}$$

$$= \frac{n}{n^2 a_r} + \frac{1}{a_r} + \frac{1}{n^2 a_r} + \frac{1}{a_{\delta}} + \dots + \frac{1}{a_{2r-1}} + \frac{1}{n^2 a_{2r}} + \dots$$

۴۷۲. جمله n ام این کسر مسلسل مساوی است با $\frac{(2n-3)(2n-1)}{4}$ بنابراین:

$$P_n = 4P_{n-1} + (2n-3)(2n-1)P_{n-2};$$

این رابطه را می‌توان به شکل زیر مرتب کرد:

$$P_n - (2n+1)P_{n-1} = -(2n-3)[P_{n-1} - (2n-1)P_{n-2}]$$

با تبدیل n به $n-1$ و سپس $n-1$ به $n-2$ و ... بتوالی داریم:

$$P_{n-1} - (2n-1)P_{n-2} = -(2n-5)[P_{n-2} - (2n-3)P_{n-3}]$$

$$\dots =$$

$$P_3 - 4P_2 = -2(P_2 - 5P_1)$$

اما با توجه به $P_1 = 1$ و $P_2 = 4$ داریم: $P_2 - 5P_1 = -1$ و از آنجا:

$$P_n - (2n+1)P_{n-1} = (-1)^{n-1}(2n-3)(2n-5)\dots 3 \times 1$$

از طرف دیگر داریم:

$$\frac{P_n}{1 \times 3 \dots (2n+1)} - \frac{P_{n-1}}{1 \times 3 \dots (2n-1)} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)(2n-1)}$$

$$\dots =$$

$$\frac{P_2}{1 \times 3 \times 5} - \frac{P_1}{1 \times 3} = \frac{(-1)^1}{3 \times 5}$$

پس:

$$\frac{P_n}{1 \times 3 \times 5 \dots (2n+1)} = \frac{1}{1 \times 3} - \frac{1}{3 \times 5} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)(2n-1)}$$

و چون مخرج تقاربه‌ها باهمان قانون صورت تقاربه‌ها بنا می‌شود، داریم:

$$Q_n - (2n+1)Q_{n-1} = (-1)^{n-2} 3 \times 5 \dots$$

$$\dots (2n-3)(Q_2 - 5Q_1) = 0$$

زیرا $Q_1 = 3$ و $Q_2 = 15$ از آنجا:

$$\begin{aligned} \frac{Q_n}{(2n+1)(2n-1) \dots 3 \times 1} &= \frac{Q_{n-1}}{(2n-1) \dots 3 \times 1} = \\ &= \dots = \frac{Q_2}{5 \times 3 \times 1} = \frac{Q_1}{3 \times 1} = 1 \end{aligned}$$

و در نتیجه:

$$Q_n = 1 \times 3 \dots (2n-1)(2n+1)$$

و بنابراین:

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{1}{1 \times 3} - \frac{1}{3 \times 5} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)}$$

۴۷۳. داریم:

$$P_n = cP_{n-1} + bP_{n-2}$$

حالا اگر در کسر $\frac{A+Bx}{1-cx-bx^2}$ صورت را بر مخرج بهمین ترتیب تقسیم

کنیم، ضریبهای جمله‌های متوالی خارج قسمت بعد از جمله دوم با قانون $u_n = cu_{n-1} + bu_{n-2}$ بهم مربوط می‌شوند. اگر A و B طوری انتخاب

شوند که $u_1 = P_1$ و $u_2 = P_2$ باشد، در اینصورت: $u_n = P_n$.

مقادیر لازم برای A و B به ترتیب عبارتند از $P_1 - cP_0$ و $P_2 - cP_1$ یعنی a و b . از آنجا صورت تقارب n ام کسر مسلسل مفروض، همان ضریب x^{n-1}

در بسط $\frac{a+bx}{1-cx-bx^2}$ بر حسب توانهای صعودی x می‌باشد.

به ترتیب مشابهی، مخرج تقارب n ام ضریب x^{n-1} در تقسیم صورت

بر مخرج کسر $\frac{Q_1 + (Q_2 - cQ_1)x}{1 - cx - bx^2}$ یعنی $\frac{1}{1 - cx - bx^2}$ می‌باشد.

۴۷۴. صورت تقارب n ام، عبارتست از ضریب x^{n-1} در

$$\frac{1+2x}{1-2x-2x^2} = \frac{3}{2(1-2x)} - \frac{1}{2+2x}$$

از آنجا:

$$P_n = \frac{1}{2} \left[3^n + (-1)^n \right]$$

همچنین Q_n مساوی است با ضریب x^{n-1} در

$$\frac{1}{1-2x-2x^2} = \frac{3}{2(1-2x)} + \frac{1}{2(1+x)}$$

$$Q_n = \frac{1}{2} \left[3^n - (-1)^n \right] \quad \text{از آنجا،}$$

$$\frac{P_n}{Q_n} = 2 \times \frac{3^n + (-1)^n}{3^n - (-1)^n} \quad \text{و بنابراین:}$$

۴۷۵. به ترتیب داریم:

$$\sqrt{43} = 6 + \sqrt{43} - 6 = 6 + \frac{7}{\sqrt{43} + 6} = 6 + \frac{1}{\frac{\sqrt{43} + 6}{7}},$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{43} + 6}{7} &= 1 + \frac{\sqrt{43} - 1}{7} = 1 + \frac{42}{7(\sqrt{43} + 1)} = \\ &= 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{43} + 1}{6}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{43} + 1}{6} &= 1 + \frac{\sqrt{43} - 5}{6} = 1 + \frac{18}{6(\sqrt{43} + 5)} = \\ &= 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{43} + 5}{3}} \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{43} + 5}{3} = 3 + \frac{\sqrt{43} - 4}{3} = 3 + \frac{27}{3(\sqrt{43} + 4)} =$$

$$= 3 + \frac{1}{\sqrt{43} + 4},$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{43} + 4}{9} &= 1 + \frac{\sqrt{43} - 5}{9} = 1 + \frac{18}{9(\sqrt{43} + 5)} = \\ &= 1 + \frac{1}{\sqrt{43} + 5}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{43} + 5}{2} &= 5 + \frac{\sqrt{43} - 5}{2} = 5 + \frac{18}{2(\sqrt{43} + 5)} = \\ &= 5 + \frac{1}{\sqrt{43} + 5}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{43} + 5}{9} &= 1 + \frac{\sqrt{43} - 4}{9} = 1 + \frac{27}{9(\sqrt{43} + 4)} = \\ &= 1 + \frac{1}{\sqrt{43} + 4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{43} + 4}{3} &= 3 + \frac{\sqrt{43} - 5}{3} = 3 + \frac{18}{3(\sqrt{43} + 5)} = \\ &= 3 + \frac{1}{\sqrt{43} + 5}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{43} + 5}{9} &= 1 + \frac{\sqrt{43} - 1}{9} = 1 + \frac{42}{9(\sqrt{43} + 1)} = \\ &= 1 + \frac{1}{\sqrt{43} + 1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{43} + 1}{7} &= 1 + \frac{\sqrt{43} - 6}{7} = 1 + \frac{49}{7(\sqrt{43} + 6)} = \\ &= 1 + \frac{1}{\sqrt{43} + 6}, \end{aligned}$$

$$\sqrt{43} + 6 = 12 + \sqrt{43} - 6 = \dots$$

و بنابراین:

$$\sqrt{42} = 6 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{12 + \dots}}}}}}}}}}}$$

که دوره تناوب آن از ده عدد $۱۲, ۱, ۱, ۳, ۱, ۵, ۱, ۳, ۱, ۱$ تشکیل شده است.
۴۷۶

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2 + 2a} &= a + \sqrt{a^2 + 2a} - a = a + \frac{2a}{a + \sqrt{a^2 + 2a}} = \\ &= a + \frac{2a}{a + a + \frac{2a}{a + \sqrt{a^2 + 2a}}} = a + \frac{2a}{2a + \frac{2a}{2a + \dots}}\end{aligned}$$

۴۷۷. رشته زیر را در نظر می‌گیریم:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (۱)$$

و ثابت می‌کنیم مجموع n جمله از این رشته مساوی تفاوت n ام کسرمسلول زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}\frac{u_1}{1 - \frac{u_2}{u_1 + u_2}} - \frac{u_1 u_3}{u_2 + u_3} - \frac{u_2 u_4}{u_3 + u_4} - \dots \\ - \frac{u_{n-2} u_n}{u_{n-1} + u_n}.\end{aligned} \quad (۲)$$

اثبات قضیه برای حالت‌های $n = ۱, ۲, ۳$ به سادگی انجام می‌شود، فرض می‌کنیم حکم برای n صحیح باشد، ثابت می‌کنیم در این صورت برای $n + ۱$ هم

صحیح است. برای حالت $n+1$ باید جمله دیگری از رشته را با تبدیل u_n به $u_n + u_{n+1}$ به حساب آورد و با این تغییر عبارت $\frac{u_{n-2}u_n}{u_{n-1} + u_n}$ به صورت

$$\frac{u_{n-2}(u_n + u_{n+1})}{u_{n-1} + u_n + u_{n+1}}$$

در می آید که به سادگی روشن می شود مساوی

$$\frac{u_{n-2}u_n}{u_{n-1} + u_n} - \frac{u_{n-1}u_{n+1}}{u_n + u_{n+1}}$$

می باشد، یعنی مجموع $n+1$ جمله از رشته (۱) مساوی تقارب n ام کسر مسلسل (۲) می باشد، پس

$$\sum_{i=1}^n u_i = \frac{u_1}{1} - \frac{u_2}{u_1 + u_2} + \frac{u_1 u_3}{u_2 + u_3} - \frac{u_2 u_4}{u_3 + u_4} + \dots \quad (A)$$

همچنین به طریق مشابهی می توان ثابت کرد که

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots \quad (5 \text{ جمله}) &= \\ &= \frac{u_1}{1} - \frac{u_2}{u_1 - u_2} + \frac{u_1 u_3}{u_2 - u_3} - \frac{u_2 u_4}{u_3 - u_4} + \dots \quad (B) \quad (5 \text{ خارج قسمت}) \end{aligned}$$

رابطه (A) مربوط به اولر است.

چون بیشتر محاسبه ها بخصوص محاسبه های تقریبی به یاری رشته ها انجام می گیرد، بنابراین در این مورد هم کسره های مسلسل دارای اهمیت می شوند. حالت های خاص زیر جالب است:

$$\begin{aligned} & \frac{a_1 \pm a_1 a_r}{b_1} + \frac{a_1 a_r}{b_1 b_r} + \frac{a_1 a_r a_r}{b_1 b_r b_r} \pm \dots \quad (n \text{ جمله}) = \\ & = \frac{a_1}{b_1 \mp} \frac{b_1 a_r}{b_r \pm a_r \mp} \frac{b_r a_r}{b_r \pm a_r \mp} \quad (n \text{ خارج قسمت}) \quad (C) \end{aligned}$$

(باید یا تمام علامتهای بالا و یا تمام علامتهای پایین در نظر گرفته شود).

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a_1} \pm \frac{1}{a_r} + \frac{1}{a_r} \pm \frac{1}{a_r} + \dots \quad (n \text{ جمله}) = \\ & = \frac{1}{a_1 \mp} \frac{a_1^2}{a_r \pm a_1 \mp} \frac{a_r^2}{a_r \pm a_r \mp} \quad (n \text{ خارج قسمت}) \quad (D) \end{aligned}$$

اثبات این دو رابطه را هم شبیه قبل و با استقراء ریاضی می‌توان انجام داد. حالت‌های خاصی از (C) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & a_1 \pm a_1 a_r + a_1 a_r a_r \pm a_1 a_r a_r a_r + \dots = \\ & = \frac{a_1}{1 \mp} \frac{a_r}{1 \pm a_r \mp} \frac{a_1 a_r}{1 \pm a_r \mp} \frac{a_r a_r}{1 \pm a_r \mp} \quad (E) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a_1} \pm \frac{1}{a_1 a_r} + \frac{1}{a_1 a_r a_r} \pm \frac{1}{a_1 a_r a_r a_r} + \dots = \\ & = \frac{1}{a_1 \mp} \frac{a_1}{a_r \pm 1 \mp} \frac{a_r}{a_r \pm 1 \mp} \frac{a_r}{a_r \pm 1 \mp} \quad (F) \end{aligned}$$

مثلاً با استفاده از رابطه (D) داریم:

$$\frac{1}{1+\frac{1^2}{1+\frac{2^2}{1+\frac{3^2}{1+\dots}}}} = \log_e 2 \quad (\text{اولر})$$

زیرا با قرار دادن $a_1=1$ و $a_2=2$ و $a_3=3$ و غیره در رابطه (D) فوراً این نتیجه حاصل می‌شود.

۴۷۸. با توجه به رابطه (F) از مسأله قبل داریم:

$$S = \frac{1}{1} - \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3} - \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4} + \dots = 1 - \frac{1}{e}$$

۴۷۹. داریم:

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}}$$

از آنجا بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= P_n + P_{n-1} \Rightarrow P_{n+1} - P_{n-1} = P_n, \\ P_2 + P_3 + \dots + P_{2n-1} &= (P_2 - P_1) + (P_3 - P_2) + \dots + \\ &\quad + (P_{2n} - P_{2n-2}) = P_{2n} - P_1. \end{aligned}$$

رابطه دوم هم بهمین ترتیب ثابت می‌شود.

۴۸۰. با توجه به رابطه ۱

$$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = \frac{1}{2} \left(\frac{P_n}{Q_n} + \frac{NQ_n}{P_n} \right)$$

$$P_{2n} = P_n^2 + NQ_n^2; \quad Q_{2n} = 2P_nQ_n \quad \text{داریم:}$$

$$a_1P_n + P_{n-1} = NQ_n, \quad a_1Q_n + Q_{n-1} = P_n \quad \text{و باز}$$

$$P_n^2 - NQ_n^2 = P_nQ_{n-1} - P_{n-1}Q_n = (-1)^n \quad \text{یا}$$

(۱) برای اثبات این رابطه مثلاً می‌توانید به کتاب «نظریه اعداد» صفحه

بنابراین

$$NQ_n^x = P_n^x + (-1)^{n+1} \Rightarrow P_{2n}^x = 2P_n^x + (-1)^{n+1}$$

۴۸۱. بنابه تعریف داریم:

$$\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n-2}} = \frac{2}{a_{n-1}}$$

بنابراین

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = 2 - \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{2 - \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}}$$

و به طریق مشابه

$$\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = \frac{1}{2 - \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}}}, \dots, \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{2 - \frac{a_1}{a_0}}$$

۴۸۲. برای x ، تقارنها عبارتند از

$$\frac{a}{1}, \frac{ab+1}{b}, \frac{abc+c+a}{bc+1}, \frac{abcd+cd+ad+ab+1}{bcd+d+b},$$

$$x = \frac{(abcd+cd+ad+ab+1)x+abc+c+a}{(bcd+b+d)x+bc+1}$$

و از آنجا:

$$(bcd+d+b)x^2 - (abcd+ab+ad-bc+cd)x - (abc+c+a) = 0$$

و اگر به ترتیب a, b, c, d را به $-d, -c, -b, -a$ تبدیل کنیم، بدست می‌آید:

$$(abc+c+a)y^2 + (abcd+ab+ad-bc+cd)y - (bcd+b+d) = 0$$

و چون y ریشه منفی این معادله است، با فرض $y = -\frac{1}{z}$ داریم:

$$(bcd+d+b)z^2 - (abcd+ab+ad-bc+cd)z - (abc+c+a) = 0$$

و از آنجا $z=x$ و $xy=-۱$.

۴۸۳. فرض می‌کنیم: $\frac{a\varphi(x+1)}{x\varphi(x)} = \frac{a}{x+F}$ ، از آنجا

$$F = x \frac{\varphi(x) - \varphi(x+1)}{\varphi(x+1)}$$

۱۱

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \varphi(x+1) &= \frac{a}{x(x+1)} + \frac{a^2}{1!} \cdot \frac{1}{x(x+1)(x+2)} + \\ &+ \frac{a^2}{2!} \cdot \frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)} + \dots = \frac{a}{x(x+1)} \varphi(x+2) \end{aligned}$$

$$F = \frac{a}{x+1} \cdot \frac{\varphi(x+2)}{\varphi(x+1)} \quad \text{بنابراین}$$

و از آنجا

$$\frac{a\varphi(x+1)}{x\varphi(x)} = \frac{a}{x + \frac{a}{x+1} \cdot \frac{\varphi(x+2)}{\varphi(x+1)}} = \frac{a}{x + \frac{a}{x+1} + \frac{a}{x+2} + \dots}$$

۴۸۴. جواب: اولاً $x^2 - 641x + 10000 = 0$

ثانیاً $1000x^2 - 117x - 1 = 0$

ثالثاً $x^2 - 670x + 25789 = 0$

$$\left| \begin{array}{l} x_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{21}}{2} \\ y_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{21}}{2} \end{array} \right| : \left| \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ y_1 = 5 \end{array} \right| : \left| \begin{array}{l} x_1 = 5 \\ y_1 = 2 \end{array} \right| \quad \text{۴۸۵. جواب:}$$

۴۸۶. جواب:

$$\left| \begin{array}{l} x_2 = \frac{-3-3\sqrt{5}}{2} \\ y_2 = \frac{-3+3\sqrt{5}}{2} \end{array} \right| : \left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{-3+3\sqrt{5}}{2} \\ y_1 = \frac{-3-3\sqrt{5}}{2} \end{array} \right| : \left| \begin{array}{l} x_1 = 6 \\ y_1 = 6 \end{array} \right|$$

۴۸۷. دستگاه کمکی چنین می‌شود:

$$\sigma_1 \sigma_2 = 20 ; \quad 4\sigma_1 = 5\sigma_2$$

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_1 = -5 \\ \sigma_2 = -4 \end{array} \right| \text{ یا } \left| \begin{array}{l} \sigma_1 = 5 \\ \sigma_2 = 4 \end{array} \right| \quad \text{و از آنجا:}$$

$$: \left| \begin{array}{l} x_2 = 4 \\ y_2 = 1 \end{array} \right| : \left| \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ y_1 = 4 \end{array} \right| \quad \text{جواب:}$$

$$\left| \begin{array}{l} x_2 = \frac{-5 - \sqrt{41}}{2} \\ y_2 = \frac{-5 + \sqrt{41}}{2} \end{array} \right| : \left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{-5 + \sqrt{41}}{2} \\ y_1 = \frac{-5 - \sqrt{41}}{2} \end{array} \right|$$

۴۸۸. اگر مجهولهای جدید را $\sigma_1 = x + y$ و $\sigma_2 = xy$ فرض کنیم، دستگاه زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 7(\sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2) = 31(\sigma_1^2 - 3\sigma_1\sigma_2) \\ \sigma_1^2 - \sigma_2 = 3 \end{cases}$$

اگر معادله اول را به σ_1 ساده کنیم (که جوابی هم حذف نمی‌شود) و سپس مقدار σ_2 را از معادله دوم بدست آورده، در معادله اول قرار دهیم، به معادله دو مجذوری زیر می‌رسیم:

$$7\sigma_1^2 - 43\sigma_1 + 36 = 0$$

که از آنجا جوابهای زیر بدست می‌آید:

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_1 = \pm 1 \\ \sigma_2 = -2 \end{array} \right| : \left| \begin{array}{l} \sigma_1 = \pm \frac{6}{\sqrt{7}} \\ \sigma_2 = \frac{15}{7} \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{l} x_2 = 1 \\ y_2 = -2 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x_2 = -2 \\ y_2 = 1 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x_2 = -1 \\ y_2 = 2 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ y_1 = -1 \end{array} \right| : \text{جواب:}$$

بقیه جوابها موهومی است.

۴۸۹. از تقسیم معادله دوم بر معادله اول بدست می آید: $\sigma_2^2 = 36\sigma_1$. اگر σ_1 را از این معادله بدست آورده و در معادله اول قرار دهیم به معادله زیر می رسم:

$$\sigma_2^2 - 2 \times 36^2 \sigma_2^2 - 13 \times 36^3 = 0$$

و از آنجا جوابهای زیر بدست می آید ($i = \sqrt{-1}$):

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_1 = 1 \\ \sigma_2 = -6 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} \sigma_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \\ \sigma_2 = 3(1 + i\sqrt{3}) \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \\ \sigma_2 = 3(1 - i\sqrt{3}) \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} \sigma_1 = \sqrt[3]{169} \\ \sigma_2 = 6\sqrt[3]{13} \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_1 = \sqrt[3]{169} \times \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \\ \sigma_2 = -3\sqrt[3]{13}(1 + i\sqrt{3}) \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} \sigma_1 = \sqrt[3]{169} \times \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \\ \sigma_2 = -3\sqrt[3]{13}(1 - i\sqrt{3}) \end{array} \right|$$

که هریک از آنها دو جواب از دستگاه مفروض را می دهند:

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = 3 \\ y_1 = -2 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{l} x_2 = -2 \\ y_2 = 3 \end{array} \right| \quad (\text{بقیه جوابها موهومی اند})$$

۴۹۰. اگر فرض کنیم $z = -y$ ، دستگاه مفروض چنین می شود:

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 5 \\ xz^2 + x^2z = 1 \end{cases}$$

$$\left| \begin{array}{l} x_2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \\ y_2 = \frac{-2 - \sqrt{2}}{2} \end{array} \right| : \left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} \\ y_1 = \frac{-2 + \sqrt{2}}{2} \end{array} \right| \quad \text{جواب:}$$

۴۹۱. با وجودی که معادله سوم نسبت به x و y و z متقارن نیست، می‌توان دستگاه را با استفاده از معادله‌های اول و دوم حل کرد. از دو معادله اول داریم:

$$3\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1^3 = b^2 ; \quad \sigma_1 = 2b$$

$$\text{و از آنجا بدست می‌آید: } \sigma_1 = 2b \text{ و } \sigma_2 = \frac{3}{2}b^2$$

حالا معادله سوم دستگاه را چنین می‌نویسیم:

$$x^2 + y^2 + z^2 = b^2 + 2z^2$$

$$\sigma_1^2 - 2\sigma_2 = b^2 + 2z^2 \quad \text{و یا:}$$

که با قرار دادن مقادیر σ_1 و σ_2 بدست می‌آید: $z = 0$ ، حالا از رابطه‌های σ_1 و σ_2 خواهیم داشت:

$$x + y = 2b ; \quad xy = \frac{3}{2}b^2$$

و از آنجا جوابها بدست می‌آید:

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = b\left(1 + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) \\ y_1 = b\left(1 - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) \\ z_1 = 0 \end{array} \right| : \left| \begin{array}{l} x_2 = b\left(1 - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) \\ y_2 = b\left(1 + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) \\ z_2 = 0 \end{array} \right|$$

۴۹۲. دستگاه کمکی بصورت زیر در می‌آید:

$$\begin{cases} \sigma_1^2 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = \frac{73}{8} \\ \sigma_2 = \sigma_1 \\ \sigma_3 = 1 \end{cases}$$

اگر مقادیر σ_1 و σ_2 را از دو معادله آخر در معادله اول قرار دهیم، به معادله زیر می‌رسیم:

$$\sigma_1^3 - 3\sigma_1^2 - \frac{49}{8} = 0$$

که می توان آنرا به صورت زیر نوشت:

$$(2\sigma_1)^3 - 6(2\sigma_1)^2 - 49 = 0$$

که از آنجا $2\sigma_1 = 7$ و $\sigma_1 = \frac{7}{2}$ بدست می آید (دو جواب دیگر موهومی است):

$$\sigma_1 = \frac{7}{2} ; \sigma_2 = \frac{7}{2} ; \sigma_3 = 1$$

و بنابراین x و y و z ریشه های معادله زیر هستند:

$$u^3 - \frac{7}{2}u^2 + \frac{7}{2}u - 1 = 0$$

که بصورت زیر تجزیه می شود:

$$(u-1)(u-2)(u-\frac{1}{2}) = 0$$

بنابراین جوابهای حقیقی دستگاه با تبدیل دوری از جوابهای زیر بدست می آید:

$$x=1 ; y=2 ; z=\frac{1}{2}$$

۴۹۳. فرض می کنیم:

$$\sqrt[5]{\frac{1}{r} + x} = u ; \sqrt[5]{\frac{1}{r} - x} = v$$

در اینصورت دستگاه زیر را خواهیم داشت:

$$u+v=1 ; u^5+v^5=1$$

که حل آن مشکل نیست.

$$\text{جواب: } x_1 = \frac{1}{r} ; x_2 = -\frac{1}{r}$$

۴۹۴. اگر فرض کنیم $y = \sqrt{17-x^2}$ ، دستگاه زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x + y + xy = 9 \end{cases}$$

جواب: $x_1 = 1 ; x_2 = 4$

۴۹۵. با فرض $y = \sqrt{35 - x^2}$ ، حل معادله مفروض به حل دستگاه زیر منجر می‌شود:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 35 \\ xy(x + y) = 30 \end{cases}$$

جواب: $x_1 = 2$ ، $x_2 = 3$

۴۹۶. با فرض $\sqrt[3]{x} = v$ و $\sqrt[3]{a - x} = u$ به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} u + v = \sqrt[3]{a} \\ u^3 + v^3 = a \end{cases}$$

جواب: $x_1 = 0$ ، $x_2 = a$

۴۹۷. با فرض $z^2 + 1 = u$ و $z^2 - 1 = -v$ به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} u + v = 2 \\ u^2 + v^2 = 2^2 \end{cases}$$

جواب: $z = \pm 1$ (بقیه جوابها موهومی است).

۴۹۸. فرض می‌کنیم: $\sqrt[4]{\alpha} = u$ و $\sqrt[4]{\beta} = v$ ، در اینصورت خواهیم داشت:

$$-p = \alpha + \beta = u^4 + v^4 ; q = \alpha\beta = u^4 v^4$$

اگر $u + v = \sigma_1$ و $uv = \sigma_2$ بگیریم، دستگاه اخیر به صورت زیر درمی‌آید:

$$-p = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 ; q = \sigma_2^4$$

که با حذف σ_2 به معادله دو مجذوری زیر می‌رسیم:

$$\sigma_1^4 - 4\sqrt[4]{q}\sigma_1^2 + 2\sqrt[4]{q} + p = 0$$

و چون $\sigma_1 = \sqrt[4]{\alpha} + \sqrt[4]{\beta}$ مقدار مثبت، تنها جواب مثبت این معادله قابل قبول است. جوابهای این معادله چنین است:

$$\pm \sqrt[4]{2\sqrt[4]{q} \pm \sqrt{2\sqrt[4]{q} - p}}$$

با توجه به شرطهای $\alpha > 0$ و $\beta > 0$ نتیجه می‌شود که $p < 0$ و $q > 0$ و $p^2 - 4q \geq 0$ است، بنابراین $|p| \geq 2\sqrt[4]{q}$ یعنی $-p \geq 2\sqrt[4]{q}$ می‌شود و از آنجا:

$$\sqrt{2\sqrt{q}-p} > \sqrt[4]{\sqrt{q}} = \sqrt[4]{2\sqrt{q}}$$

و بنابراین جواب مورد نظر مسأله چنین است:

$$\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{2\sqrt{q} + \sqrt{2\sqrt{q}-p}}$$

۴۹۹. اگر $a+b=\sigma_1$ و $ab=\sigma_2$ و $(a-b)^2=z$ فرض کنیم، داریم:

$$a^2 + b^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = \sigma_1^2 - 2 \times \frac{1}{4}(\sigma_1^2 - z) = \frac{1}{2}\sigma_1^2 + \frac{1}{2}z$$

و چون $z \geq 0$ و طبق شرط مسأله $\sigma_1 \geq c$ است، خواهیم داشت:

$$a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}c^2$$

و اگر در این نامساوی استدلال قبل را تکرار کنیم، بدست می‌آید:

$$a^4 + b^4 \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}c^2 \right)^2 = \frac{1}{8}c^4$$

$$a^8 + b^8 \geq \frac{1}{128}c^8 \quad \text{و شبیه آن:}$$

توضیح. باروش استقراء ریاضی می‌توان ثابت کرد که اگر $a+b > c$

باشد، به ازای هر مقدار صحیح n نامساوی زیر صحیح است:

$$a^{2^n} + b^{2^n} \geq \frac{c^{2^n}}{2^{2^n-1}}$$

۵۰۰. داریم:

$$\begin{aligned} & 2x^4 + 7x^3y + 9x^2y^2 + 7xy^3 + 2y^4 = \\ &= 2(\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2) + 7\sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) + 9\sigma_2^2 = \\ &= 2\sigma_1^4 - 8\sigma_1^2\sigma_2 - \sigma_2^2 = (\sigma_1 + 2\sigma_1)(\sigma_1^2 - \sigma_2) = \\ &= [xy + 2(x+y)^2][(x+y)^2 - xy] = \\ &= (2x^2 + 5xy + 2y^2)(x^2 + xy + y^2) = \\ &= (x+2y)(2x+y)(x^2+xy+y^2) \end{aligned}$$

۵۰۱. با تبدیل عبارت به σ_1 و σ_2 به معادله دو مجذوری باریشه‌های موهومی

می‌رسیم، بنابراین بهتر است که تجزیه آنرا با روش ضریبهای نامعین انجام دهیم:

$$3x^2 - 8x^2y + 14x^2y^2 - 8xy^2 + 3y^2 = \\ = (Ax^2 + Bxy + Cy^2)(Cx^2 + Bxy + Ay^2)$$

که اگر یکبار $x=y=1$ سپس $x=0$ و $y=1$ و بالاخره $x=1$ و $y=-1$ قرار دهیم به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} A+B+C=2 \\ A-B+C=\pm 6 \\ A \cdot C=3 \end{cases}$$

علامت در معادله دوم منجر به جوابهای موهومی می‌شود و علامت + جوابهای زیر را می‌دهد

$$A=1; B=-2; C=3$$

و از آنجا:

$$3x^2 - 8x^2y + 14x^2y^2 - 8xy^2 + 3y^2 = \\ = (x^2 - 2xy + 3y^2)(3x^2 - 2xy + y^2) \\ (2x^2 + 3xy + 2y^2)(x - 3y)(3x - y) \quad \text{جواب: } ۵۰۲ \\ ۵۰۳. \text{ به ترتیب داریم:}$$

$$\frac{(x+y)^5 - x^5 - y^5}{(x+y)^6 - x^6 - y^6} = \frac{\sigma_1^5 - S_5}{\sigma_1^6 - S_6} = \frac{7\sigma_1^5\sigma_2 - 14\sigma_1^3\sigma_2^2 + 7\sigma_1\sigma_2^3}{\Delta\sigma_1^2\sigma_2 - \Delta\sigma_1\sigma_2^2} = \\ = \frac{7\sigma_1\sigma_2(\sigma_1^4 - 2\sigma_1^2\sigma_2 + \sigma_2^2)}{\Delta\sigma_1\sigma_2(\sigma_1^2 - \sigma_2)} = \frac{7\sigma_1\sigma_2(\sigma_1^2 - \sigma_2)^2}{\Delta\sigma_1\sigma_2(\sigma_1^2 - \sigma_2)} = \frac{7(\sigma_1^2 - \sigma_2)}{\Delta} = \\ = \frac{7}{\Delta}[(x+y)^2 - xy] = \frac{7}{\Delta}(x^2 + xy + y^2)$$

۵۰۴. اگر $x+y+z=\sigma_1$ ، $xy+xz+yz=\sigma_2$ و $xyz=\sigma_3$ باشد، داریم:

$$2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 - x^4 - y^4 - z^4 = \\ = 2(\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3) - (\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3) = \\ = -\sigma_1^4 + 4\sigma_1^2\sigma_2 - 8\sigma_1\sigma_3 = \sigma_1(4\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1^3 - 8\sigma_3)$$

بنابراین عبارت مفروض بر $\sigma_1 = x + y + z$ قابل قسمت است، ولی چون این عبارت نسبت به متغیرهای x و y و z از درجه زوج است، با تبدیل x به $-x$ (یا y به $-y$ و یا z به $-z$) تغییر نمی کند و در نتیجه بدست می آید:

$$\begin{aligned} & 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 - x^4 - y^4 - z^4 = \\ & = (x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)P \end{aligned}$$

و با آزمایش (مثلا به ازای $x=y=z=1$) روشن می شود که $P=1$ است. ۵۵۵. شرطهای مسأله را می توان چنین نوشت:

$$\sigma_1 = 1 ; \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 1 ; \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = 1$$

از این دستگاه بدست می آید: $\sigma_1 = 0$ و $\sigma_2 = 0$ و $\sigma_3 = 0$. تساوی $\sigma_3 = 0$ به معنای $xyz = 0$ است.

۵۵۶. اگر ساده ترین چند جمله ایهای مقارن را نسبت به x و y و z به σ_1 و σ_2 و σ_3 ، و نسبت به u و v و w را به t_1 و t_2 و t_3 نشان دهیم، شرطهای مسأله به صورت زیر در می آید:

$$\begin{cases} \sigma_1 = t_1 \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = t_1^2 - 2t_2 \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = t_1^3 - 3t_1t_2 + 3t_3 \end{cases}$$

و از آنجا خواهیم داشت:

$$\sigma_1 = t_1 ; \sigma_2 = t_2 ; \sigma_3 = t_3$$

و بنابراین نتیجه می شود که برای هر چند جمله ای بصورت $\varphi(t_1, t_2, t_3)$ داریم:

$$\varphi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \varphi(t_1, t_2, t_3)$$

و بنابراین اگر $f(x, y, z)$ چند جمله ای مقارنی نسبت به x و y و z باشد، داریم:

$$f(x, y, z) = f(u, v, w)$$

$$x^n + y^n + z^n = u^n + v^n + w^n \quad \text{و در حالت خاص:}$$

۵۵۷. اگر فرض کنیم:

$$a - b = x ; b - c = y ; c - a = z$$

اتحاد مفروض، به صورت زیر در می آید:

$$x^6 + y^6 + z^6 - 9x^2y^2z^2 = -2x^2z^2 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2$$

که اگر تبدیلهای زیر را در نظر بگیریم:

$$x^6 + y^6 + z^6 = 3\sigma_1^2 - 2\sigma_2^2 ;$$

$$x^2z^2 + x^2y^2 + y^2z^2 = \sigma_2^2 + 3\sigma_3^2 ;$$

$$x^2y^2z^2 = \sigma_3^2 ; \quad x + y + z = \sigma_1 = 0$$

صحت اتحاد به سهولت ثابت می شود.

۵۰۸. اگر $S_n = x^n + y^n + z^n$ فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$S_6 = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^2\sigma_2^2 + 2\sigma_2^4 + 3\sigma_1^2\sigma_3^2$$

$$S_8 = \sigma_1^8 - 8\sigma_1^4\sigma_2^2 + 20\sigma_1^2\sigma_2^4 - 16\sigma_1^2\sigma_3^2 + 2\sigma_2^6 + 8\sigma_1^2\sigma_3^2 - 32\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3^2 + 12\sigma_1^2\sigma_3^2 + 24\sigma_1\sigma_2^2\sigma_3^2 - 8\sigma_2\sigma_3^2$$

در این صورت داریم:

$$2S_8 - S_6^2 = \dots - 16\sigma_1\sigma_2\sigma_3^2$$

تمام جمله‌های شامل σ_1 را از سمت راست به سمت چپ منتقل و دو طرف را مجذور می کنیم:

$$(2S_8 - S_6^2 - \dots)^2 = 256\sigma_1^2\sigma_3^4$$

که می توان آنرا به صورت زیر درآورد:

$$(2S_8 - S_6^2)^2 + \dots = 256\sigma_1^2\sigma_3^4$$

و چون داریم: $S_6 = \dots + 2\sigma_2^2$ می توان نوشت: $256\sigma_1^2\sigma_3^4 = 128S_6\sigma_3^4 + \dots$ (که جمله‌های بعدی همه قابل قسمت بر σ_1 هستند). و بنابراین خواهیم داشت:

$$(2S_8 - S_6^2)^2 - 128S_6\sigma_3^4 = \dots$$

به عبارت دیگر باید سمت چپ تساوی بالا بر σ_1 قابل قسمت باشد:

$$(2S_8 - S_6^2)^2 - 128S_6\sigma_3^4 = \sigma_1 A$$

که در آن A چند جمله‌ای مقارنی است (اگر خواننده بخواهد A را پیدا کند، باید تمام عملهای مربوطه را انجام دهد).

حالا اگر فرض کنیم: $x = \sqrt[4]{a}$ ، $y = \sqrt[4]{b}$ ، $z = \sqrt[4]{c}$ (که

در این صورت $S_6 = a^2 + b^2 + c^2$ و $S_8 = a^2 + b^2 + c^2$ و $\sigma_1 = \sqrt[4]{abc}$

خواهد بود). بدست می آید:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{c}} = \frac{1}{\sigma_1} = \frac{A}{(\gamma S_A - S_F^2)^2 - 128 S_F \sigma_F^4} =$$

$$= \frac{A}{(a^4 + b^4 + c^4 - 2ab - 2ac - 2bc)^2 - 128(a+b+c)abc}$$

۵۰۹. معادله مفروض را می توان چنین نوشت:

$$\sigma_1 = \sigma_1^2 - 3\sigma_F$$

از طرف دیگر برای اینکه دستگاه $xy = \sigma_F$ و $x + y = \sigma_1$ دارای ریشه های حقیقی برای y و x باشد باید $4\sigma_F < \sigma_1^2$ باشد و بنابراین:

$$\sigma_1^2 - \sigma_1 = 3\sigma_F < \frac{3}{4}\sigma_1^2$$

$$\frac{1}{4}\sigma_1^2 - \sigma_1 < 0 \Rightarrow \sigma_1(\sigma_1 - 4) < 0$$

و از اینجا نتیجه می شود: $0 < \sigma_1 < 4$

حالا اگر به معادله $3\sigma_F = \sigma_1^2 - \sigma_1$ برگردیم، جوابهای زیر امکان دارد:

$$\left| \begin{array}{c} \sigma_1 = 0 \\ \sigma_F = 0 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{c} \sigma_1 = 1 \\ \sigma_F = 0 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{c} \sigma_1 = 2 \\ \sigma_F = \frac{2}{3} \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{c} \sigma_1 = 3 \\ \sigma_F = 2 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{c} \sigma_1 = 4 \\ \sigma_F = 4 \end{array} \right|$$

و در نتیجه یکی از چهار دستگاه زیر را خواهیم داشت (حالت سوم را که برای xy جوابهای صحیح نمی دهد، حذف کردیم):

$$\left| \begin{array}{c} x+y=0 \\ xy=0 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{c} x+y=1 \\ xy=0 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{c} x+y=3 \\ xy=2 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{c} x+y=4 \\ xy=4 \end{array} \right|$$

که با حل آنها جوابهای صحیح معادله بدست می آید:

$$\left| \begin{array}{c} x_1=0 \\ y_1=0 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{c} x_2=1 \\ y_2=0 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{c} x_3=0 \\ y_3=1 \end{array} \right| ; \left| \begin{array}{c} x_4=2 \\ y_4=1 \end{array} \right| ;$$

$$\begin{vmatrix} x_{\delta} \\ y_{\delta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_{\gamma} \\ y_{\gamma} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \end{vmatrix}$$

۵۱۰. با توجه به شرط مسأله داریم:

$$\frac{a^{\gamma} + b^{\gamma} + c^{\gamma}}{\gamma} = \frac{S_{\gamma}}{\gamma} = \sigma_{\gamma}^2 \cdot \sigma_{\gamma}$$

$$\frac{a^{\delta} + b^{\delta} + c^{\delta}}{\delta} \times \frac{a^{\gamma} + b^{\gamma} + c^{\gamma}}{\gamma} = \frac{S_{\delta}}{\delta} \times \frac{S_{\gamma}}{\gamma} =$$

$$= (-\sigma_{\gamma} \sigma_{\gamma})(-\sigma_{\gamma}) = \sigma_{\gamma}^2 \cdot \sigma_{\gamma}$$

۵۱۱. از معادله مفروض معلوم است که هریک از مقادیر x و y و z مخالف صفراند، فرض می‌کنیم:

$$u = \frac{xy}{z} ; v = \frac{xz}{y} ; w = \frac{yz}{x}$$

در اینصورت طبق فرض مسأله داریم: $\sigma_1 = u + v + w = 3$ و سپس:

$$\sigma_{\gamma} = uv + uw + vw = x^{\gamma} + y^{\gamma} + z^{\gamma}$$

از نامساوی واضح: $(u + v + w)^2 \geq 3(uv + uw + vw)$

$$x^{\gamma} + y^{\gamma} + z^{\gamma} \leq 3$$

نتیجه می‌شود:

با توجه به اینکه x, y, z مقادیری صحیح و مخالف صفرند، نتیجه می‌شود:

$$|x| = |y| = |z| = 1, \text{ بنابراین هریک از مقادیر } u \text{ و } v \text{ و } w \text{ مساوی}$$

$$1 \text{ یا } -1 \text{ می‌شود، و لسی از رابطه } u + v + w = 3 \text{ نتیجه می‌شود که}$$

$$u = v = w = 1, \text{ بنابراین هریک از مقادیر } x, y, z \text{ مساوی } 1 \text{ یا } -1 \text{ می‌شود}$$

ولی بهر حال حاصلضرب آنها باید مساوی ۱ شود.

جوابها به قرار زیرند:

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

۵۱۲. داریم: $n(n+1) = n^2 + n$ که اگر در آن به جای n مقادیر

متوالی از ۱ تا n را قرار دهیم و با هم جمع کنیم، بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n(n+1) &= \\ = (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + (1 + 2 + \dots + n) &= \\ = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) &= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

۵۱۳. اگر مجموع مطلوب را S بگیریم، به ترتیب داریم:

$$\begin{aligned} S &= \frac{3}{9}(9 + 99 + 999 + \dots + 99 \dots 99) = \\ &= \frac{1}{3}[(10 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + \dots + (10^n - 1)] = \\ &= \frac{1}{3}[(10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^n) - n] = \\ &= \frac{1}{3}(10^{n+1} - 10 - n) \end{aligned}$$

۵۱۴. اتحاد زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}$$

که از آنجا بدست می‌آید:

$$A = \frac{1}{2} ; B = -1 ; C = \frac{1}{2}$$

و بنابراین داریم:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+2} \right) - \frac{1}{n+1}$$

در دو طرف این اتحاد به ترتیب از ۱ تا n بجای n قرار می‌دهیم و باهم جمع می‌کنیم (جمله‌های پشت‌سرهم مجموع را u_1 و $u_2, \dots, u_n$ و مجموع n جمله آنرا S_n گرفته‌ایم):

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \\
 u_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{2} \\
 u_3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) - \frac{1}{4} \\
 + u_4 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) - \frac{1}{5} \\
 &\dots \\
 u_{n-1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1} \right) - \frac{1}{n} \\
 u_n &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+2} \right) - \frac{1}{n+1}
 \end{aligned}$$

$$S_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = \frac{n(n+2)}{2(n+1)(n+2)} \quad \text{و یا:}$$

و حد مجموع جمله‌ها، وقتی که n به سمت بی‌نهایت میل کند، چنین می‌شود:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{4}$$

۱۰۵۱۵. اگر مجموع مفروض را S_n فرض کنیم داریم:

$$\begin{aligned}
 2S_n &= (1 - \cos 2x) + (1 - \cos 4x) + \\
 &+ (1 - \cos 6x) + \dots + (1 - \cos 2nx) = \\
 &= n - (\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \dots + \cos 2nx) = \\
 &= n - \frac{\sin nx \cos (n+1)x}{\sin x}
 \end{aligned}$$

$$S_n = \frac{n \sin x - \sin nx \cos (n+1)x}{2 \sin x} \quad \text{و از آنجا:}$$

۱۰۵۱۶. اگر مجموع مطلوب را S_n فرض کنیم، با توجه به رابطه:

$$\cos^3 \alpha = \frac{1}{4}(\cos^3 \alpha + 3 \cos \alpha)$$

خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} 4S_n &= (\cos^3 x + \cos^3 2x + \dots + \cos^3 nx) + \\ &+ 3(\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx) = \\ &= \frac{\sin \frac{3}{2} nx \cos \frac{3}{2} (n+1)x}{2 \sin \frac{3}{2} x} + \frac{3 \sin \frac{n}{2} x \cos \frac{n+1}{2} x}{2 \sin \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

۵۱۷. با توجه به رابطه: $\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right)$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{3^2-1} + \dots + \frac{1}{n^2-1} = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{3}{4} - \frac{2n+1}{2n(n+1)} \end{aligned}$$

و حد این مجموع وقتی که n به سمت بی نهایت میل کند، چنین می شود:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{3}{4}$$

۵۱۸. جمله عمومی این مجموع را می توان چنین نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} + \frac{(n^2+2n+1)-n^2}{n^2(n+1)^2} &= \\ = \frac{(n+1)^2-n^2}{n^2(n+1)^2} &= \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

و حالا اگر در اتحاد $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$ ، به جای n به

ترتیب از ۱ تا n قرار دهیم و با هم جمع کنیم، بدست می آید:

$$S_n = \frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \dots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 \quad \text{و ضمناً:}$$

۵۱۹. داریم:

$$k! + k \cdot k! = k!(1 + k) = (k+1)! ;$$

و سپس:

$$(k+1)! + (k+1)(k+1)! = \\ = (k+1)!(1 + k+1) = (k+2)! ;$$

و بنابراین با روش استقراء ریاضی به سادگی بدست می‌آید:

$$k! + k \cdot k! + (k+1)(k+1)! + \dots + (n-1)(n-1)! = n!$$

۵۲۰. جمله اول این مجموع را می‌توان به این ترتیب تبدیل کرد:

$$\sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \alpha) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \\ = \sin^2 \alpha - \frac{1}{4} \sin^2 2\alpha$$

و بنابراین اتحادهای زیر واضح است:

$$\left| \begin{array}{l} \sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha - \frac{1}{4} \sin^2 2\alpha \\ \frac{1}{4} \sin^2 2\alpha = \frac{1}{4} \sin^2 2\alpha - \frac{1}{16} \sin^2 4\alpha \\ + \frac{1}{16} \sin^2 4\alpha = \frac{1}{16} \sin^2 4\alpha - \frac{1}{64} \sin^2 8\alpha \\ \dots \\ \frac{1}{4^n} \sin^2 2^n \alpha = \frac{1}{4^n} \sin^2 2^n \alpha - \frac{1}{4^{n+1}} \sin^2 2^{n+1} \alpha \end{array} \right.$$

که اگر مجموع مطلوب را S_n بگیریم، از جمع رابطه‌های بالا خواهیم داشت:

$$S_n = \sin^2 \alpha - \frac{1}{4^{n+1}} \sin^2 2^{n+1} \alpha$$

و ضمناً چون $\sin^2 2^{n+1} \alpha$ مقداريست محدود و مثبت که از واحد بزرگتر نیست، داریم:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sin^2 \alpha$$

۵۲۱. به ترتیب داریم:

$$\begin{aligned} \frac{n+2}{n! + (n+1)! + (n+2)!} &= \frac{n+2}{n!(n+2) + (n+2)!} \\ &= \frac{1}{n! + (n+1)!} = \frac{1}{n!(n+2)} = \frac{n+1}{(n+2)!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} \end{aligned}$$

جواب: $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2}$ و ضمناً $S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+2)!}$

۵۲۲. راهنمایی: از اتحاد:

استفاده کنید. $\frac{n+p}{(n+p+1)!} = \frac{1}{(n+p)!} - \frac{1}{(n+p+1)!}$

جواب: $S = \lim_{p \rightarrow \infty} S_p = \frac{1}{n!}$ و ضمناً $S_p = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+p+1)!}$

۵۲۳. داریم:

$$u_1 = 1; u_2 = 2 + u_1 = 3; u_3 = 3 + u_2 = 6; \dots$$

به این ترتیب $u_1, u_2, \dots, u_n$ همان دنبالهٔ عددهای مثلثی هستند. داریم:

$$u_1 + u_2 = 1 + 2 = 2^2; u_2 + u_3 = 3 + 6 = 3^2;$$

$$u_k + u_{k+1} = (k+1)^2 \quad \text{فرض می کنیم که داشته باشیم:}$$

$$u_{k+1} + u_{k+2} = (k+2)^2 \quad \text{ثابت می کنیم:}$$

به ترتیب داریم:

$$\begin{aligned} u_{k+1} + u_{k+2} &= [(k+1) + u_k] + [(k+2) + u_{k+1}] = \\ &= (2k+3) + (u_k + u_{k+1}) = (2k+3) + (k+1)^2 = (k+2)^2 \end{aligned}$$

و بنابراین حکم مسأله با روش استقراء ریاضی ثابت شد.

۵۲۴. حاصلضرب زیر را در نظر می گیریم:

$$P = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{2n-1}{2n}$$

می دانیم که اگر به صورت مخرج کسری يك مقدار اضافه کنیم، کسر به واحد نزدیک می شود، بنابراین داریم:

$$P < \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{7} \times \dots \times \frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)P};$$

$$P^2 < \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n} \Rightarrow P < \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

حالا اگر، طبق فرض مسأله $n=5000$ فرض کنیم، داریم:

$$P < \frac{1}{\sqrt{10000}} = 0.01$$

۵۲۵. مقدار سمت راست تساوی چنین است (مسأله ۵۱۲ را ببینید):

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

و همچنین مقدار سمت چپ تساوی :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k(n-k+1) &= n \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n (k-1)k = \\ &= n \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-1)n(n+1)}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \end{aligned}$$

۵۲۶. طبق شرط مسأله داریم:

$$a_2 = 3a_1 + 2$$

$$a_3 = 3a_2 + 2^2$$

$$a_k = 3a_{k-1} + 2^{k-1}$$

دو طرف تساوی اول را در 3^{k-2} و دوطرف تساوی دوم را در 3^{k-3} و غیره ضرب می‌کنیم و تساویهایی را که بدست می‌آید با هم جمع می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} a_k &= 3^{k-1} + 2 \times 3^{k-2} + 2^2 \times 3^{k-3} + \dots + 2^{k-1} = \\ &= 3^{k-1} + \frac{2}{3} \times 3^{k-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times 3^{k-1} + \dots + \end{aligned}$$

$$+\left(\frac{r}{3}\right)^{k-1} \times 3^{k-1} = \frac{3^{k-1} \left[1 - \left(\frac{r}{3}\right)^k \right]}{1 - \frac{r}{3}} = 3^k - r^k$$

و به این ترتیب: $a_n = 3^n - 2^n$

۵۲۷. اولین جمله این عددها را $2k+1$ و آخرین آنها را $(2n-1)$ فرض می‌کنیم، داریم:

$$(2k+1) + (2k+3) + \dots + [2k + (2n-1)] = 7^2 ;$$

$$n(2k+n) = 7^2 = 7 \times 49 ; \quad \text{و از آنجا:}$$

$$\begin{cases} n=7 \\ 2k+n=49 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=7 \\ k=21 \end{cases}$$

جواب: $43; 45; 47; \dots; 55$

۵۲۸. رابطه‌های زیر به سادگی بدست می‌آید:

$$a_1 = \frac{3a_1 - 1}{3 - a_1} ; a_2 = \frac{5a_1 - 3}{5 - 3a_1} ; a_4 = \frac{9a_1 - 7}{9 - 7a_1} ;$$

$$a_5 = \frac{17a_1 - 15}{17 - 15a_1} ; \dots$$

و از اینجا می‌توان حدس زد:

$$a_k = \frac{(2^{k+1} + 1)a_1 - (2^{k+1} - 1)}{(2^{k+1} + 1) - (2^{k+1} - 1)a_1} \quad (1)$$

صحت این رابطه را با روش استقراء ریاضی ثابت می‌کنیم:

$$a_{k+1} = \left[3 \frac{(2^{k+1} + 1)a_1 - (2^{k+1} - 1)}{(2^{k+1} + 1) - (2^{k+1} - 1)a_1} - 1 \right] :$$

$$: \left[3 - \frac{(2^{k+1} + 1)a_1 - (2^{k+1} - 1)}{(2^{k+1} + 1) - (2^{k+1} - 1)a_1} \right] = \frac{(2^{k+1} + 1)a_1 - (2^{k+1} - 1)}{(2^{k+1} + 1) - (2^{k+1} - 1)a_1}$$

و به این ترتیب رابطه (۱) ثابت شد (درحالتی که به ازای بعضی از مقادیر صحیح k ، مقدار a_k در معادله $0 = (2^{k+1} + 1) - (2^{k+1} - 1)a_1$ صدق کند،

مسأله مفهوم خود را از دست می‌دهد).

حالا حد جمله عمومی را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} a_{k+1} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(2^k + 1)a_1 - (2^k - 1)}{(2^k + 1) - (2^k - 1)a_1} = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)a_1 - \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)}{\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) - \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)a_1} = -1 \quad (a_1 \neq 1) \end{aligned}$$

اگر $a_1 = 1$ باشد، $a_k = 1$ و $a_k = 1$ خواهد بود.

۵۲۹. داریم:

$$\begin{aligned} u_1 &= S_1 = 2 ; u_2 = S_2 - S_1 = 3 ; u_3 = S_3 - S_2 = 5 ; \\ u_4 &= S_4 - S_3 = 7 ; u_5 = S_5 - S_4 = 9 ; \dots \end{aligned}$$

و بنابراین $u_n = 2n - 1$ (برای $n \geq 2$) چنین است:

$$S_n = 2 + [1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)] = 2 + n^2$$

۵۳۰. می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} u_n &= \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2 + n + 1} = \operatorname{arctg} \frac{(n+1) - n}{1 + (n+1)n} = \\ &= \operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg} n \end{aligned}$$

و بنابراین داریم:

$$\begin{array}{l} u_1 = \operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} 1 \\ u_2 = \operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 2 \\ \dots \\ u_n = \operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg} n \end{array}$$

$$S_n = \operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg} 1$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \quad \text{و ضمناً:}$$

۵۳۱. از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\log \cos a = \log \frac{\sin 2a}{2 \sin a} = \log \sin 2a - \log \sin a - \log 2$$

که به سادگی بدست می‌آید:

$$S_n = \log \sin X - \log \sin \frac{X}{2^n} - n \log 2$$

وقتی که n به سمت بی نهایت میل کند $\frac{X}{2^n}$ به سمت صفر میل می کند و می توان

بجای $\sin \frac{X}{2^n}$ خود قوس $\frac{X}{2^n}$ را اختیار کرد که در این صورت بدست می آید:

$$\begin{aligned} S &= \lim_{n \rightarrow \infty} S = \lim_{n \rightarrow \infty} [\log \sin X - \log X + n \log 2 - n \log 2] = \\ &= \log \sin X - \log X = \log \frac{\sin X}{X} \end{aligned}$$

۵۳۲ داریم:

$$S_n = \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^4}{1-x^4} + \dots + \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}$$

که با استفاده از اتحاد: $\frac{u}{1-u^2} = \frac{1}{1-u} - \frac{1}{1+u}$ بدست می آید:

$$S_n = \frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{1-x^{2^{n+1}}}$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{و ضمناً:}$$

$$۵۳۳. \text{ از رابطه } u_n = \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{\sqrt{n}}{2^n} \text{ استفاده کنید.}$$

$$\text{جواب: } S_n = -\frac{1}{2} \text{ و } S = \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{1}{2}$$

۵۳۴ داریم:

$$u_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)}{\cos \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n+1}} = \operatorname{tg} \frac{1}{n} - \operatorname{tg} \frac{1}{n+1}$$

جواب: $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \operatorname{tg} 1$ و $S_n = \operatorname{tg} 1 - \operatorname{tg} \frac{1}{n+1}$
 ۵۳۵. داریم:

$$S_n = \cos^3 \alpha - \frac{1}{3} \cos^3 3\alpha + \frac{1}{9} \cos^3 9\alpha - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}} \cos^3 3^{n-1} \alpha$$

با استفاده از رابطه $\cos^3 \varphi = \frac{1}{4}(\cos 3\varphi + 3\cos \varphi)$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \cos^3 \alpha &= \frac{1}{4}(\cos 3\alpha + 3\cos \alpha) \\ + \quad & - \frac{1}{3} \cos^3 3\alpha = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3} \cos^3 9\alpha - \cos 3\alpha \right) \\ & \frac{1}{9} \cos^3 9\alpha = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{9} \cos^3 27\alpha + \frac{1}{3} \cos 9\alpha \right) \\ & \dots \\ & \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}} \cos^3 3^{n-1} \alpha = \frac{1}{4} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}} \cos^3 3^n \alpha + \right. \\ & \quad \left. + \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}} \cos^3 3^{n-1} \alpha \right] \\ S_n &= \frac{1}{4} \left[3\cos \alpha + \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}} \cos^3 3^n \alpha \right] \end{aligned}$$

وقتی که n به سمت بی‌نهایت میل کند $\cos^3 3^n \alpha$ مقداری بین -1 و 1 باقی‌می‌ماند، ولی ضریب آن به سمت صفر میل می‌کند و بنابراین:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{3}{4} \cos \alpha$$

۵۳۶. عبارت u_n را می‌توان چنین نوشت:

$$u_n = \frac{1}{n^2 + 1} - \frac{1}{(n+1)^2 + 1}$$

جواب: $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2}$ و $S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n^2 + 2n + 2}$

۵۳۷. با فرض $u_1 = u_2 = 0$ می‌توان نوشت:

$$u_n = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{5}{n-2} + \frac{6}{n} - \frac{11}{n+2} \right)$$

و از آنجا بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \lambda S_n = & -11 \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} \right) + 6 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} \right) + \\ & + 5 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + 1 \right) + 6 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} \right) \end{aligned}$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{167}{12} \quad \text{و ضمناً:}$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{65}{36} \quad \text{۵۳۸. جواب:}$$

$$S_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} + 1 - \sqrt{2} \quad \text{۵۳۹. جواب:}$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 - \sqrt{2}$$

۵۴۰. داریم: $u_n = \frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^n}$ و بنابراین داریم.

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n} \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) = \\ &= \frac{3^n - 1}{2 \times 3^n} + \frac{2^n - 1}{2^n} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 3^n} \right) + \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) = \\ &= \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2 \times 3^n} + \frac{1}{2^n} \right); \end{aligned}$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{3}{2}$$

۵۴۱. از رابطه $3u_n = \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}$ استفاده کنید.

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{3} \quad \text{و} \quad S_n = \frac{n}{3n+1} \quad \text{جواب:}$$

۵۴۲. اگر تفاضل $u_{n-1} - u_n$ را تشکیل دهیم، خواهیم داشت:

$$u_{n-1} - u_n = \frac{2n-3}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^n} = \frac{2n-6}{2^n} = \frac{2n-1}{2^n} - \frac{4}{2^n}$$

$$u_{n-1} - u_n = u_n - \frac{1}{2^{n-2}} \quad \text{و یا:}$$

و از آنجا بدست می‌آید:

$$2u_n - u_{n-1} = \frac{1}{2^{n-2}}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{array}{l} 2u_1 - u_1 = 1 \\ 2u_2 - u_2 = \frac{1}{2} \\ + \\ 2u_3 - u_3 = \frac{1}{4} \\ \hline 2u_n - u_{n-1} = \frac{1}{2^{n-2}} \end{array}$$

$$\begin{aligned} -u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + 2u_n &= \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-2}} \end{aligned}$$

و از آنجا به سادگی خواهیم داشت:

$$S_n + u_n - 2u_1 = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-2}}$$

که اگر به جای u_n و u_1 مقادیرشان را قرار دهیم، پس از ساده کردن چنین می‌شود:

$$S_n = \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n} + 1 = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2 \quad \text{و در نتیجه:}$$

۵۴۳. واضح است که $a_n < 1$ است، زیرا $1 + a_{n-1} > 1$ است. همچنین $a_n > \frac{1}{p}$

است زیرا اگر در تساوی $a_n = \frac{1}{1 + a_{n-1}}$ بجای a_{n-1} بزرگترین

مقدار خود، یعنی واحد، را قرار دهیم $a_n > \frac{1}{p}$ بدست می آید.

حالا تفاضل $a_n - a_{n-1}$ را تشکیل می دهیم:

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{1 + a_{n-1}} - \frac{1}{1 + a_{n-2}} = \frac{a_{n-2} - a_{n-1}}{(1 + a_{n-1})(1 + a_{n-2})}$$

با توجه به اینکه a_{n-2} و a_{n-1} از $\frac{1}{p}$ بزرگترند، می توان نوشت:

$$|a_n - a_{n-1}| < \frac{p}{q} |a_{n-1} - a_{n-2}| \quad (۱)$$

اگر در رابطه (۱) بجای n به ترتیب مقادیر پشت سرهم از ۳ تا n را قرار دهیم، بدست می آید:

$$|a_3 - a_2| < \frac{p}{q} |a_2 - a_1|$$

$$|a_4 - a_3| < \frac{p}{q} |a_3 - a_2|$$

$$|a_n - a_{n-1}| < \frac{p}{q} |a_{n-1} - a_{n-2}|$$

از ضرب این نامساویها در یکدیگر بدست می آید:

$$|a_n - a_{n-1}| < \left(\frac{p}{q}\right)^{n-2} |a_2 - a_1|$$

$a_2 - a_1$ مقداری است ثابت و وقتی n به سمت بی نهایت میل کند حد $\left(\frac{p}{q}\right)^{n-2}$

مساوی صفر می شود و بنابراین داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a_{n-1}| = 0$$

یعنی وقتی n به سمت بی نهایت میل کند مقادیر a_n و a_{n-1} به سمت یک مقدار

میل می کنند، اگر این مقدار را x فرض کنیم، با توجه به رابطه $a_n = \frac{1}{1 + a_{n-1}}$

در حالت حدی داریم:

$$x = \frac{1}{1+x} \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \text{جواب:}$$

۵۴۴. مستقیماً محاسبه می‌کنیم:

$$a_1 = 1; a_2 = \frac{2}{3}; a_3 = \frac{5}{8}; a_4 = \frac{1}{4}; \dots$$

حدس می‌زنیم که $a_n = \frac{2n-1}{n}$ باشد، صحت آنرا با روش استقراء ریاضی ثابت می‌کنیم:

$$a_{n+1} = \frac{2 - a_n}{3 - a_n} = \frac{2 - \frac{2n-1}{n}}{3 - \frac{2n-1}{n}} = \frac{2n+1}{n+1}$$

به این ترتیب صحت رابطه $a_n = \frac{2n-1}{n}$ ثابت شد و در نتیجه داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n} = 2$$

۵۴۵. (a) داریم:

$$a_1 = 1; a_2 = a_1 \cos X + \cos X = 2 \cos X = \frac{\sin 2X}{\sin X};$$

$$a_3 = a_2 \cos X + \cos 2X = \frac{\sin 3X}{\sin X}$$

با روش استقراء ریاضی ثابت می‌کنیم که: $a_n = \frac{\sin nX}{\sin X}$. این رابطه برای

حالت‌های $n=1, 2, 3$ صحیح است، فرض می‌کنیم که برای $n=k$ صحیح باشد، در اینصورت داریم:

$$a_{k+1} = a_k \cos X + \cos kX = \frac{\sin kX \cdot \cos X}{\sin X} + \cos kX = \frac{\sin(k+1)X}{\sin X}$$

بنابراین جمله n ام دنباله به صورت $\frac{\sin nX}{\sin X}$ است.

(b) داریم:

$$a_1 = 1; a_2 = 2 \cos X = \frac{\sin 2X}{\sin X};$$

$$a_2 = 2a_1 \cos X - a_1 = \frac{2 \sin 2X \cos X}{\sin X} - 1 = \frac{\sin 3X}{\sin X}$$

فرض می‌کنیم رابطه $a_n = \frac{\sin nX}{\sin X}$ برای $n=k$ درست باشد، در این صورت

داریم:

$$a_{k+1} = 2a_k \cos X - a_{k-1} = \frac{2 \sin kX \cos X}{\sin X} - \frac{\sin(k-1)X}{\sin X} = \frac{\sin(k+1)X}{\sin X}$$

و از آنجا نتیجه می‌شود: $a_n = \frac{\sin nX}{\sin X}$

۵۴۶. فرض می‌کنیم:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(2n-2k+1)(2n-k+1)} =$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n-2k+1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n-k+1};$$

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

با روش استقراء ریاضی ثابت می‌کنیم: $2S_n = \sigma_n$.

برای $n=1$ داریم: $\sigma_1 = 1$ و $S_1 = \frac{1}{2}$ و $2S_1 = \sigma_1$ روشن است که

$$\sigma_{n+1} - \sigma_n = \frac{1}{n+1}$$

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right) - \\ &- \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2n-1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2(n+1)} \end{aligned}$$

$$2(S_{n+1} - S_n) = \sigma_{n+1} - \sigma_n \quad \text{یعنی:}$$

$$2S_{n+1} - \sigma_{n+1} = 2S_n - \sigma_n \quad \text{یا:}$$

و چون $2S_1 - \sigma_1 = 0$ ، بنابراین با فرض $2S_n - \sigma_n = 0$ ، بدست می‌آید:

$$2S_{n+1} - \sigma_{n+1} = 0 \quad \text{به این ترتیب: } 2S_n = \sigma_n$$

۵۴۷. روشن است که تفاضل

$$a_k - b_k = 2 \times 3^{k+1}$$

بر ۵ قابل‌قسمت نیست، یعنی a و b همزمان بر ۵ قابل‌قسمت نیستند. ازطرف دیگر:

$$a_k \cdot b_k = (3^{2k+1} + 4)^2 - 3^{2k+2} = 9^{2k+1} + 15 \times 9^k + 16$$

از تقسیم 9^{2k+1} بر ۵ باقیمانده‌ای مساوی ۴ و از تقسیم ۱۵ بر ۵ باقیمانده‌ای مساوی صفر و از تقسیم ۱۶ بر ۵ باقیمانده‌ای مساوی واحد بدست می‌آید. بنابراین $a_k \cdot b_k$ مضربی است از ۵، یعنی یا a_k یا b_k بر ۵ قابل‌قسمت‌اند.

۵۴۸. دنباله‌ای را متقارب گویند که جمله عمومی آن a_n ، وقتی که

$n \rightarrow \infty$ ، به سمت حد معینی میل کند. اگر دنباله زیر را محاسبه کنیم:

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_p, b_p$$

معلوم می‌شود که $a_1 = a_p$ و $b_1 = b_p$. از اینجا به سادگی معلوم می‌شود

که دنباله‌های مفروض به اینصورت‌اند:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_1, \dots$$

$$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_1, \dots$$

و این دنباله‌ها تنها وقتی متقارند که داشته باشیم:

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 ; b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5$$

و ضمناً $a_n = a_1$ و $b_n = b_1$ ، از شرطهای دنباله‌ها

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b_1$$

نتیجه می‌شود که:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} b_{n-1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1}} ; \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} b_{n-1} - 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1} - 1}$$

$$a_1 = \frac{b_1}{a_1} \text{ و } b_1 = \frac{b_1 - 1}{a_1 - 1} \quad \text{و از آنجا:}$$

با حل این دستگاه و در نظر گرفتن $1 < a_1 < b_1$ بدست می‌آید:

$$a_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ و } b_1 = \frac{2 + \sqrt{5}}{2}$$

۵۴۹. از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم در تصاعد هندسی

$$a_1, a_1 q, a_1 q^2, \dots, a_1 q^{n-1}$$

($q \neq 1$ و $n > 2$) داشته باشیم:

$$a_1(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) = 3^k$$

در اینصورت باید تساوی زیر را داشته باشیم:

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = 3^1 \quad (1)$$

روشن است که قدرنسبت q نمی‌تواند بر ۳ قابل‌قسمت باشد. دو حالت پیش می‌آید:

(۱) $q = 3m + 1$. در اینحالت تمام توانهای q ضمن تقسیم بر ۳،

باقیمانده‌ای مساوی واحد دارند و بنابراین نتیجه می‌شود که باید n بر ۳ قابل‌قسمت باشد ($n = 3q$). می‌توانیم تساوی (۱) را به اینصورت بنویسیم:

$$(1 + q + q^2)(1 + q^3 + \dots + q^{3p-2}) = 3^1 \quad (2)$$

که از آنجا باید $1 + q + q^2$ مقسوم علیهی از 3^1 باشد، یعنی

$$1 + q + q^2 = 3^r \quad (3)$$

ولی $q = 3m + 1$ بود و رابطه (۳) به اینصورت در می‌آید:

$$1 + q + q^2 = 3m^2 + 3m + 3 = 3^r ;$$

$$3m^2 + 3m + 1 = 3^{r-1}$$

که تنها به ازای $r=1$ ممکن است، ولی در اینصورت باید $q=1$ باشد که طبق شرط مسأله ممکن نیست.

$$(2) \quad q = 3m - 1. \text{ در اینحالت سمت چپ رابطه (۱) تنها وقتی بر } 3$$

قابل قسمت است که n عددی زوج باشد. $n = 2p$ ، در اینصورت

$$(1+q)(1+q^2+q^4+\dots+q^{2p-2}) = 3^1 \quad (4)$$

که از آنجا به این تساوی می‌رسیم:

$$1 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2p-2} = 3^r \quad (5)$$

سمت چپ این تساوی عبارتست از مجموع جمله‌های یک تصاعد هندسی با قدر نسبت $q^2 = 3m' + 1$ و بنابراین تساوی (۵) برای $p > 2$ ممکن نیست (با توجه به حالت (۱) و برای $p=2$ هم تساوی (۴) ممکن نیست، زیرا تساوی (۴) به ازای $p=2$ به صورت زیر در می‌آید:

$$1 + q + q^2 + q^3 = 3^1$$

و می‌توان ثابت کرد که $1 + q + q^2 + q^3 = A$ تنها به ازای $q=0$ می‌تواند توانی از ۳ باشد:

از تساویهای $A = (1+q)(1+q^2)$ و $A = 3^1$ بدست می‌آید:

$$q + 1 = 3^s \text{ و } q^2 + 1 = 3^k$$

و از آنجا نتیجه می‌شود:

$$(3^s - 1)^2 + 1 = 3^k \Rightarrow 3^{2s} - 2 \times 3^s + 2 = 3^k$$

که تنها به ازای $s=k=0$ برقرار است. به این ترتیب لازم است $q=0$ باشد.

بنابراین در هر دو حالت به تناقض برخورد می‌کنیم.

۵۵۰. اگر S را دو برابر کنیم.

$$2S = 2a + 4a^2 + 6a^3 + \dots + 2na^{2n-1}$$

که مشتق مجموع زیر است:

$$A = a^2 + a^4 + a^6 + \dots + a^{2n} = \frac{a^2(a^{2n} - 1)}{a^2 - 1}$$

مشتق تابع اخیر نسبت به a برابر $2S$ است.

$$S = \frac{a[n a^{2n+2} - (n+1)a^{2n+1}]}{(a^2-1)^2} \quad \text{جواب:}$$

۵۵۱. از اتحاد زیر استفاده کنید:

$$x^{2^n} + \frac{1}{x^{2^n}} - 1 = \frac{x^{2^{n+1}} + \frac{1}{x^{2^{n+1}}} + 1}{x^{2^n} + \frac{1}{x^{2^n}} + 1}$$

$$P = \frac{x^{2^{n+1}} + \frac{1}{x^{2^{n+1}}} + 1}{x + \frac{1}{x} + 1} \quad \text{جواب:}$$

۵۵۲. جمله عمومی این رشته را به مجموع جبری سه کسر تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{2n+1}{n(n+1)(n+2)} \equiv \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}$$

از این اتحاد بدست می‌آید:

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = 1, \quad C = -\frac{3}{2}$$

یعنی:

$$\frac{2n+1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{n+1} - \frac{3}{2(n+2)}$$

اگر بجای n به ترتیب مقادیر از ۱ تا n را قرار دهیم و با هم جمع کنیم، بدست می‌آید:

$$S_n = \frac{5}{2} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{3}{2(n+2)}$$

و روشن است که وقتی n به سمت بی نهایت میل کند، S_n به سمت $\frac{5}{2}$ میل خواهد کرد.

۵۵۳. از آنجا که داریم:

$$(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9})^2 = 9(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}) + 12$$

واضح است که $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}$ ریشه حقیقی عبارت زیر است:

$$f(x) = x^3 - 9x - 12$$

اگر $f(x)$ را به صورت $x(x^2 - 9) - 12$ بنویسیم، به سادگی روشن می‌شود که برای $x > 3$ تابع $f(x)$ صعودی است. از طرف دیگر داریم: $f(\sqrt[3]{43}) < 0$ و $f(\sqrt[3]{44}) > 0$ بنابراین:

$$\sqrt[3]{43} < \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9} < \sqrt[3]{44}$$

۵۵۴. فرض می‌کنیم:

$$x_k = \sqrt[n]{n + \underbrace{\sqrt[n]{n + \dots + \sqrt[n]{n}}}_{k \text{ مرتبه}}}$$

$$x_{k+1} = \sqrt[n]{n + x_k} \quad (۱) \quad \text{در اینصورت داریم:}$$

چون $n > 1$ است، واضح است که داریم: $1 < x_1 < 2$ ، فرض می‌کنیم

$1 < x_k < 2$ باشد، از رابطه (۱) با توجه به نامساوی $1 < \sqrt[n]{n+2} < 2$ (که به سادگی و مثلاً با استقراء ریاضی ثابت می‌شود) بدست می‌آید:

$$1 < x_{k+1} < 2 \quad (۲)$$

دنباله عددهای $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ صعودی است و ضمناً از سمت بالا

محدود است، بنابراین دارای حدی است. اگر این حد را x بنامیم، از نامساوی (۲) نتیجه می‌شود $1 < x < 2$ و از تساوی (۱) خواهیم داشت:

$$x^n - x - n = 0$$

عدد ۱ به ازای هیچ مقداری از n ، ریشه این معادله نیست و عدد ۲ به ازای

$n = 2$ ریشه این معادله است، بنابراین به ازای $n \geq 2$ داریم:

$$1 < \sqrt[n]{n + \sqrt[n]{n + \dots + \sqrt[n]{n + \dots}}} < 2$$

ضمناً علامت تساوی تنها به ازای $n=2$ صحیح است. بنابراین نامساوی مضاعف حکم وقتی برقرار است که $n > 2$ باشد.
۵۵۵. از نامساویهای زیر استفاده می‌کنیم:

$$\sqrt[k]{k+1} > 1; \sqrt[k]{k} < \sqrt[k]{k+2} < 2 \quad (k > 2) \quad (1)$$

که اولین آنها واضح است و نامساوی دوم را هم می‌توان باروش استقراء ریاضی ثابت کرد. دنباله عددهای a_n صعودی است و با استفاده از نامساویهای (۱) خواهیم داشت:

$$a_n = \sqrt[2]{2 + \sqrt[3]{3 + \dots + \sqrt[n]{n}}} < \\ < \sqrt[2]{2 + \sqrt[3]{3 + \dots + \sqrt[n-1]{n-1+2}}} < \dots < \sqrt[2]{2 + \sqrt[5]{5}}$$

بنابراین دنباله عددهای مفروض دارای حدی مساوی a_0 می‌باشد که ضمناً داریم:

$$a_0 < \sqrt[2]{2 + \sqrt[5]{5}} < 2$$

حالا، با استفاده از (۱) بدست می‌آید:

$$a_n > \sqrt[2]{2 + \sqrt[3]{3 + \dots + \sqrt[n]{n}}} > \dots > \sqrt[2]{2 + \sqrt[3]{3 + \sqrt[5]{5}}}$$

$$a_0 > \sqrt[2]{2 + \sqrt[3]{3 + \sqrt[5]{5}}} \quad \text{و بنابراین:}$$

$$\sqrt[2]{2 + \sqrt[3]{3 + \sqrt[5]{5}}} > 1/9 \quad \text{ولی بهسادگی می‌توان تحقیق کرد که:}$$

$$1/9 < a_0 < 2 \quad \text{و بنابراین خواهیم داشت:}$$

۵۵۶. نامساویهای واضح زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} a^2 - ab + b^2 > ab ; \\ b^2 - bc + c^2 > bc ; \\ c^2 - ca + a^2 > ca \end{cases}$$

اگر دوطرف این نامساویها را به ترتیب در $a+b$ ، $b+c$ و $c+a$ ضرب کنیم، بدست می‌آید:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 > ab(a+b) \\ b^2 + c^2 > bc(b+c) \\ c^2 + a^2 > ca(c+a) \end{cases}$$

که از جمع آنها خواهیم داشت:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) > ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$$

$$2(a^2 + b^2 + c^2) > a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b) \quad \text{و یا:}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 > a^2 \sqrt{bc} + b^2 \sqrt{ca} + c^2 \sqrt{ab} \quad \text{و از آنجا:}$$

۵۵۷. متذکر می‌شویم که نامساوی تنها برای $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$ صحیح است. اثبات

رایه طریق استقراء ریاضی انجام می‌دهیم.

اگر $n=1$ باشد، داریم:

$$(\sec^2 \alpha - 1)(\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1) = \operatorname{tg}^2 \alpha \cot^2 \alpha = 1 = 1^2$$

یعنی در حالت $n=1$ علامت تساوی صحیح است.

اگر $n=2$ باشد، داریم:

$$\begin{aligned} (\sec^4 \alpha - 1)(\operatorname{cosec}^4 \alpha - 1) &= \operatorname{tg}^4 \alpha (\sec^2 \alpha + 1) \cot^4 \alpha (\operatorname{cosec}^2 \alpha + 1) = \\ &= (2 + \operatorname{tg}^2 \alpha)(2 + \cot^2 \alpha) = 4 + 2(\operatorname{tg}^2 \alpha + \cot^2 \alpha) + 1 \geq 9 \end{aligned}$$

زیرا $\operatorname{tg}^2 \alpha + \cot^2 \alpha \geq 2$ می‌باشد، بنابراین:

$$(\sec^4 \alpha - 1)(\operatorname{cosec}^4 \alpha - 1) \geq (1+2)^2$$

علامت تساوی وقتی صحیح است که داشته باشیم: $\operatorname{tg} \alpha = \cot \alpha = 1$

یعنی $\alpha = (2k+1)\frac{\pi}{4}$ باشد.

برای $n=3$ داریم:

$$\begin{aligned}
 (\sec^2 \alpha - 1)(\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1) &= (\sec^2 \alpha - 1)(\sec^2 \alpha + \sec^2 \alpha + 1) \times \\
 &\times (\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1) \times (\operatorname{cosec}^2 \alpha + \operatorname{cosec}^2 \alpha + 1) = [(\sec^2 \alpha + 1)^2 - \\
 &- \sec^2 \alpha][(\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1)^2 - \operatorname{cosec}^2 \alpha] = (3 + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^4 \alpha) \times \\
 &\times (3 + 2 \cot^2 \alpha + \cot^4 \alpha) = 19 + 12(\operatorname{tg}^2 \alpha + \cot^2 \alpha) + \\
 &+ 2(\operatorname{tg}^4 \alpha + \cot^4 \alpha) \geq 19 + 24 + 6 = 49
 \end{aligned}$$

و چون داریم $(1 + 2 + 3)^2 = 36$ بنابراین خواهیم داشت:

$$(\sec^2 \alpha - 1)(\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1) > (1 + 2 + 3)^2$$

و علامت تساوی در این حالت وجود ندارد.

حالا فرض می‌کنیم به ازای $n = m \geq 3$ داشته باشیم:

$$\begin{aligned}
 (\sec^{2m} \alpha - 1)(\operatorname{cosec}^{2m} \alpha - 1) &> (1 + 2 + 3 + \dots + \\
 &+ m)^2 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}
 \end{aligned}$$

در این صورت به ازای $n = m + 1$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 (\sec^{2m+2} \alpha - 1)(\operatorname{cosec}^{2m+2} \alpha - 1) &= (\sec^2 \alpha \cdot \sec^{2m} \alpha - 1) \times \\
 &\times (\operatorname{cosec}^2 \alpha \cdot \operatorname{cosec}^{2m} \alpha - 1) = \frac{(\sec^{2m} \alpha - \cos^2 \alpha)(\operatorname{cosec}^{2m} \alpha - \sin^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha} > \\
 &> \frac{4}{\sin^2 \alpha} (\sec^{2m} \alpha - 1)(\operatorname{cosec}^{2m} \alpha - 1) > 4 \times \frac{m^2(m+1)^2}{4} = \\
 &= m^2(m+1)^2 = (m+1)^2 \left(\frac{m+2}{2} + \frac{m-2}{2} \right)^2 > \\
 &> \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4} = [1 + 2 + \dots + m + (m+1)]^2
 \end{aligned}$$

بنابراین به ازای هر مقدار $n \geq 3$ داریم:

$$(\sec^{2n} \alpha - 1)(\operatorname{cosec}^{2n} \alpha - 1) > (1 + 2 + \dots + n)^2$$

و علامت تساوی تنها به ازای $n = 1$ و $n = 2$ [با شرط $\alpha = (2k+1)\frac{\pi}{4}$]

برقرار است.

۵۵۸- داریم:

$$\frac{1}{\log_2 3} + \frac{1}{\log_5 3} = \log_3 2 + \log_3 5 = \log_3 10 > 2$$

۵۵۹. فرض می‌کنیم:

$$a^2 + b^2 + c^2 - 16SR + 8Sr = \lambda$$

در اینصورت پس از تبدیلهای ساده خواهیم داشت:

$$\lambda = abc \left[(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - 9 \right]$$

از طرف دیگر داریم:

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) \geq 9$$

$$\lambda \geq 0$$

و بنابراین خواهیم داشت:

علامت تساوی تنها برای حالتی که مثلث مفروض متساوی الاضلاع باشد،

برقرار است.

۵۶۰. فرض می‌کنیم $a > b > c > 0$. اگر $a \geq b + c$ باشد، نامساوی برقرار

است، زیرا سمت چپ نامساوی غیر مثبت می‌شود، در حالی که سمت راست

نامساوی مقداری است مثبت. اگر $a < b + c$ باشد، سمت چپ نامساوی مثبت

است و می‌توان نوشت:

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) =$$

$$= \sqrt{(a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2} =$$

$$= \sqrt{[b^2 - (a-c)^2][a^2 - (b-c)^2][c^2 - (a-b)^2]} \leq$$

$$\leq \sqrt{a^2 b^2 c^2} = abc$$

علامت تساوی وقتی برقرار است که داشته باشیم: $a = b = c$.

روش دوم. اتحاد زیر واضح است:

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) - abc \equiv \frac{1}{4} [(a+b-c) \times \\ \times (a-b)^2 + (b+c-a)(b-c)^2 + (c+a-b)(c-a)^2]$$

و بنابراین نامساوی مسأله برای حالت $a > b > c$ و $a < b + c$ برقرار است.
در حالت $a > b + c$ و $a > b > c$ هم می‌توان همان استدلال روش اول را تکرار کرد.

۵۶۱. فرض می‌کنیم:

$$x = \frac{a}{r} + t ; y = \frac{a}{r} - t$$

در این صورت داریم:

$$x^n = \left(\frac{a}{r} + t\right)^n = \frac{a^n}{r^n} + n \frac{a^{n-1}}{r^{n-1}} \cdot t + \dots$$

$$y^n = \left(\frac{a}{r} - t\right)^n = \frac{a^n}{r^n} - n \frac{a^{n-1}}{r^{n-1}} \cdot t + \dots$$

$$x^n + y^n = 2 \times \frac{a^n}{r^n} + \dots \quad \text{و از آنجا:}$$

$$x^n + y^n > \frac{a^n}{r^{n-1}} \quad \text{و بنابراین:}$$

علامت تساوی برای وقتی است که $t = 0$ یعنی $x = y = \frac{a}{r}$ باشد.

۵۶۲. با توجه به اینکه از هر دو رأس مثلث و پای ارتفاعهایی که از این دو رأس عبور می‌کنند، می‌توان دایره‌ای عبور داد، داریم:

$$x = a|\cos A| ; y = b|\cos B| ; z = c|\cos C|$$

بنابراین باید ثابت کنیم:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq \frac{3}{4}$$

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \geq \frac{9}{4} \quad \text{و یا:}$$

و این نامساوی هم واضح است. زیرا در هر مثلث داریم:

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

که در آن O مرکز دایرهٔ محیطی و H محل تلاقی ارتفاعهای مثلث است. از این تساوی نتیجه می‌شود:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R^2} < \frac{9}{4}$$

توضیح: می‌توان نامساوی ۱۲ را هم ثابت کرد.
در حقیقت داریم:

$$\frac{1}{\cos^2 A} + \frac{1}{\cos^2 B} + \frac{1}{\cos^2 C} > \frac{3}{\sqrt{(\cos A \cos B \cos C)^2}}$$

از طرف دیگر می‌دانیم: $\cos A \cos B \cos C < \frac{1}{8}$ است و بنابراین:

$$\frac{1}{\cos^2 A} + \frac{1}{\cos^2 B} + \frac{1}{\cos^2 C} > \frac{3}{\sqrt{\frac{1}{64}}} = 12$$

حالت تساوی برای موقعی است که داشته باشیم:

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = 2$$

۵۶۳. بدترتیب داریم:

$$\begin{aligned} \frac{t^3 + t}{t-1} - 4 - 2\sqrt{3} &= \frac{t^3 - 3t - 2\sqrt{3}t + 4 + 2\sqrt{3}}{t-1} = \\ &= \frac{(t-1)^2 + [3t^2 - (6+2\sqrt{3})t + 5 + 2\sqrt{3}]}{t-1} \end{aligned}$$

چون $t > 1$ است $t-1 > 0$ می‌شود و سه جمله‌ای داخل کروشه هم همیشه مثبت است و بنابراین صحت نامساوی ثابت می‌شود.

۵۶۴. ابتدا صحت نامساوی زیر را ثابت می‌کنیم:

$$\prod_{i=1}^n (1 - b_i) > 1 - \sum_{i=1}^n b_i \quad (0 < b_i < 1) \quad (1)$$

نامساوی (۱) در حالت $n=2$ واضح است. فرض می‌کنیم که برای $n=k$ هم صحیح باشد، در این صورت بدست می‌آید:

$$\prod_{i=1}^{k+1} (1 - b_i) > (1 - \sum_{i=1}^k b_i)(1 - b_{k+1}) = \\ = 1 - \sum_{i=1}^{k+1} b_i + b_{k+1} \sum_{i=1}^k b_i > 1 - \sum_{i=1}^{n+1} b_i$$

یعنی نامساوی (۱) به ازاء همه مقادیر n صحیح است.

حالا اگر در نامساوی (۱) فرض کنیم $b_j = 1 - a_j$ بدست می آید
 $0 < a^i < 1$ و ضمناً:

$$\prod_{i=1}^n a_i > 1 - n + \sum_{i=1}^n a_i$$

$$\sum_{i=1}^n a_i - \prod_{i=1}^n a_i < n - 1 \quad \text{وازا آنجا:}$$

۵۶۵. چون دو طرف نامساوی مثبت است، می توان آنرا مجذور کرد، که پس از ساده کردن چنین می شود:

$$-(ab+cd) < \sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)}$$

در حالتی که $ab+cd > 0$ باشد نامساوی واضح است، در حالتی که $ab+cd < 0$ باشد باز دو طرف نامساوی مثبت است و می توان آنرا مجذور کرد که پس از ساده بودن به صورت زیر در می آید:

$$(ad-bc)^2 > 0$$

که واضح است. حالت تساوی برای موقعی است که داشته باشیم:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

۵۶۶. صحت نامساوی برای $n=1$ و $n=2$ مستقیماً بدست می آید. اگر از جمله چهارم به بعد، عددهای $3, 4, \dots, n$ را در مخرجها به عدد کوچکتر تبدیل کنیم، نامساوی زیر بدست می آید:

(۱) حل مسأله های ۵۶۶، ۵۶۷، ۵۶۸، و ۵۶۹ و ۵۷۹ از کتاب دوره اختصاصی جبر مقدماتی، ترجمه مولف همین کتاب برداشته شده است.

$$\frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times k} < \frac{1}{2^{k-1}}$$

بنابراین داریم (S) را مجموع کسرهای سمت چپ نامساوی گرفته ایم):

$$S < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

که با حذف جمله منفی $-\frac{1}{2^{n-1}}$ به همان نامساوی فرض می‌رسیم.

۵۶۷. با استفاده از بسط دو جمله‌ای و حل مسئله قبل به ترتیب داریم:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{1 \times 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + \\ &\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \times 2 \times \dots \times k} \cdot \frac{1}{n^k} + \dots + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)\dots \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times \dots \times (n-1)n} \cdot \frac{1}{n^n} = 2 + \\ &+ \frac{1}{1 \times 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{1 \times 2 \times \dots \times k} \left(1 - \frac{n}{n}\right) \dots \\ &\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{1 \times 2 \times \dots \times n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \\ &\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) < 2 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \dots + \\ &+ \frac{1}{1 \times 2 \times \dots \times n} < 3 \end{aligned}$$

۵۶۸. از نامساوی اتحادی زیر استفاده کنید:

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{k \cdot k} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

۵۶۹. در حالتی که هیچک از عددها منفی نباشند، واضح است که داریم:

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

و در حالتی که بین عددها جمله منفی هم وجود داشته باشد، برای محاسبه

مقدار قدرمطلق مجموع می توان قدرمطلق مقادیر مثبت را جدا گانه و قدرمطلق مقادیر منفی را جدا گانه باهم جمع کرد و مجموع کوچکتر را از مجموع بزرگتر کم کرد. برای محاسبه مجموع قدرمطلقها ، می توان مجموع قدرمطلقهای مقادیر مثبت را با مجموع قدر مطلقهای مقادیر منفی جمع کرد و واضح است که در اینصورت داریم :

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$$

۵۷۰. معادله به ازای $x > 3$ جواب ندارد (زیرا در اینصورت رادیکال موهومی می شود) و به ازای $x < 2$ همیشه برقرار است ، زیرا در این حالت سمت چپ نامعادله مثبت و سمت راست آن منفی می شود. برای مقادیر $2 < x < 3$ ، چون دو طرف نامعادله مثبت است می توانیم آنرا مجذور کنیم، که پس از ساده کردن چنین می شود:

$$x^2 - 3x + 1 < 0 \Rightarrow \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < x < \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

که با توجه به شرط $2 < x < 3$ بدست می آید: $2 < x < \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

$$x < \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{جواب:}$$

۵۷۱. رادیکال وقتی حقیقی است که داشته باشیم: $x \leq -\frac{3}{2}$ یا $x > \frac{1}{2}$. از

طرف دیگر $2x + 1 \leq 0$ یا $x \leq -\frac{1}{2}$ نمی تواند باشد (عدد منفی نمی تواند

از عدد مثبت بزرگتر شود) و بنابراین نامعادله برای $x \leq -\frac{1}{2}$ جواب ندارد.

وقتی $x > \frac{1}{2}$ باشد ، دو طرف نامعادله مثبت و می توان آنرا مجذور

کرد که در اینصورت به نامساوی واضح زیر می رسم:

$$4x^2 + 4x + 1 > 4x^2 + 4x - 3$$

بنابراین نامعادله جواب $x > \frac{1}{2}$ را قبول دارد .

$$-5 < x < 4 : x < -5 \quad \text{جواب:} \quad -\frac{4}{3} < x < 4$$

۵۷۳. جواب: نامعادله در حالت $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq a < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ جواب ندارد و

در حالت $a > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ یا $a < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ دارای جوابی به این صورت است:

$$a-1-\sqrt{a^2-a-1} < x < a-1+\sqrt{a^2-a-1}$$

۵۷۴. با توجه به شرط $a > 0$ ، نامعادله مفروض را می‌توان چنین نوشت:

$$2a + 2\sqrt{a^2 - x^2} > a^2 \Rightarrow 2\sqrt{a^2 - x^2} > a^2 - 2a \quad (۱)$$

حالت اول: $a^2 - 2a < 0$ یعنی $0 < a < 2$. در این حالت نامعادله

به ازای همه مقادیر $-a \leq x \leq a$ برقرار است.

حالت دوم: $a = 2$. در این حالت نامعادله (۱) چنین می‌شود:

$$\sqrt{4 - x^2} > 0$$

و برای همه مقادیر $-2 < x < 2$ درست است.

حالت سوم: $a > 2$. در این حالت $a^2 - 2a > 0$ و می‌توان نامعادله

را چنین نوشت:

$$\begin{cases} 2(a^2 - x^2) > a^2(a-2)^2 \\ |x| < a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 < a^2 \times \frac{4-a}{4} \\ |x| < a \end{cases} \quad (۲)$$

اگر $a > 4$ باشد نامعادله جواب ندارد. در حالت $2 < a < 4$ دستگاه نا-معادله‌های (۲) وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$x < \frac{a}{4} \sqrt{a(4-a)}$$

متذکر می‌شویم که در حالت $0 < a < 4$ داریم: $\frac{a}{4} \sqrt{a(4-a)} < a$ و

بنابراین می‌توان نوشت:

$$-\frac{a}{4} \sqrt{a(4-a)} < x < \frac{a}{4} \sqrt{a(4-a)}$$

۵۷۵. باید جوابهای مشترك نامعادله‌های زیر را پیدا کنیم:

$$\frac{1-x}{x^2 - 5x + 6} > 0, \quad x^3 - x^2 > 0$$

جواب: $x = 1$ و $x = 0$ ، $2 < x < 3$ ، $x < -1$

۵۷۶. جواب: (۱) اگر $a < 10$ باشد: $x < \frac{4a}{5}$ یا $x > \frac{16a+3}{2(10-a)}$

(۲) اگر $a = 10$ باشد: $x < 8$

(۳) اگر $a > 10$ باشد: $\frac{16a+3}{2(10-a)} < x < \frac{4a}{5}$

۵۷۷. جواب: $-2 < x < 2$ ؛ $3 < x < 7$

۵۷۸. چهار حالت در نظر بگیرید (بسته به اینکه x و y مثبت یا منفی باشند).

جواب:

$$\begin{cases} -1 < x \leq 0 \\ -x-1 < y < x+1 \end{cases} ; \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x-1 < y < -x+1 \end{cases}$$

۵۷۹. نامعادله را می‌توان به اینصورت نوشت:

$$y^2 + (2x^2 + a^2)y^2 + x^2(x^2 - a^2) < 0 \quad (1)$$

با فرض $z = y^2$ ، معادله درجه دوم زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$z^2 + (2x^2 + a^2)z + x^2(x^2 - a^2) = 0$$

چون داریم:

$$\begin{cases} \Delta = (2x^2 + a^2)^2 - 4x^2(x^2 - a^2) = a^2(8x^2 + a^2) > 0 \\ z_1 + z_2 = -(2x^2 + a^2) < 0 \end{cases}$$

ریشه های این معادله حقیقی و متمایزند و ضمناً ریشه کوچکتر منفی است.

اگر $|x| < a$ باشد، $z_1 z_2 = x^2(x^2 - a^2) < 0$ ، $z_1 < 0 < z_2$

اگر $|x| > a$ باشد، $z_1 < z_2 < 0$ و در حالت $x = 0$ یا $x = \pm a$

داریم: $z_2 = 0$

نامعادله (۱) وقتی برقرار است که $z = y^2$ بین دوریشه z_1 و z_2 واقع

باشد، ولی چون $y^2 \geq 0$ است، باید نامساوی $0 \leq y^2 < z_2$ برقرار باشد و این

وقتی امکان دارد که $|x| < a$ باشد. اگر $|x| \geq a$ یا $x = 0$ باشد، $z_2 \leq 0$

می‌شود و نامعادله (۱) نمی‌تواند برقرار باشد.

به این ترتیب اگر $|x| < a$ باشد، $|y| < \sqrt{z_2}$ می‌شود.

جواب: برای $0 < x < a$ و $-a < x < 0$ داریم:

$$-\sqrt{\frac{a\sqrt{ax^2+a^2}-(2x^2+a^2)}{2}} < y < \sqrt{\frac{a\sqrt{ax^2+a^2}-(2x^2+a^2)}{2}}$$

۵۸۰. دو حالت در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 < 0 \\ y^2 - x^2 < 0 \end{cases} \quad \text{حالت اول} \quad ; \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 > 0 \\ y^2 - x^2 > 0 \end{cases} \quad \text{حالت دوم}$$

حالت اول. داریم: $y^2 < x^2$ و $y^2 < 1 - x^2$. چون y^2 مقداری است

مثبت باید $0 < 1 - x^2$ یعنی $0 < x < 1$ باشد. ضمناً اگر $|x| > \frac{\sqrt{2}}{2}$ باشد

$x^2 < 1 - x^2$ و اگر $|x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ باشد $x^2 > 1 - x^2$ می‌شود. بنابراین جوابها

چنین است:

$$y < \begin{cases} |x| & \left(0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ \sqrt{1-x^2} & \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x < 1 \right) \end{cases}$$

و بهمین ترتیب برای حالت دوم می‌توان عمل کرد و به این جوابها رسید:

$$y^2 > \begin{cases} x^2 & \left(|x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ 1 - x^2 & \left(|x| > \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \end{cases}$$

۵۸۱. اگر $x < 0$ باشد $a - x > 0$ می‌شود و نامعادله به صورت

$$\frac{x^2}{a-x} > y^2 \quad \text{در می‌آید که همیشه برقرار است.} \quad \left(\frac{x^2}{a-x} < 0 \right) \text{ است و عدد}$$

مثبت همیشه از عدد منفی بزرگتر است).

اگر $0 \leq x < a$ باشد بازهم $a - x > 0$ می‌شود و نامعادله به صورت

$$|y| > x \sqrt{\frac{x}{x-a}} \quad \text{یا} \quad y^2 > \frac{x^2}{a-x}$$

اگر $x > a$ باشد $a-x < 0$ و نامعادله به صورت

$$y^2 > \frac{x^2}{a-x} \quad \text{یا} \quad (a-x)y^2 - x^2 < 0$$

$x < 0$	$0 < x < a$	$x > a$	جواب:
هر عدد دلخواه	$ y > x \sqrt{\frac{x}{x-a}}$	هر عدد دلخواه	

۵۸۲. شبیه مثال ۳ صفحه ۳۱۹ حل کنید. جوابها در جدول زیر داده شده است:

مقدار پارامتر	جواب نامعادله
$a < 1$	جواب ندارد
$1 < a < 1 + \sqrt{3}$	$\frac{a(a^2 - 2a + 2)}{a^2 - 2a - 2} < x < -\frac{a}{3}$
$a = 1 + \sqrt{3}$	$x < -\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$
$a > 1 + \sqrt{3}$	$x < -\frac{a}{3}$ $x > \frac{a(a^2 - 2a + 2)}{a^2 - 2a - 2}$

۵۸۳. داریم:

$$0 < (\sqrt{N} - a)^2 = N\sqrt{N} - 2aN + 2\sqrt{N}a^2 - a^2$$

$$\sqrt{N}(2a^2 + N) > a^2 + 2aN \quad \text{و بنابراین:}$$

$$\sqrt{N} > \frac{a(a^r + rN)}{ra^r + N} \quad \text{و یا:}$$

و شبیه آن:

$$\circ > [\sqrt{N} - (a+1)]^r = N\sqrt{N} - r(a+1)N + \\ + r(a+1)^r\sqrt{N} - (a+1)^r ;$$

$$\sqrt{N}[r(a+1)^r + N] < (a+1)^r + r(a+1)N$$

$$\sqrt{N} < \frac{(a+1)[(a+1)^r + rN]}{r(a+1)^r + N} \quad \text{و از آنجا:}$$

توضیح: همچنین با شرط: $a < \sqrt{N} < a+1$ می‌توان ثابت کرد:

$$\frac{a(a^r + rN)}{ra^r + N} < \sqrt{N} < \frac{(a+1)[(a+1)^r + rN]}{r(a+1)^r + N}$$

درحقیقت از نامساوی $(\sqrt{N} - a)^r > 0$ نتیجه می‌شود:

$$\sqrt{N}^r + a^r > ra\sqrt{N}$$

و اگر دو طرف این نامساوی را در $\sqrt{N}^r - a^r > 0$ ضرب کنیم بدست می‌آید:

$$\sqrt{N}^r - a^r > ra\sqrt{N}(\sqrt{N}^r - a^r)$$

$$\sqrt{N}(N + ra^r) > a(a^r + rN) \quad \text{و از آنجا:}$$

$$\sqrt{N} > \frac{a(a^r + rN)}{ra^r + N} \quad \text{و یا:}$$

و شبیه آن داریم:

$$[\sqrt{N} - (a+1)]^r > 0 \Rightarrow \sqrt{N}^r + (a+1)^r > r(a+1)\sqrt{N}$$

که اگر دو طرف آنرا در مقدار منفی $\sqrt{N}^r - (a+1)^r$ ضرب کنیم بدست می‌آید:

$$N\sqrt{N} - (a+1)^r < r(a+1)N - r(a+1)^r\sqrt{N}$$

$$\sqrt{N} < \frac{(a+1)[(a+1)^r + rN]}{r(a+1)^r + N} \quad \text{و از آنجا:}$$

۵۸۵. روش اول: داریم m_a و m_b و m_c میانهای مثلث هستند:

$$\sqrt{h_a} + \sqrt{h_b} + \sqrt{h_c} < \sqrt{m_a} + \sqrt{m_b} + \sqrt{m_c}$$

$$< \sqrt{r(m_a + m_b + m_c)} < \sqrt{r \times \frac{9}{r} R} = \frac{r}{r} \sqrt{9R}$$

روش دوم:

$$\begin{aligned} \sqrt{h_a} + \sqrt{h_b} + \sqrt{h_c} &\leq \sqrt{3(h_a + h_b + h_c)} \leq \\ &\leq \sqrt{3(m_a + m_b + m_c)} \leq \sqrt{3 \times \frac{9}{4}R} = \frac{3}{2}\sqrt{6R} \end{aligned}$$

۵۸۶. اگر وسطهای ضلعهای چهار ضلعی ABCD را به ترتیب K و L و M و N فرض کنیم، چهار ضلعی KLMN يك متوازی الاضلاع است و داریم:

$$S_{ABCD} = 2S_{KLMN}$$

از طرف دیگر اگر زاویه حاده بین دو قطر متوازی الاضلاع (یعنی KM و LN) را α فرض کنیم، داریم:

$$2S = 4S_{KLMN} = 2KM \cdot LN \cdot \sin \alpha \leq 2KM \cdot LN = 2m_1 \cdot m_2$$

که باتوجه به نامساوی واضح $2m_1 m_2 \leq m_1^2 + m_2^2$ خواهیم داشت:

$$2S \leq m_1^2 + m_2^2 \leq m_1^2 + m_2^2 + m_3^2$$

۵۸۷. نامساوی را می توان به صورت زیر نوشت:

$$(k-4)x^2 + (2k-3)x + k+4 > 0$$

برای اینکه يك سه جمله ای دارای علامت ثابتی باشد، باید مبین آن منفی شود، در اینصورت علامت سه جمله ای همان علامت ضریب x^2 خواهد بود. بنابراین باید جوابهای مشترك دو نامعادله زیر را بدست آوریم:

$$\begin{cases} \Delta = (2k-3)^2 - 4(k-4)(k+4) < 0 \\ k-4 > 0 \end{cases}$$

$$\text{جواب: } k < \frac{73}{12}$$

۵۸۸. نامساوی واضح زیر را در نظر می گیریم:

$$(a_1 + b_1 x)^2 + (a_2 + b_2 x)^2 + (a_3 + b_3 x)^2 > 0$$

سمت چپ این نامساوی نسبت به x از درجه دوم است و چون به ازای همه مقادیر x مثبت است، باید مبین آن منفی باشد و از آنجا صحت نامساوی یونیا کوسکی ثابت می شود.

۵۸۹. چون $a \neq 0$ است، نامساوی مفروض را می توان چنین نوشت:

$$\frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^m}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^m} > \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n}$$

از طرف دیگر، چون $0 < \frac{b}{a} < 1$ و $m > n$ است، داریم:

$$\left(\frac{b}{a}\right)^m < \left(\frac{b}{a}\right)^n \Rightarrow 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^m > 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n \quad (۱)$$

و همچنین:

$$1 + \left(\frac{b}{a}\right)^m < 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n \quad (۲)$$

که با توجه به نامساویهای (۱) و (۲) نامساوی مطلوب بدست می‌آید.
۵۹۰. به ترتیب داریم:

$$\begin{aligned} \frac{(x^r + 1) + 1}{\sqrt{x^r + 1}} &= \sqrt{x^r + 1} + \frac{1}{\sqrt{x^r + 1}} - 2 + 2 = \\ &= \left(\sqrt{x^r + 1} - \frac{1}{\sqrt{x^r + 1}} \right)^2 + 2 > 2 \end{aligned}$$

$$\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x^r} + \sqrt{y^r}}{\sqrt{xy}} \quad ۵۹۱. \text{ داریم:}$$

$$= (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \frac{\sqrt{x^r} - \sqrt{xy} + \sqrt{y^r}}{\sqrt{xy}} =$$

$$= (\sqrt{x} + \sqrt{y}) \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^r + \sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} =$$

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \left[1 + \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^r}{\sqrt{xy}} \right] > \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

۵۹۲. با استفاده از نامساوی واسطه‌ها داریم:

$$a^r + b^r + c^r = \frac{a^r + b^r}{2} + \frac{b^r + c^r}{2} + \frac{c^r + a^r}{2} > \sqrt{a^r b^r} +$$

$$\begin{aligned}
 +\sqrt{b^2c^2}+\sqrt{c^2a^2} &= a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=a^2 \cdot \frac{b^2+c^2}{2}+ \\
 +b^2 \cdot \frac{c^2+a^2}{2}+c^2 \cdot \frac{a^2+b^2}{2} &\geq a^2 \sqrt{b^2c^2}+b^2 \sqrt{c^2a^2}+ \\
 +c^2 \sqrt{a^2b^2} &= abc(a+b+c)
 \end{aligned}$$

۵۹۳. با استفاده از نامساوی $\frac{m+n}{2} > \sqrt{mn}$ داریم:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_1a_3}+\dots+\sqrt{a_{n-1}a_n} &\leq \frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_1+a_3}{2}+ \\
 +\dots+\frac{a_{n-1}+a_n}{2} &= \frac{n-1}{2}(a_1+a_2+\dots+a_n).
 \end{aligned}$$

۵۹۴. با استفاده از نامساوی $1+a_k \geq 2\sqrt{a_k}$ داریم:

$$\begin{aligned}
 (1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) &\geq 2\sqrt{a_1} \cdot 2\sqrt{a_2} \dots 2\sqrt{a_n} = \\
 = 2^n \sqrt{a_1a_2\dots a_n} &= 2^n
 \end{aligned}$$

۵۹۵. داریم:

$$\begin{aligned}
 2^n &= 1+(2^n-1) = 1+(2-1)(2^{n-1}+2^{n-2}+\dots+2+ \\
 +1) &> 1+n\sqrt[2^n-1]{2^{n-1} \times 2^{n-2} \times \dots \times 2 \times 1} = \\
 &= 1+n\sqrt[2^n-1]{\frac{(n-1)n}{2}} = 1+n\sqrt[2^n-1]{\dots}
 \end{aligned}$$

۵۹۶. داریم:

$$\begin{aligned}
 n! &= \sqrt{(n!)^2} = \sqrt{(1 \times n)[2 \times (n-1)][3 \times \\
 \times (n-2)] \dots (n \times 1)} &= \sqrt{1 \times n} \cdot \sqrt{2(n-1)} \cdot \sqrt{3(n-2)} \dots \\
 \dots \sqrt{n \times 1} &> \frac{1+n}{2} \times \frac{2+(n-1)}{2} \times \frac{3+(n-2)}{2} \dots \frac{n+1}{2} = \\
 &= \left(\frac{n+1}{2}\right)^n
 \end{aligned}$$

۵۹۷. به ترتیب داریم:

$$\begin{aligned}
 & 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 2} + \frac{1}{2 \times 2 \times 2} + \dots + \frac{1}{2 \times 2 \times \dots \times n} < 1 + \\
 & + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = \\
 & = 1 + 2 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3
 \end{aligned}$$

۵۹۸. داریم:

$$\begin{aligned}
 \sqrt[n]{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n} &= \sqrt[n]{\frac{(1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n)^2}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n}} = \\
 &= \sqrt[n]{\frac{(1 \times n)[2(n-1)] \dots [k(n-k+1)] \times \dots (n \times 1)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n}}
 \end{aligned}$$

از طرف دیگر داریم:

$$\begin{aligned}
 k(n-k+1) &= kn - k(k-1) = kn - n - k(k-1) + n = \\
 &= (k-1)(n-k) + n.
 \end{aligned}$$

و بنابراین به ازای هر مقدار $1 \leq k \leq n$ نامساوی $k(n-k+1) \geq n$ صحیح است و داریم:

$$\begin{aligned}
 \sqrt[n]{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n} &\geq \sqrt[n]{\frac{n^n}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n}} = \\
 &= \frac{n}{\sqrt[n]{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n}}
 \end{aligned}$$

و از آنجا:

$$\left(\sqrt[n]{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n} \right)^2 \geq n \Rightarrow \sqrt[n]{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n} \geq \sqrt{n}$$

علامت تساوی برای $n=1$ و $n=2$ است و برای $n \geq 2$ برقرار نیست.

۵۹۹. از رابطه $r = (p-a) \operatorname{tg} \frac{A}{2}$ استفاده می‌کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(p-a)^2} + \frac{1}{(p-b)^2} + \frac{1}{(p-c)^2} - \frac{4}{R^2} = \\ & = \frac{1}{r} \left(\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} \right) - \frac{4}{R^2} > \frac{1}{r} - \frac{4}{R^2} = \\ & = \frac{R^2 - 4r^2}{R^2 r^2} > 0 \end{aligned}$$

زیرا $R > 2r$ و $\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} > 1$ است.

۶۰۰. نامعادله‌ها را نسبت به y حل می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$y > \frac{7-3x}{2} \quad ; \quad y > \frac{3-2x}{4}$$

از این نامساویها نتیجه می‌شود که x می‌تواند هر عدد دلخواه باشد،

در اینصورت y باید بزرگتر از بزرگترین مقدار بین دو عدد $\frac{7-3x}{2}$ و

$\frac{3-2x}{4}$ انتخاب شود، برای اینکه بدانیم کدامیک از این دو مقدار

بزرگترند، نامعادله $\frac{3-2x}{4} > \frac{7-3x}{2}$ را حل می‌کنیم که جواب

$$x > \frac{11}{4}$$

جواب: اگر $x \leq \frac{11}{4}$ باشد، $y > \frac{7-3x}{2}$ و اگر $x > \frac{11}{4}$ باشد، در اینصورت

$$y > \frac{3-2x}{4} \text{ خواهد بود.}$$

۶۰۱. دستگاه نامعادله‌ها پس از تبدیلهای ساده چنین می‌شود:

$$3y - 2x < -1 \quad ; \quad 2y - 3x > 0$$

که از آنها بدست می‌آید:

$$y < \frac{2x-1}{3} \quad ; \quad y > \frac{3x}{2} \Rightarrow \frac{3x}{2} < y < \frac{2x-1}{3}$$

که ضمناً برای مقادیر x باید داشته باشیم:

$$\frac{2x}{2} < \frac{2x-1}{3} \Rightarrow x < -\frac{2}{5}$$

جواب: $x < -\frac{2}{5}$ و $\frac{2}{2}x < y < \frac{2x-1}{3}$

۶۰۲. مقدار y را از معادله اول محاسبه و در دو نامعادله قرار دهید، از آنجا x بدست می‌آید.

جواب: $x > 2$ و $y = \frac{6-3x}{2}$

۶۰۳. از نامعادله‌ها روشن است که x و y مثبت‌اند، بنابراین می‌توان نوشت:

$$y > x^2; y < \sqrt{x} \Rightarrow x^2 < y < \sqrt{x}$$

در اینصورت باید نامعادله $x^2 < \sqrt{x}$ برقرار باشد و از آنجا:

$$x^4 - x < 0 \Rightarrow x(x-1) < 0 \Rightarrow 0 < x < 1$$

جواب: $0 < x < 1$ و $x^2 < y < \sqrt{x}$

۶۰۴. جواب: اگر نامعادله‌ها را نسبت به y حل کنیم:

$$x > 2, \quad x-1 < y < 2x-2$$

و اگر نسبت به x حل کنیم:

$$y > 1, \quad \frac{1}{2}(y+3) < x < y+1$$

۶۰۵. جواب:

$$y > \begin{cases} 2x - \frac{2}{3} & (x > \frac{5}{3}) \\ 2x + 1 & (x \leq \frac{5}{3}) \end{cases}$$

۶۰۶. از حل دو نامعادله اول و دوم دستگاه بدست می‌آید:

$$y > \begin{cases} \frac{1}{2}(x+1) & (x \leq 1) \\ 2x-1 & (x > 1) \end{cases}$$

اگر نامعادله سوم را نسبت به y حل کنیم، بدست می‌آید:

$$y < x+1$$

بنابراین باید دو دستگاه نامعادله‌های زیر را حل کنیم:

$$\text{a) } \begin{cases} y > \frac{1}{2}(x+1) \\ y < x+1 \\ x \leq 1 \end{cases} ; \quad \text{b) } \begin{cases} y > 2x+1 \\ y < x+1 \\ x > 1 \end{cases}$$

که جوابهای هر کدام از آنها به سادگی بدست می آید:

$$\frac{1}{2}(x+1) < y < x+1 \quad -1 < x < 1 \quad (a)$$

$$2x-1 < y < x+1 \quad 1 < x < 2 \quad (b)$$

۶۰۷. در دو معادله، z را نسبت به x و y پیدا می کنیم:

$$z < 4x - y + 1, \quad z > -x + y - 2$$

این نامعادله‌ها وقتی برقرارند که داشته باشیم:

$$-x + y - 2 < 4x - y + 1 \Rightarrow y < \frac{1}{2}(\Delta x + 3)$$

جواب:

$$\begin{cases} x = \text{عدد دلخواه} \\ y < \frac{1}{2}(\Delta x + 3) \\ -x + y - 2 < z < 4x - y + 1 \end{cases}$$

۶۰۸. دو معادله دستگاه را نسبت به z حل می کنیم، بدست می آید:

$$z > 4x - y + 1, \quad z > -x + y - 2$$

بنابراین باید دو مقدار $4x - y + 1$ ، $-x + y - 2$ را با هم مقایسه کنیم:

$$4x - y + 1 - (-x + y - 2) = \Delta x - 2y + 3 > 0;$$

$$y < \frac{1}{2}(\Delta x + 3)$$

در نتیجه جوابها چنین می شود:

$$\begin{cases} x = \text{عدد دلخواه} \\ y < \frac{1}{2}(\Delta x + 3) \\ z > 4x - y + 1 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x = \text{عدد دلخواه} \\ y > \frac{1}{2}(\Delta x + 3) \\ z > -x + y - 2 \end{cases}$$

۶۰۹. جواب:

$$\begin{cases} 0 < x < 2a \\ \sqrt{2ax - x^2} < |y| < \sqrt{2ax} \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x > 2a \\ -\sqrt{2ax} < y < \sqrt{2ax} \end{cases}$$

۶۱۰. از معادله بدست می‌آید: $y = x + 1$ که اگر در نامعادله قرار دهیم:

$$x^2 + (x+1)^2 \leq 4 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 3 \leq 0$$

و از آنجا جوابهای دستگاه بدست می‌آید:

$$\begin{cases} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leq y \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ y = x + 1 \end{cases}$$

۶۱۱. از معادله $x^2 + y^2 = 4$ بدست می‌آید:

$$y = \pm \sqrt{4 - x^2} \quad (-2 \leq x \leq 2)$$

اگر $y = -\sqrt{4 - x^2}$ بگیریم، دستگاه مفروضه به دو دستگاه نامعادله‌های زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ -x - 1 < 0 \end{cases} ; \begin{cases} 4 - x^2 > (-x - 1)^2 \\ -x - 1 \geq 0 \end{cases}$$

و اگر $y = \sqrt{4 - x^2}$ بگیریم به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 2, \quad x + 1 \geq 0 \\ 4 - x^2 < (x + 1)^2 \end{cases}$$

جوابهای دستگاه مختلط مسأله چنین می‌شود:

$$\begin{cases} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x \leq 2 \\ y = -\sqrt{4-x^2} \end{cases}, \begin{cases} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < x \leq 2 \\ y = \sqrt{4-x^2} \end{cases}$$

۶۱۲. جواب: $0 \leq x \leq 5$

۶۱۳. نامساوی مفروض را می‌توان چنین نوشت:

$$-3 < \frac{x^2 - kx - 1}{x^2 + x + 1} < 3$$

و از آنجا به دستگاه نامعادله‌های زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} 2x^2 + (k+3)x + 2 > 0 \\ 4x^2 - (k-3)x + 4 > 0 \end{cases}$$

برای اینکه دو نامعادله فوق به ازای همه مقادیر x برقرار باشند، باید مبین سه جمله‌ایهای درجه دوم سمت چپ نامساویها منفی شود، یعنی:

$$\begin{cases} (k+3)^2 - 16 = (k+7)(k-1) < 0 \\ (k-3)^2 - 64 = (k+5)(k-11) < 0 \end{cases}$$

جواب: $-5 < k < 1$

۶۱۴. به ازای $a=0$ تابع:

$$ax^2 + (a-3)x + \frac{2}{a} - 2a$$

معین نیست و بنابراین در بحث زیر $a \neq 0$ در نظر گرفته می‌شود.

حالت اول: $a > 0$ ، در اینصورت نامعادله $ax^2 - 2 > ax$ را می‌توان

به صورت $x > \frac{a^2 - 2}{a}$ نوشت. ضمناً باید داشته باشیم.

$$\begin{aligned} \varphi = ax^2 + (a-3)x + \frac{2}{a} - 2a &= a \left(x - \frac{a+1}{a} \right) \left(x - 2 \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{1-a}{a} \right) > 0 \end{aligned}$$

به این ترتیب در حالت $a > 0$ اگر مثلاً x از مقادیر $\frac{a^2 - 2}{a}$ و $\frac{a+1}{a}$ و

$\frac{2(1-a)}{a}$ بزرگتر باشد در نامعادله‌ها صدق می‌کند. یعنی برای حالت

$a > 0$ نمی‌توان شرطهای مسأله را برقرار کرد.

حالت دوم: $a < 0$. در اینصورت نامعادله $ax^2 - 2 > ax$ به صورت

$x \leq \frac{a^2 - 2}{a}$ در می‌آید و ضمناً با توجه به شرط $a < 0$ باید داشته باشیم:

$$\left(x - \frac{a+1}{a} \right) \left(x - 2 \frac{1-a}{a} \right) > 0$$

و این نامساوی برای همه مقادیر $x \leq \frac{a^2 - 2}{a}$ تنها وقتی برقرار است که

داشته باشیم:

$$\begin{cases} \frac{a^2-2}{a} < \frac{a+1}{a} \\ \frac{a^2-2}{a} < \frac{2(1-a)}{a} \end{cases} \Rightarrow a < -1 - \sqrt{5}$$

۶۱۵. جواب هر دو سؤال مسأله را می‌توان از نامساوی زیر بدست آورد:

$$(n+2)^n < n^{n+2} \quad (۱)$$

ثابت می‌کنیم که این نامساوی برای همه مقادیر $n \geq 3$ برقرار است. نامساوی (۱) را به اینصورت می‌نویسیم:

$$\sqrt[n+2]{n+2} < \sqrt[n]{n}$$

در اینصورت روشن است که نامساوی (۱) نتیجه‌ای از نامساوی زیر است:

$$\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}, \quad n \geq 3 \quad (۲)$$

اگر دو طرف نامساوی (۲) را به توان $n(n+1)$ برسانیم به اینصورت در می‌آید:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n, \quad n \geq 3 \quad (۳)$$

و بنابراین دو نامعادله (۳) به اینصورت در می‌آید:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$$

و این نامساوی را هم در مسأله ۵۶۷ ثابت کرده‌ایم. در اینجا طریق دیگری برای اثبات آن می‌آوریم:

$$a_n = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n} \quad \text{می‌گیریم و باید ثابت کنیم به ازای } n \geq 3 \text{ داریم: } a_n < 1$$

برای $n=3$ نامساوی درست است، علاوه بر آن برای $n \geq 3$ داریم:

$$a_{n+1} < a_n, \quad \text{زیرا این نامساوی را می‌توان چنین نوشت:}$$

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{n+1} < \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

و درستی این نامساوی هم روشن است. بنابراین برای $n \geq 3$ داریم: $a_n < 1$.
۶۱۶ داریم:

$$(G_{n-1})^{n-1} = a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1}$$

$$(G_n)^n = a_1 a_2 \cdots a_n = (G_{n-1})^{n-1} \cdot a_n \quad \text{بنابراین:}$$

$$G_n = \sqrt[n]{G_{n-1} \cdots G_{n-1} \cdot a_n} \quad \text{و از آنجا:}$$

که با استفاده از نامساوی مربوط به واسطه‌های عددی و هندسی داریم:

$$G_n \leq \frac{(n-1)G_{n-1} + a_n}{n}$$

که به سادگی به اینصورت در می‌آید:

$$nG_n - (n-1)G_{n-1} \leq a_n$$

۶۱۷. اثبات را باروش استقراء ریاضی انجام می‌دهیم؛ برای $n=2$ داریم:

$$\frac{a_1 b_1}{a_1 + b_1} + \frac{a_2 b_2}{a_2 + b_2} \leq \frac{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)}{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)}$$

که بعد از انجام عملهای لازم به این نتیجه درست می‌رسد:

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \geq 0$$

حالا فرض می‌کنیم که نامساوی فرض برای $n=k$ درست باشد، با توجه به اینکه برای $n=2$ درست است، بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} & \frac{a_1 b_1}{a_1 + b_1} + \cdots + \frac{a_k b_k}{a_k + b_k} + \frac{a_{k+1} b_{k+1}}{a_{k+1} + b_{k+1}} < \\ & < \frac{(a_1 + \cdots + a_k)(b_1 + \cdots + b_k)}{(a_1 + \cdots + a_k) + (b_1 + \cdots + b_k)} + \frac{a_{k+1} b_{k+1}}{a_{k+1} + b_{k+1}} < \\ & < \frac{(a_1 + \cdots + a_k + a_{k+1})(b_1 + \cdots + b_k + b_{k+1})}{(a_1 + \cdots + a_k + a_{k+1}) + (b_1 + \cdots + b_k + b_{k+1})} \end{aligned}$$

۶۱۸. راه حل اول: از رابطه بین نامساویهای عددی و هندسی برای $a+b$ عدد استفاده می‌کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{\sqrt[n]{a^r b^r}} &= \sqrt[n]{\frac{a+b}{a^r \cdot \underbrace{a^r \dots a^r}_{\text{مرتبه } b} \cdot \underbrace{b^r \cdot b^r \dots b^r}_{\text{مرتبه } a}}} \leq \\ &\leq \sqrt[n]{\frac{a+b}{a^r \times \frac{a^r + a^r + \dots + a^r + b^r + b^r + \dots + b^r}{a+b}}} = \sqrt[n]{\frac{a+b}{a+b}} \\ &\quad \times \frac{a^r b + ab^r}{a+b} = \sqrt[n]{ab} \leq a^r + b^r \end{aligned}$$

راه حل دوم: به سادگی می‌توان ثابت کرد که برای مقادیر مثبت a و b

داریم: $\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b} > 1$. در حقیقت اگر $a > b$ باشد $\frac{a}{b} > 1$ و $a-b > 0$ و

بنابراین $\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b} \geq 1$ می‌شود. اگر $a < b$ باشد، $\frac{a}{b} < 1$ ، $a - b < 0$ ،

و در نتیجه $\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b} > 1$ می شود.

سپیس داریم:

$$a^r + b^r \geq r a b = r \sqrt[a+b]{a^{r b} b^{r a}} = r \sqrt[a+b]{a^{r b} b^{r a} \left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}} >$$

متذکر می‌شویم که در این حل‌نامه‌سای

$$\gamma(a^\gamma b^\gamma \alpha)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \leq a^\gamma + b^\gamma$$

را برای هر مقدار مثبت a و b ثابت کردیم، درحالیکه در راه حل اول از طبیعی بودن دو عدد ba استفاده کردیم.

۶۱۹. طبق قضیه مربوط به واسطه‌های عددی و هندسی، می‌توان نوشت:

$$\frac{(n-1)a^u + N}{n} > \sqrt[n]{a^{n(n-1)} \cdot N}$$

$$\frac{n}{\sqrt{N}} < \frac{(n-1)a^n + N}{na^{n-1}}$$

از آنجا نتیجه می‌شود:

به همین ترتیب:

$$\frac{a^n + (n-1)N}{nNa} > \frac{1}{Na} \sqrt[n]{a^n N^{n-1}} = \frac{1}{\sqrt[n]{N}}$$

$$\sqrt[n]{N} > \frac{nNa}{(n-1)N + a^n} \quad \text{یعنی:}$$

و بنابراین

$$\frac{nNa}{(n-1)N + a^n} < \sqrt[n]{N} < \frac{(n-1)a^n + N}{na^{n-1}}$$

۶۲۵. راه حل اول: نامساوی مفروض برای $n=2$ صحیح است. فرض می‌کنیم که نامساوی برای مقداری از $n > 2$ صحیح باشد، ثابت می‌کنیم که در اینصورت برای $n+1$ هم صحیح است، داریم:

$$\begin{aligned} \left(2 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} &> \left(2 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \\ &= \left(2 - \frac{1}{n}\right)^n \left(2 - \frac{1}{n}\right) > n \left(2 - \frac{1}{n}\right) = \\ &= 2n - 1 = (n+1) + (n-2) > n+1 \end{aligned}$$

علامت تساوی برای حالت $n=1$ است.

راه حل دوم: روشن است که:

$$\begin{aligned} \left(2 - \frac{1}{n}\right)^n &= \left[1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right]^n = 1 + n\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \\ &+ \frac{n(n-1)}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 + \dots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \end{aligned}$$

واز آنجا:

$$\left(2 - \frac{1}{n}\right)^n > 1 + n\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 + n - 1 \Rightarrow \left(2 - \frac{1}{n}\right)^n > n$$

۶۲۶. برای $n=2$ داریم:

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} \leq \frac{2}{1+\sqrt{x_1 x_2}} \quad (۱)$$

نامساوی (۱) هم ارز نامساوی زیر است:

$$\frac{2+x_1+x_2}{1+(x_1+x_2)+x_1x_2} \leq \frac{2}{1+\sqrt{x_1x_2}},$$

$$2\sqrt{x_1x_2}+(x_1+x_2)\sqrt{x_1x_2} \leq (x_1+x_2)+2x_1x_2,$$

$$(x_1+x_2)(1-\sqrt{x_1x_2}) \geq 2\sqrt{x_1x_2}(1-\sqrt{x_1x_2}),$$

و چون $1-\sqrt{x_1x_2} > 0$ است، بدست می‌آید:

$$x_1+x_2 \geq 2\sqrt{x_1x_2}$$

که يك نامساوی واضح است. بنابراین نامساوی برای $n=2$ ثابت شد.

حال فرض می‌کنیم که نامساوی برای $n-1$ صحیح باشد و فرض می‌کنیم:

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} = P_n, \quad x_i = k_i P_n$$

که در آن به سادگی معلوم می‌شود که $k_i > 0$ و $k_1k_2\cdots k_n = 1$. طبق فرض داریم:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1+k_i P_n} \leq \frac{n-1}{1+\sqrt[n-1]{k_1k_2\cdots k_{n-1}} \cdot P_n}$$

با توجه به نامساوی (۱):

$$\begin{aligned} & \frac{n-1}{1+\sqrt[n-1]{k_1k_2\cdots k_{n-1}} \cdot P_n} + \frac{n-1}{1+\sqrt[n-1]{k_n} \cdot P_n} \leq \\ & \leq \frac{2(n-1)}{1+\sqrt[n-1]{k_1k_2\cdots k_n} \cdot P_n^2} = \frac{2(n-1)}{1+P_n^2} \end{aligned}$$

بالاخره دوباره طبق فرض داریم:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1+k_n P_n} + \frac{n-2}{1+P_n} = \frac{1}{1+k_n P_n} \times \\ & \times \left(\frac{1}{1+P_n} + \frac{1}{1+P_n} + \cdots + \frac{1}{1+P_n} \right) \leq \\ & \leq \frac{n-1}{1+\sqrt[n-1]{k_n \cdot P_n \cdot P_n^{n-2}}} = \frac{n-1}{1+\sqrt[n-1]{k_n \cdot P_n^{n-1}}} = \end{aligned}$$

$$= \frac{n-1}{1 + \sqrt{k_n} \cdot P_n}$$

هر سه نامساوی را با هم جمع می‌کنیم، بعد از ساده کردن بدست می‌آید:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+x_i} + \frac{n-2}{1+P_n} \leq \frac{2(n-1)}{1+P_n}$$

که از اینجا معلوم می‌شود نامساوی برای n عدد هم صحیح است. بدسادگی می‌توان متوجه شد که نامساوی برای حالتی هم که عددهای

x_i (یا بعضی از آنها) مساوی واحد باشند، صحیح است.

۶۲۲. سه جمله‌ای درجه دوم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = 2x^2 - (a+b+c+d)x + (ad+bc)$$

مبین این معادله چنین است:

$$\Delta = (a+b+c+d)^2 - 4(ad+bc)$$

ثابت می‌کنیم که اگر $a > c$ و $b > d$ باشد، این معادله ریشه‌های حقیقی دارد. داریم:

$$f(a) = a^2 - ab - ac + bc = (a-b)(a-c);$$

$$f(b) = b^2 - ab - bd + ad = (b-a)(b-d)$$

$$f(c) = c^2 - ac - cd + ad = (c-a)(c-d)$$

$$f(d) = d^2 - bd - cd + bc = (d-b)(d-c)$$

اگر $a \neq b$ باشد $f(a) \cdot f(b) < 0$ و اگر $c \neq d$ باشد در اینصورت $f(c) \cdot f(d) < 0$ می‌شود و معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد.

در حالتی که $a = b$ و $c = d$ باشد، $f(a) = f(c) = 0$ می‌شود و بازهم معادله دو ریشه متمایز a و c دارد ($a > c$). بنابراین در هر حال معادله مثبت است، یعنی

$$(a+b+c+d)^2 > 4(ad+bc)$$

۶۲۳. از شرط مسأله معلوم می‌شود که $ab > 0$ ، $a+b \neq 0$ و $m > 0$.

۱. اگر $b = 0$ باشد $a \neq 0$ می‌شود و دستگاه

$$ax^2 = x - y, \quad ax = m$$

دارای ریشه‌های حقیقی است.

۲. اگر $b \neq 0$ باشد داریم: $y = \frac{m-ax}{b}$ و پس از حذف y

بدست می‌آید:

$$a(a+b)x^2 - (a+b+2ma)x + m^2 + m = 0$$

$$\Delta = (a+b)^2 - 4abm^2 \quad \text{و مبین آن:}$$

که از شرط $\frac{\sqrt{ab}}{|a+b|} < \frac{1}{2m}$ نتیجه می‌شود $\Delta > 0$ و بنابراین دستگاه ریشه‌های حقیقی دارد.

۶۲۴. اولاً نامساوی به‌ازای $n=3$ صحیح است. فرض می‌کنیم برای $k \geq 3$ نامساوی $2^k > 2k+1$ صحیح باشد، در اینصورت داریم:

$$2^{k+1} = 2 \times 2^k > 2(2k+1) = (2k+3) + (2k-1) > 2k+3$$

و بنابراین نامساوی مفروض با روش استقراء ریاضی ثابت شد.

ثانیاً نامساوی برای $n=5$ صحیح است. فرض می‌کنیم نامساوی $2^k > k^2$ ($k \geq 5$) صحیح باشد، در اینصورت داریم:

$$2^{k+1} = 2^k \times 2 > 2k^2 = (k+1)^2 + (k^2 - 2k - 1) > (k+1)^2$$

زیرا برای $k \geq 5$ داریم: $k^2 - 2k - 1 > 0$.

ثالثاً برای $n=10$ نامساوی صحیح است. فرض می‌کنیم نامساوی $2^k > k^3$ ($k \geq 10$) صحیح باشد، در اینصورت داریم:

$$2^{k+1} = 2 \times 2^k > 2k^3 = (k+1)^3 + (k^3 - 2k^2 - 3k - 1)$$

ثابت می‌کنیم برای $k \geq 10$ داریم: $k^3 - 2k^2 - 3k - 1 > 0$. برای $k=10$ این نامساوی صحیح است. اگر نامساوی را به‌این‌ترتیب بنویسیم:

$$k(k^2 - 2k - 3) > 1$$

کافی است ثابت کنیم $\frac{1}{10} > k^2 - 2k - 3$ (برای $k \geq 10$) که به‌سادگی

ثابت می‌شود.

۶۲۵. نامساوی به‌ازای $n=2$ صحیح است، زیرا:

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 2x$$

فرض می‌کنیم نامساوی برای n صحیح باشد، در اینصورت داریم:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) > (1+nx)(1+x) = \\ = 1 + (n+1)x + nx^2 > 1 + (n+1)x$$

نامساوی $(1+x)^n > 1+nx$ بشرطی هم ارز با نامساوی

یعنی $(1+x)^n(1+x) > (1+nx)(1+x)$ است که $1+x > 0$

$x > -1$ باشد. بنابراین صحت نامساوی به ازای $x > -1$ ثابت شد.

۶۲۶. ابتدا ثابت می‌کنیم:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$$

نامساوی به ازای $n=2$ واضح است. اگر نامساوی برای $n > 2$ صحیح باشد،

داریم:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

بنابراین باید ثابت کنیم: $2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}$. این نامساوی

با ضرب دو طرف آن در مقدار مثبت $\sqrt{n+1}$ چنین می‌شود:

$$2\sqrt{n(n+1)} + 1 < 2(n+1) \Rightarrow 2\sqrt{n(n+1)} < 2n+1$$

که با مجذور کردن دو طرف آن به نامساوی واضح زیر می‌رسیم:

$$4n^2 + 4n < 4n^2 + 4n + 1$$

حالا طرف دیگر نامساوی را ثابت می‌کنیم. باید ثابت کنیم:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

نامساوی برای $n=2$ صحیح است. فرض می‌کنیم نامساوی برای $n > 2$ صحیح

باشد، در اینصورت داریم:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

بنابراین باید ثابت کنیم:

$$\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1} \Rightarrow \sqrt{n(n+1)} + 1 > n+1 \Rightarrow \sqrt{n(n+1)} > n$$

که از آنجا به نامساوی واضح زیر می‌رسیم: $n^2 + n > n^2$:
۶۲۷. نامساوی به ازای $n=2$ واضح است، زیرا:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} = \frac{14}{24} > \frac{13}{24}$$

فرض می‌کنیم نامساوی برای $n=k$ صحیح باشد، یعنی:

$$S_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24}$$

در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{2(k+1)} = \\ &= \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k} \right) + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2(k+1)} - \\ &\quad - \frac{1}{k+1} = S_k + \frac{1}{2(k+1)(2k+1)} > \frac{13}{24} \end{aligned}$$

۶۲۸. مسأله ۴۲۹ را ببینید:

۶۲۹. برای $n=3$ نامساوی واضح است. فرض می‌کنیم نامساوی برای $n \geq 3$ درست باشد، در این صورت برای $n+1$ داریم:

$$\frac{1}{2} \frac{1}{(n+1)n} - \frac{1}{2} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{2} \times 2^n > n! \times 2^n > n!(n+1) = (n+1)!$$

(در قسمت اول مسأله ۶۲۴ ثابت کردیم که برای $n \geq 3$ داریم:

$$2^n > 2n+1 \text{ و بطور بدیهی } 2^n > n+1$$

۶۳۰. ابتدا ثابت می‌کنیم:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} > \frac{n}{2} \quad (1)$$

روش اول. نامساوی (۱) به ازای $n=1$ به صورت $1 > \frac{1}{2}$ درمی آید،

یعنی برای $n=1$ این نامساوی صحیح است. حالا فرض می کنیم :

$$S_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}} > \frac{k}{2}$$

و ثابت می کنیم:

$$S_{k+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}-1} > \frac{k+1}{2}$$

داریم :

$$S_{k+1} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}}\right) + \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}-1}\right) = S_k + A$$

عبارت A عبارتست از مجموع 2^k کسر که هر کدام از آنها از $\frac{1}{2^{k+1}}$

بزرگتر است. بنابراین:

$$A > \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}} = 2^k \cdot \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}$$

به این ترتیب: $S_k > \frac{k}{2}$ و $A > \frac{1}{2}$ ، بنابراین :

$$S_{k+1} = S_k + A > \frac{k+1}{2}$$

روش دوم. داریم:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n-1} &= 1 + \frac{1}{2} + \\ &+ \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \\ &+ \left(\frac{1}{2^{n-1}-1} + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) - \frac{1}{2^n} > 1 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \dots + \\
 & + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2^n} = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) + n \times \frac{1}{2} > \frac{n}{2}
 \end{aligned}$$

حالا ثابت می‌کنیم:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} < n \quad (2)$$

روش اول. نامساوی (۲) به ازای $n=2$ به صورت زیر در می‌آید:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 2 \Rightarrow 1\frac{5}{6} < 2$$

و بنابراین برای $n=2$ صحیح است (برای $n=1$ نامساوی (۲) به تساوی تبدیل می‌شود). فرض می‌کنیم: $S_k > k$ و ثابت می‌کنیم:

$$S_{k+1} = S_k + \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}-1}\right) > k+1 \quad (3)$$

داخل پرانتز در نامساوی (۳) شامل 2^k جمله است که مخرج جمله اول آن مساوی 2^k و مخرج بقیه جمله‌ها از 2^k بزرگترند، بنابراین:

$$\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}-1} <$$

$$< \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{2^k} = 2^k \times \frac{1}{2^k} = 1$$

$$S_{k+1} < S_k + 1 = k+1$$

و بنابراین:

روش دوم. داریم:

$$\begin{aligned}
 S_n &= 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \dots + \\
 &+ \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n-1}\right) < \\
 &< 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = n
 \end{aligned}$$

۶۳۱. راهنمایی. باید ثابت کرد که دنباله

$$\sqrt{c}, \sqrt{c+\sqrt{c}}, \sqrt{c+\sqrt{c+\sqrt{c}}}, \dots$$

وقتی تعداد جمله‌ها بی‌نهایت باشد، حدی مساوی $\frac{1+\sqrt{4c+1}}{2}$ دارد و

برای این منظور اگر جمله n ام را a_n بگیریم توجه داشته باشید که

$$a_{n+1} = \sqrt{c+a_n}$$

۶۲۲. نامساوی به ازای $n=2$ به صورت $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ در می‌آید که واضح است.

فرض می‌کنیم: $\frac{4^k}{k+1} < \frac{(2k)!}{(k!)^2}$ و ثابت می‌کنیم: $\frac{4^{k+1}}{k+2} < \frac{(2k+2)!}{[(k+1)!]^2}$

داریم:

$$\begin{aligned} \frac{4^{k+1}}{k+2} &= \frac{4^k \times 4}{(k+1) \frac{k+2}{k+1}} = \frac{4^k}{k+1} \times \\ &\times \frac{4(k+1)}{k+2} < \frac{(2k)!}{(k!)^2} \cdot \frac{4(k+1)}{k+2} \end{aligned} \quad (1)$$

از طرف دیگر ثابت می‌کنیم:

$$\frac{4(k+1)}{k+2} < \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2} \quad (2)$$

نامساوی (۲) بعد از ساده کردن به اینصورت در می‌آید:

$$\frac{2(k+1)}{k+2} < \frac{2k+1}{k+1} \Rightarrow 2(k+1)^2 < (2k+1)(k+2)$$

که از آنجا به نامساوی واضح $4 < 5$ می‌رسیم. بنابراین نامساوی (۱) چنین می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{4^{k+1}}{k+2} &< \frac{(2k)!}{(k!)^2} \cdot \frac{4(k+1)}{k+2} < \\ &< \frac{(2k)!}{(k!)^2} \cdot \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2} = \frac{[2(k+1)]!}{[(k+1)!]^2} \end{aligned}$$

۶۲۳. نامساوی حکم به ازای $n=1$ به تساوی $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ و به ازای $n=2$

به نامساوی درست $\frac{3}{8} < \frac{1}{\sqrt{7}}$ درمی‌آید. حاصلضرب سمت چپ نامساوی حکم

را P_n می‌گیریم و فرض می‌کنیم داشته باشیم: $P_n < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$. ثابت

می‌کنیم: $P_{n+1} < \frac{1}{\sqrt{3(n+1)+1}}$. داریم:

$$P_{n+1} = P_n \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)}$$

بنابراین باید ثابت کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt{3n+1}} \cdot \frac{2n+1}{2(n+1)} < \frac{1}{\sqrt{3n+4}} < \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}}$$

دو طرف نامساوی را در مقدار مثبت $\sqrt{n+1}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{2n+1}{2\sqrt{(3n+1)(n+1)}} < \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(2n+1)^2 < 4(3n+1)(n+1)$$

که از آنجا به نامساوی واضح $4n+1 > 0$ می‌رسیم.

۶۳۴. در تساوی $y-x = \sqrt{y^2 + 2(x+1)y + 4x}$ روشن است که باید

$y-x \geq 0$ باشد. اگر دو طرف این تساوی را مجذور کنیم و y را نسبت به x بدست آوریم، می‌شود:

$$y = \frac{x^2 - 4x}{2(2x+1)} \Rightarrow y-x = -\frac{3x(x+2)}{2(2x+1)}$$

و چون مقدار اخیر باید غیرمنفی باشد:

$$-\frac{3x(x+2)}{2(2x+1)} \geq 0 \Rightarrow x \leq -2 \text{ یا } -\frac{1}{2} \leq x < 0$$

۶۳۵. $x^2 - x + 1$ همیشه مثبت است، بنابراین نامساوی را می‌توان بعد از

عملهای ساده اینطور نوشت:

$$x(x-1)(x^2+3)+3 > 0 \quad (1)$$

درحالتی که $x(x-1)$ غیرمنفی، یعنی $x < 0$ یا $x > 1$ باشد، صحت نامساوی

(۱) واضح است. در حالتی که $0 < x < 1$ باشد، معلوم است که حداقل عبارت:

$$x(x-1) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

مساوی $-\frac{1}{4}$ است و اگر این حداقل را بجای $x(x-1)$ قرار دهیم به نا-

مساوی $0 < -\frac{x^2+3}{4} + 3$ می‌رسیم که صحت آن در فاصله $(0, 1)$ به سادگی روشن می‌شود.

۶۳۶. نامساوی پس از ساده کردن به صورت $0 < \frac{x^2}{x^2+x+1}$ در می‌آید

که صحت آن برای $x \neq 0$ واضح است و در حالت $x=0$ به تساوی تبدیل می‌شود. ۶۳۷. نامساوی حکم به سادگی به صورت زیر در می‌آید:

$$\left(\frac{a}{2} - b\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - c\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - d\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - e\right)^2 > 0$$

که واضح است. حالت تساوی برای موقعی است که داشته باشیم:

$$\frac{a}{2} = b = c = d = e$$

۶۳۸. از نامساوی مربوط به واسطه‌های عددی و هندسی برای γ عدد غیر منفی استفاده می‌کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} \gamma^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha &= \gamma^2 \cdot 2^2 \cdot 5^5 \left(\frac{\sin^2 \alpha}{2}\right)^2 \left(\frac{\cos^2 \alpha}{5}\right)^5 < \\ < \gamma^2 \cdot 2^2 \cdot 5^5 \left(\frac{2 \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{2} + 5 \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{5}}{\gamma}\right)^7 = \\ &= \gamma^2 \cdot 2^2 \cdot 5^5 \cdot \frac{1}{\gamma^7} = 2^2 \cdot 5^5 = 12500 \end{aligned}$$

حالت تساوی برای وقتی است که داشته باشیم:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{2} = \frac{\cos^2 \alpha}{5} \Rightarrow \alpha = \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{2}{5}}$$

۶۳۹. داریم: $(a_i - b_i)^2 > 0$ و از آنجا:

$$a_i^2 - 2a_i b_i + b_i^2 > 0$$

$$\frac{a_i^2}{b_i} - 2a_i + b_i > 0 \quad \text{و چون } b_i > 0, \text{ بنابراین:}$$

$$\frac{a_i^2}{b_i} > 2a_i - b_i \quad \text{و یا:}$$

که در آن $i = 1, 2, \dots, n$ از آنجا:

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{b_i} > 2 \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n b_i = 2 \times 1 - 1 = 1$$

۶۴۰. برای اینکه $4ab + 22a + 47b$ بر $a^2 + 7b^2 + 11$ قابل قسمت باشد، لازم است که داشته باشیم:

$$4ab + 22a + 47b > a^2 + 7b^2 + 11$$

$$a^2 - 2(2b + 11)a + 7b^2 - 47b + 11 \leq 0 \quad \text{و یا}$$

برای اینکه این عبارت درجه دوم نسبت به a مثبت نباشد، باید دارای دو ریشه حقیقی باشد و مقدار a هم بین این دو ریشه حقیقی قرار گیرد. ریشه‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$a = 2b + 11 \pm \sqrt{-3b^2 + 91b - 690} \quad (۱)$$

برای حقیقی بودن ریشه‌ها باید داشته باشیم:

$$-3b^2 + 91b - 690 \geq 0 \Rightarrow 15 \leq b \leq 15\frac{1}{3}$$

ولی b عددی است طبیعی و بنابراین $b = 15$ و از (۱) بدست می‌آید:

$$a = 41$$

اگر این مقادیر $a = 41$ و $b = 15$ را در عبارتهای مفروض قرار دهیم، می‌بینیم که در شرط مسأله صدق می‌کنند.

۶۴۱. ضلعهای مثلث را a, b, c و زاویه‌های روبروی به این ضلعها را A, B و C می‌نامیم.

برای اینکه زاویه‌ها به تصاعد حسابی باشند، باید داشته باشیم:

$$2B = A + C \Rightarrow 2B = \pi - B \Rightarrow B = \frac{\pi}{3}$$

و برای اینکه ضلعها به تصاعد حسابی باشند:

$$2b = a + c \Rightarrow 2 \sin B = \sin A + \sin C$$

که پس از تبدیلهای ساده خواهیم داشت:

$$\cos \frac{A-C}{2} = 1 \Rightarrow A = C$$

بنابراین تنها مثلث متساوی الاضلاع دارای خاصیت مورد نظر است.

۰۶۴۲. (اول) ۱۱ را جمله اول، ۴۴ را جمله p ام و ۷۰۴ را جمله q ام يك تصاعد حسابی می گیریم، اگر قدر نسبت این تصاعد d باشد، باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} 704 = 11 + (q-1)d \\ 44 = 11 + (p-1)d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (q-1)d = 693 \\ (p-1)d = 33 \end{cases}$$

از تقسیم این دو رابطه بر یکدیگر بدست می آید:

$$\frac{q-1}{p-1} = 21 \Rightarrow q = 21p - 20 \quad (p > 1) \quad (1)$$

از رابطه (۱) مقادیر صحیح p و q و از آنجا d بدست می آید. مثلاً به ازای $p=2$ داریم $q=22$ و $d=33$ ، یعنی ۱۱ و ۴۴ و ۷۰۴ می توانند جمله های اول، دوم و بیست و دوم از يك تصاعد حسابی به قدر نسبت ۳۳ باشند و غیره.

ثانیاً) ۱۱ را جمله اول، ۴۴ را جمله p ام و ۷۰۴ را جمله q ام يك تصاعد هندسی یا قدر نسبت r می گیریم، خواهیم داشت:

$$11r^{p-1} = 44; \quad 11r^{q-1} = 704$$

$$\begin{cases} r^{p-1} = 4 = 2^2 = 4^1 \\ r^{q-1} = 64 = 2^6 = 4^3 \end{cases} \quad \text{و یا:}$$

بنابراین r مساوی ۲ یا ۴ است که در حالت اول $p=3$ و $q=7$ و در حالت دوم $p=2$ و $q=4$ می شود.

۶۴۳. مجموع n جملهٔ تصاعد حسابی چنین است:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] = \frac{1}{2}dn^2 + \frac{1}{2}(2a-d)n$$

و بنابراین باید داشته باشیم:

$$\frac{1}{2}dn^2 + \frac{1}{2}(2a-d)n \equiv 2n^2 + n ;$$

$$\frac{1}{2}d = 2 ; \frac{1}{2}(2a-d) = 1 \Rightarrow d = 4 ; a = 5$$

۶۴۴. عدد زیر ۱۲ را x فرض می‌کنیم، با توجه به خاصیت تصاعد هندسی،

عدد زیر آن مساوی $\frac{x^2}{12}$ خواهد شد و در نتیجه (با توجه به اینکه عدد بعد از

$\frac{x^2}{12}$ مساوی ۸۱ است)، عدد قبل از آن مساوی $\frac{x^4}{144 \times 81}$ می‌شود و سپس

عدد روی آن باید مساوی $\frac{x^8}{144^2 \times 81^2 \times 2}$ می‌شود و باید داشته باشیم:

$$144x = \frac{x^{16}}{144^2 \times 81^2 \times 2^2}$$

و از آنجا بدست می‌آید:

$$x^{15} = 144^2 \times 81^2 \times 2^2 = 2^{28} \times 3^{16} \times 2^2 = 2^{30} \times 3^{16} ;$$

$$x = 2^2 \times 3^2 = 36$$

جواب:

۱۰۸	۳۶	۱۲	۴
۱۴۴	۷۲	۳۶	۱۸
۱۹۲	۱۴۴	۱۰۸	۸۱
۲۵۶	۲۸۸	۳۲۴	۷۲۹
			۲

۶۴۵. داریم:

$$\frac{1}{a_{n-1}a_n} = \frac{a_n - a_{n-1} - d + 1}{a_{n-1}a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} + \frac{1-d}{a_{n-1}a_n}$$

و بنابراین خواهیم داشت (مجموع مطلوب را S می گیریم):

$$\begin{array}{r} \frac{1}{a_1a_2} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1-d}{a_1a_2} \\ \frac{1}{a_2a_3} = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \frac{1-d}{a_2a_3} \\ + \frac{1}{a_3a_4} = \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} + \frac{1-d}{a_3a_4} \\ \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} + \frac{1-d}{a_{n-1}a_n} \end{array}$$

$$S = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} + (1-d)S$$

و از آنجا:

$$dS = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n - a_1}{a_1a_n} = \frac{(n-1)d}{a_1a_n} \Rightarrow S = \frac{n-1}{a_1a_n}$$

۶۴۶ داریم:

$$\frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}}} = \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}}{a_n - a_{n-1}} = \frac{1}{d} (\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}})$$

و از آنجا خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{d} (\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}) + \frac{1}{d} (\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}) + \\ &+ \frac{1}{d} (\sqrt{a_4} - \sqrt{a_3}) + \dots + \frac{1}{d} (\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}) = \\ &= \frac{1}{d} (\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1}) = \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1}}{a_n - a_{n-1}} \end{aligned}$$

۶۴۷. به جای S ها مقادیرشان را قرار دهید، صحت رابطه ثابت می شود.

۶۴۸. اگر S_n مجموع n جمله از تصاعد باشد، طبق فرض باید داشته باشیم:

$$S_5 = \frac{1}{4}(S_{10} - S_5) \Rightarrow 5S_5 = S_{10}$$

از طرف دیگر داریم:

$$S_5 = \frac{5}{2}(2 + 4d) ; S_{10} = 5(2 + 9d) ;$$

$$\frac{25}{2}(2 + 4d) = 5(2 + 9d) \Rightarrow d = -3$$

جواب: قدرنسبت تصاعد مطلوب مساوی ۳- است.

۶۴۹. هر يك از عددهای مطلوب بصورت $7k + 3$ هستند و برای اینکه دو رقمی باشند، باید داشته باشیم:

$$10 \leq 7k + 3 < 100 \Rightarrow 1 < k \leq 13$$

و بنابراین باید مجموع ۱۳ جمله از يك تصاعد حسابی با جمله اول ۱۰ و قدرنسبت ۷ را بدست آوریم.

جواب: $S = 676$

۶۵۰. مجموع داخل کروشه، مجموع بی‌نهایت جمله از يك تصاعد هندسی نزولی با جمله اول $\sqrt{3}(\sqrt{3} - 2)$ و قدرنسبت $\frac{1}{\sqrt{3}}$ است.

جواب: $-6(\sqrt{3} + 1)$

۶۵۱. جواب: $a = 12$ (جمله اول) و $q = \frac{1}{2}$ (قدرنسبت).

۶۵۲. اگر سه عدد را a و b و c فرض کنیم، طبق فرض مسأله داریم:

$$\begin{cases} a + b + c = 26 \\ ac = b^2 \\ a - 2b + c = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 6 \\ c = 18 \end{cases}$$

۶۵۳. اگر ضلع کوچکتر مثلث را a و قدرنسبت را q فرض کنیم، $q > 1$ خواهد شد و داریم:

$$aq^2 < aq + a \Rightarrow q^2 - q - 1 < 0$$

که با توجه به شرط $q > 1$ بدست می‌آید: $1 < q < \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$

به همین ترتیب اگر ضلع بزرگتر را c و قدر نسبت را q فرض کنیم، $q < 1$ خواهد شد و بدست می آید:

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} < q < 1$$

$$\text{جواب: } \frac{\sqrt{5}-1}{2} < q < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

۶۵۴. برای اینکه سه عدد a و b و c هم به تصاعد حسابی و هم به تصاعد هندسی باشند، باید داشته باشیم:

$$a+c=2b \quad ; \quad a \cdot c = b^2$$

و از آنجا مقادیر a و b باید جوابهای معادله درجه دوم زیر باشند:

$$t^2 - 2bt + b^2 = 0 \Rightarrow t' = t'' = b$$

یعنی باید داشته باشیم $a=b=c$ و تنها در این حالت است که سه عدد a و b و c هم به تصاعد حسابی و هم به تصاعد هندسی هستند.

۶۵۵. داریم:

$$\begin{aligned} \underbrace{11\dots1}_k \underbrace{55\dots5}_{k-1} &= \underbrace{11\dots1}_{2k} + \underbrace{44\dots4}_k + 1 = \\ &= (10^{2k-1} + 10^{2k-2} + \dots + 10 + 1) + \\ &+ 4(10^{k-1} + 10^{k-2} + \dots + 10 + 1) + 1 = \frac{10^{2k}-1}{10-1} + \\ &+ 4 \times \frac{10^k-1}{10-1} + 1 = \frac{1}{9}(10^{2k}-1 + 4 \times 10^k - 4 + 9) = \\ &= \frac{1}{9}(10^{2k} + 2 \times 10^k \times 2 + 2^2) = \\ &= \left(\frac{10^k + 2}{3} \right)^2 = \left(\frac{10^k - 1}{3} + 1 \right)^2 = \\ &= \left[\frac{3(10^k - 1)}{9} + 1 \right]^2 = \left[\frac{3(10^k - 1)}{10 - 1} + 1 \right]^2 = \\ &= [3(10^{k-1} + 10^{k-2} + \dots + 10 + 1) + 1]^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (3 \times 10^{k-1} + 3 \times 10^{k-2} + \dots + 3 \times 10 + 3)^2 = \\
 &= \underbrace{33 \dots 3}_{k-1} 4^2
 \end{aligned}$$

۶۵۶. اگر a_n را جمله اول تصاعد در نظر بگیریم، جمله a_{m+n} جمله $(m+1)$ ام تصاعد می‌شود و داریم:

$$a_{m+n} = a_n + md$$

همچنین اگر a_m را جمله اول تصاعد فرض کنیم، جمله a_{m+n} جمله $(n+1)$ ام تصاعد می‌شود و داریم:

$$a_{m+n} = a_m + nd$$

و بالاخره اگر a_{m-n} را جمله اول تصاعد بگیریم، جمله a_{m+n} جمله $(2n+1)$ ام تصاعد می‌شود و داریم:

$$a_{m+n} = a_{m-n} + 2nd$$

در هر سه تساوی d را قدرنسبت تصاعد گرفتیم. از این سه معادله بدست می‌آید:

$$a_m = a_{m+n} - nd = A - nd; \quad a_n = a_{m+n} - md = A - md;$$

$$d = \frac{a_{m+n} - a_{m-n}}{2n} = \frac{A - B}{2n}$$

که اگر مقدار d را در دو تساوی اول قرار دهیم، بدست می‌آید:

$$a_m = A - n \times \frac{A - B}{2n} = A - \frac{A - B}{2} = \frac{A + B}{2};$$

$$a_n = A - m \times \frac{A - B}{2n} = \frac{2nA - mA + mB}{2n} =$$

$$= \frac{(2n - m)A + mB}{2n}$$

۶۵۷. اگر q را قدرنسبت تصاعد بگیریم و شبیه تمرین قبل عمل کنیم، به تساویهای زیر می‌رسیم:

$$a_{m+n} = a_m \cdot q^n \Rightarrow a_m = A \cdot q^{-n};$$

$$a_{m+n} = a_n \cdot q^m \Rightarrow a_n = A \cdot q^{-m};$$

$$a_{m+n} = a_{m-n} \cdot q^{2n} \Rightarrow A = B \cdot q^{2n}$$

$$q = \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{2n}} \text{ از رابطه اخیر بدست می آید:}$$

و از آنجا مقادیر a_m و a_n بدست می آید:

$$a_m = A \cdot \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{-m}{2n}} = A \cdot \left(\frac{A}{B}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{A \cdot B} ; a_n = A \cdot \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{-m}{2n}}$$

۶۵۸. اگر a را جمله اول و q را قدرنسبت تصاعد فرض کنیم، داریم:

$$b = a \cdot q ; c = a \cdot q^2 ; d = a \cdot q^3$$

با استفاده از این رابطه‌ها خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} (b-c)^2 + (c-a)^2 + (d-b)^2 &= (aq - aq^2)^2 + \\ &+ (aq^2 - a)^2 + (aq^3 - aq)^2 = \\ &= a^2(1-q)^2[q^2 + (q+1)^2 + q^2(q+1)^2] = \\ &= a^2(1-q)^2[q^2 + 2q(1+q^2) + (1+q^2)^2] = a^2(1-q)^2 \times \\ &\times (q^2 + q + 1)^2 = a^2(1-q^3)^2 = (a - aq^3)^2 = (a - d)^2 \end{aligned}$$

۶۵۹. جواب: $a=1$, $b=2$, $d=3$, $l=2$ و $f(x)$ به صورت زیر در می آید:

$$f(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2)$$

و در نتیجه چهار ریشه $f(x) = 0$ موهومی است.

۶۶۰. اگر قدرنسبت تصاعد را k فرض کنیم، داریم:

$$b = a + k ; c = a + 2k ; d = a + 3k$$

و بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} abcd + (b-c)^2 &= a(a+k)(a+2k)(a+3k) + k^2 = \\ &= a^4 + 6a^2k + 11a^2k^2 + 6ak^3 + k^4 = (a^2 + 3ak + k^2)^2 \end{aligned}$$

۶۶۱. بطور کلی در معادله دو مجذوری $ax^2 + bx^2 + c = 0$ وقتی ریشه‌ها

به تصاعد حسابی هستند که در معادله حلال آن $ay^2 + by + c = 0$ یکی از ریشه‌ها به برابر ریشه دیگر باشد، زیرا اگر ریشه‌های معادله دو مجذوری را $\pm x''$ و $\pm x'$ و $|x'| > |x''|$ فرض کنیم، برای اینکه عددهای

$-x''$, $-x'$, x'' و x' به تصاعد حسابی باشند باید داشته باشیم:

$$2x'' = x' \Rightarrow 9x''^2 = x'^2 \Rightarrow y' = 9y''$$

به این ترتیب در مورد معادله مفروض مسئله داریم:

$$\begin{cases} y' + y'' = \frac{2(2m+1)}{3} \\ y' \cdot y'' = \frac{m+1}{3} \\ y' = 9y'' \end{cases} \Rightarrow m=2 \text{ و } -\frac{11}{2}$$

که به ازای $m=2$ چهار ریشه حقیقی و به ازای $m=-\frac{11}{2}$ چهارریشه

موهومی خواهیم داشت که در هر حال به تصاعد حسابی هستند.

۶۶۲. اگر جمله اول تصاعد را α و قدرنسبت آنرا q فرض کنیم، داریم:

$$a = \alpha \cdot q^{m-1} ; b = \alpha \cdot q^{n-1} ; c = \alpha \cdot q^{p-1}$$

که اگر در رابطه حکم قرار دهیم، صحت آن به سادگی ثابت می شود.

۶۶۳. (۱) قدرنسبت تصاعد را d فرض می کنیم، در اینصورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} a_{n-1} \cdot a_n &= [a_1 + (n-2)d] \cdot [a_1 + (n-1)d] = \\ &= a_1^2 - 2da_1 + 2nda_1 + (n-2)(n-1)d^2 \end{aligned}$$

در دوطرف این تساوی n را از ۲ تا n می گیریم:

$$\begin{aligned} + \begin{cases} a_1 \cdot a_2 = a_1^2 - 2da_1 + 2da_1 \\ a_2 \cdot a_3 = a_1^2 - 2da_1 + 4da_1 + 1 \times 2d^2 \\ a_3 \cdot a_4 = a_1^2 - 2da_1 + 6da_1 + 2 \times 2d^2 \\ \dots \\ a_{n-1} \cdot a_n = a_1^2 - 2da_1 + 2nda_1 + (n-2)(n-1)d^2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_1 &= (n-1)a_1^2 - 2(n-1)da_1 + 2(2+3+4+\dots+n)da_1 + \\ &+ [1 \times 2 + 2 \times 2 + 2 \times 4 + \dots + (n-2)(n-1)]d^2 = \\ &= (n-1)a_1^2 - 2(n-1)da_1 + (n-1)(n+2)da_1 + \\ &+ \frac{1}{3}n(n-1)(n-2)d^2 \end{aligned}$$

$$S_1 = \frac{n-1}{3} [3a_1^2 + 2(n-1)da_1 + n(n-2)d^2] : \text{ جواب}$$

(۲) مسأله ۶۴۵ را ببینید.

(۳) اگر شبیه حالت اول عمل کنیم ، بدست می آید:

$$S_r = \frac{n}{6} [6a_1^2 + 6(n-1)a_1d + (n-1)(2n-1)d^2]$$

(۴) جواب :

$$S_r = \frac{n}{6} [6a_1^2 + 6(n-1)a_1d + 2(n-1)(2n-1)d^2a_1 + n(n-1)d^2]$$

۶۴۴. باید داشته باشیم:

$$2 \log(2^x - 2) = \log 2 + \log(2^x + 2) ;$$

$$(2^x - 2)^2 = 2(2^x + 2) \Rightarrow 2^x = 0 \text{ و } 6$$

جواب صفر برای 2^x قابل قبول نیست ، زیرا در اینصورت $\log(2^x - 2)$ مفهوم خود را از دست می دهد.

$$2^x = 6 \Rightarrow x \log 2 = \log 6 \Rightarrow x = 1 + \frac{\log 3}{\log 2}$$

۶۴۵. بنابر فرض مسأله داریم:

$$b^x = a \cdot c \Rightarrow 2 \log b = \log a + \log c \quad (1)$$

دوطرف رابطه (۱) را بر $\log x$ تقسیم می کنیم:

$$2 \frac{\log b}{\log x} = \frac{\log a}{\log x} + \frac{\log c}{\log x}$$

که با توجه بد رابطه واضح $\frac{\log \alpha}{\log \beta} = \log_{\beta} \alpha$ خواهیم داشت:

$$\frac{2}{\log b} = \frac{1}{\log a} + \frac{1}{\log c} \Rightarrow \frac{2}{\log_b x} = \frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_c x}$$

و به این ترتیب حکم ثابت می شود.

۶۴۶. برای اولاً داریم:

$$S_1 = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2 = 4(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots +$$

$$+n^2) = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$$

برای محاسبه مجموع مربعات عددهای فرد متوالی تا $(2n-1)$ ، ابتدا مجموع مربعات عددهای متوالی را تا $2n$ محاسبه می‌کنیم:

$$\sigma = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{n(2n+1)(4n+1)}{3}$$

مجموع مربعات عددهای فرد متوالی تا $(2n-1)$ ، تفاضل $\sigma - S_1$ است:

$$S_1 = \sigma - S_1 = \frac{n(2n+1)(4n+1)}{3} - \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} = \frac{n(4n^2-1)}{3}$$

۶۶۷. برای اینکه ریشه‌ها به تصاعد حسابی باشند، باید داشته باشیم:

$$2x_1 = x_1 + x_2 = (x_1 + x_2 + x_3) - x_3 = -\frac{b}{a} - x_3;$$

$$3x_1 = -\frac{b}{a} \Rightarrow x_1 = -\frac{b}{3a} \quad \text{و از آنجا:}$$

این مقدار x_1 باید در معادله صدق کند که از آنجا بدست می‌آید:

$$2b^3 + 27a^2b = 9abc$$

۶۶۸. اگر قدرنسبت تصاعد مربوط به a و b و c را d فرض کنیم، داریم:

$$b-a=c-b=d; \quad c-a=(c-b)+(b-a)=2d;$$

بنابراین باید ثابت کنیم:

$$\frac{f(b)-f(a)}{d} + \frac{f(c)-f(b)}{d} = 2 \times \frac{f(c)-f(a)}{2d}$$

که صحت آن با عملهای ساده روشن می‌شود. قسمت دوم هم به همین ترتیب ثابت می‌شود.

۶۶۹. q را قدرنسبت تصاعد می‌گیریم و بنابراین ضلعهای چهارضلعی به صورت

a, aq, aq^2, aq^3 درمی‌آید. در هر چهارضلعی ضلع بزرگتر از مجموع

سه ضلع دیگر کوچکتر است.

اگر $q > 1$ باشد، می‌نویسیم:

$$aq^2 < aq^2 + aq + a \Rightarrow q^2 < q^2 + q + 1$$

این نامساوی به سادگی به اینصورت درمی‌آید:

$$(q-2)(q^2+q)+(q-1) < 0$$

چون $q > 1$ است، به شرطی این نامساوی می‌تواند برقرار باشد که $q < 2$ باشد.

اگر $q < 1$ باشد، می‌نویسیم:

$$a < aq + aq^2 + aq^2 \Rightarrow 1 < q + q^2 + q^2$$

دو طرف این نامساوی را بر q^3 تقسیم می‌کنیم:

$$\left(\frac{1}{q}\right)^3 < \left(\frac{1}{q}\right)^2 + \left(\frac{1}{q}\right) + 1$$

که اگر $\frac{1}{q} = r$ فرض کنیم، به نامساوی $r^3 < r^2 + r + 1$ می‌رسیم که شبیه

حالت اول به نتیجه $r < 2$ می‌رسد (وقتی $q < 1$ باشد $r = \frac{1}{q} > 1$ می‌شود)،

بنابراین $\frac{1}{q} < 2$ یا $\frac{1}{q} > \frac{1}{2}$.

۶۷۰. معادله وقتی مفهوم دارد که $a > 0$ ، $a \neq 1$ ، $b > 0$ و $b \neq 1$ ، $c > 0$ ، $\log_a c > 0$ باشد. فرض می‌کنیم:

$$\log_a c = A ; \log_a x = y$$

معادله مفروض به صورت زیر در می‌آید:

$$A^{\frac{1}{\log_b y}} + A = (1 + A)y^{\log_b A}$$

به ازای $A \neq 1$ داریم:

$$\log_b y = \log_A y \cdot \log_b A ; \Rightarrow y = A^{\log_A y}$$

بنابراین معادله مفروض به صورت زیر در می‌آید:

$$A^{\frac{1}{\log_A y \cdot \log_b A}} + A = (1 + A) \cdot y^{\log_b A}$$

$$y^{\log_b A} + A = (1 + A) \cdot y^{\log_b A} \quad \text{و یا:}$$

به این ترتیب معادله، به صورت معادله درجه دوم زیر تبدیل می‌شود:

$$z^2 - (1 + A)z + A = 0 \quad (z = y^{\log_b A})$$

$$z_2 = A, \quad z_1 = 1 \quad \text{که از آنجا بدست می‌آید:}$$

$$y_2 = b, \quad y_1 = 1 \quad \text{یا:}$$

$$x_2 = a^2, \quad x_1 = a \quad \text{و از آنجا:}$$

در حالت خاصی که $A = 1$ ($a = c$) باشد، x باید مقدار مثبتی باشد،

$$0 < \log_a x < 1 \quad \text{بنابراین باید فرض کرد } 1 < x < a \quad \text{اگر } a > 1 \text{ باشد و } 0 < x < 1 \text{ اگر } 0 < a < 1 \text{ باشد.}$$

$$۰۶۷۱. \quad \text{باتوجه به تساویهای } \frac{۱۰ \times ۳^۲}{۲^۳} = \frac{۹۰}{۸} = \frac{۱۱۲۵}{۱۰۰} \quad \text{و } ۱۱/۲۵$$

$$۱۵ = \frac{۳۰}{۲} = \frac{۱۰ \times ۳}{۲} \quad \text{داریم:}$$

$$\log_{15} \sqrt[5]{11/25} = \frac{\frac{1}{5} \log 11/25}{\log 15} = \frac{\log \frac{10 \times 3^2}{2^3}}{\frac{\Delta \log \frac{10 \times 3^2}{2}}{5}} = \frac{2\alpha - 2\beta - 1}{5(\alpha - \beta - 1)}$$

$$\log_{12} 27 = \frac{\log 27}{\log 12} = \frac{3 \log 3}{2 \log 2 + \log 3} = \frac{3}{2 \frac{\log 2}{\log 3} + 1} = a \quad \text{داریم: } ۰۶۷۲$$

$$\frac{\log 3}{\log 2} = \frac{2a}{3 - a} \quad \text{و از آنجا بدست می‌آید:}$$

حالا می‌نویسیم:

$$\log_6 16 = \frac{\log 16}{\log 6} = \frac{4 \log 2}{\log 2 + \log 3} = \frac{4}{1 + \frac{\log 3}{\log 2}} =$$

$$= \frac{4}{1 + \frac{2a}{3-a}} = \frac{4(3-a)}{3+a}$$

۶۷۳. به ترتیب داریم:

$$\begin{aligned} \log 5 \log 20 + \log^2 2 &= \log 5 (\log 5 + 2 \log 2) + \log^2 2 = \log^2 5 + \\ &+ 2 \log 5 \cdot \log 2 + \log^2 2 = (\log 5 + \log 2)^2 = \log^2 10 = 1 \end{aligned}$$

۶۷۴. با توجه به رابطه واضح $10 \log a = a$ داریم:

$$\begin{aligned} 10 \times 100 \cdot \frac{1}{2} \log^2 9 - \log^2 2 &= 10 \times 10 \cdot \log^2 9 - 2 \log^2 2 = 10 \cdot \log^2 22/5 \\ &= 10 \cdot \log^2 22/5 = 22/5 \end{aligned}$$

۶۷۵. جواب: ۵

۶۷۶. جواب: ۲۰

۶۷۷. به ترتیب داریم:

$$x = 7^{2-2 \log_7 2} + \frac{1}{\Delta \log_5 4} = \frac{7^2}{7 \log_7 4} + \frac{1}{4} = \frac{49}{4} + \frac{1}{4} = \frac{25}{2}$$

۶۷۸. حاصل عبارت را x می گیریم، داریم:

$$\log x = \frac{\log(\log a)}{\log a} \cdot \log a = \log(\log a) \Rightarrow x = \log a$$

۶۷۹. از فرض مسأله بدست می آید:

$$\left(\frac{2a+3b}{\Delta} \right)^2 = ab$$

$$2 \log \frac{2a+3b}{\Delta} = \log a + \log b \quad \text{و از آنجا:}$$

۶۸۰. از تساوی $a^2 + b^2 = 7ab$ نتیجه می شود:

$$(a+b)^2 = 9ab \Rightarrow \left(\frac{a+b}{3} \right)^2 = ab$$

$$2 \log \frac{a+b}{3} = \log a + \log b \quad \text{و از آنجا:}$$

۶۸۱. اگر از دو طرف تساوی $a^2 = (c+b)(c-b)$ یکبار در مبنای $c+b$ و یکبار در مبنای $c-b$ لگاریتم بگیریم، بدست می آید:

$$\forall \log_{c+b} a = \setminus + \log_{c+b} (c-b) ; \forall \log_{c-b} a = \setminus + \log_{c-b} (c+b)$$

از ضرب این دو رابطه در یکدیگر بدست می آید:

$$\begin{aligned} \forall \log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a &= \\ &= 1 + \log_{c+b} (c-b) + \log_{c-b} (c+b) + \\ + \log_{c+b} (c-b) \log_{c-b} (c+b) &= \left[1 + \log_{c+b} (c-b) \right] + \\ + \left[1 + \log_{c-b} (c+b) \right] &= \forall \log_{c-b} a + \forall \log_{c+b} a \\ &: ٩٨٢ \text{ داريم} \end{aligned}$$

$$1) \quad a \cdot b \cdot c = \frac{\log c}{\log b} \cdot \frac{\log a}{\log c} \cdot \frac{\log b}{\log a} = 1$$

$$\begin{aligned} \gamma) \quad & \frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1} = \\ & = \frac{\log c}{\log a + \log b + \log c} + \frac{\log a}{\log a + \log b + \log c} + \\ & \quad + \frac{\log b}{\log a + \log b + \log c} = 1 \end{aligned}$$

۶۸۳. به ترتیب داریم:

$$\begin{aligned} x \cdot y \cdot z &= (\log_a b + \log_a c)(\log_b c + \log_b a)(\log_c a + \log_c b) = \\ &= 1 + \log_c a + \log_b c + \log_b a + \log_a b + \log_c b + \log_a c = \\ &= 1 + (\log_c a + \log_c b) + (\log_b a + \log_b c) + (\log_a b + \log_a c) = \\ &= 1 + \log_c (ab) + \log_b (ac) + \log_a (bc) = 1 + x + y + z \end{aligned}$$

۶۸۴. داریم:

$$\begin{aligned} \log(x+z) + \log(x-y+z) &= \log[(x+z)(x+z-y)] = \\ &= \log[(x+z)^2 - y(x+y+z)] \end{aligned}$$

و چون x و y و z به تصاعد توافق می‌هستند داریم.

$$xy + yz = yxz$$

و از آنجا عبارت فوق چنین می شود:

$$\log[(x+z)^2 - 4xz] = \log(x-z)^2 = 2\log(x-z)$$

۶۸۵. داریم:

$$\begin{aligned} S &= (\log \alpha - \log \beta)(\log \beta - \log \gamma) + (\log \beta - \log \gamma)(\log \gamma - \log \alpha) + \\ &+ (\log \gamma - \log \alpha)(\log \alpha - \log \beta) = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3) + \\ &+ (x_2 - x_3)(x_3 - x_1) + (x_3 - x_1)(x_1 - x_2) = (x_1 x_2 + x_2 x_3 + \\ &+ x_3 x_1) - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 2(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1) - \\ &- (x_1 + x_2 + x_3)^2 = \frac{9(ac - b^2)}{a^2} \end{aligned}$$

۶۸۶. داریم:

$$\begin{aligned} \log_4 \log_4 \log_4 X &= \log_4 1 \implies \log_4 \log_4 X = 1 = \log_4 3 \implies \\ \implies \log_4 X &= 3 \implies X = 8 \end{aligned}$$

۶۸۷. شبیه تمرین قبل به ترتیب داریم:

$$1 + \log_b [1 + \log_c (1 + \log_p X)] = 1 ;$$

$$\log_b [1 + \log_c (1 + \log_p X)] = 0 = \log_b 1 ;$$

$$1 + \log_c (1 + \log_p X) = 1 \implies \log_c (1 + \log_p X) = 0 ;$$

$$1 + \log_p X = 1 \implies \log_p X = 0 \implies X = 1$$

۶۸۸. مقدار داخل آکولاد مثبت است، زیرا مقدار منفی در مبنای ۴ لگاریتم

حقیقی ندارد، بنابراین معادله را می توان چنین نوشت:

$$2 \log_2 [1 + \log_2 (1 + 3 \log_2 X)] = \sqrt{4}$$

در اینجا هم باید مقدار مثبت $\sqrt{4}$ یعنی ۲ را انتخاب کرد، زیرا لگاریتم

عددهای بزرگتر از واحد مثبت است. ادامه کار مشکل نیست و جواب $x = 2$

بدست می آید.

۶۸۹. همه لگاریتمها را به مبنای ۲ می بریم، داریم:

$$\log_4 X = \frac{\log_2 X}{\log_2 4} = \frac{1}{2} \log_2 X ; \log_{16} X = \frac{1}{4} \log_2 X$$

و بنابراین معادله مفروض به صورت زیر در می آید:

$$\frac{1}{4} \log_2 X + \frac{1}{2} \log_2 X + \log_2 X = 7 \implies \log_2 X = 4$$

جواب: $x = 16$ ۶۹۰. جواب: $x = a$

۶۹۱. سمت چپ تساوی مجموع $x+1$ جمله از يك تصاعد هندسی است و برای حالت $a \neq 1$ داریم:

$$\frac{1 - a^{x+1}}{1 - a} = (1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4)(1 + a^8)$$

و یا:

$$1 - a^{x+1} = (1 - a)(1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4)(1 + a^8) = 1 - a^{16};$$

$$a^{x+1} = a^{16} \Rightarrow x+1 = 16 \Rightarrow x = 15$$

در حالت $a = 1$ ، تمام جمله‌های سمت چپ تساوی برابر ۱ و بنابراین مجموع آنها $x+1$ می‌شود و داریم:

$$x+1 = 2^4 = 16 \Rightarrow x = 15$$

جواب: $x = 15$

۶۹۲. معادله مفروض را می‌توان چنین نوشت:

$$5^{\log x} + 5^{\log x - 1} = 3^{\log x + 1} + 3^{\log x - 1};$$

$$5^{\log x} \left(1 + \frac{1}{5}\right) = 3^{\log x} \left(3 + \frac{1}{3}\right) \quad \text{یا:}$$

$$\frac{5^{\log x}}{3^{\log x}} = \frac{25}{9} \Rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{\log x} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \quad \text{یا:}$$

$$\log x = 2 \Rightarrow x = 100$$

۶۹۳. اگر فرض کنیم $\sqrt[x]{a} = u$ ، بدست می‌آید: $\sqrt[y]{a} = u^{\frac{x}{y}}$ و از آنجا:

$$\log_x \sqrt[y]{a} = \log_u u^{\frac{x}{y}} = \frac{x}{y}$$

$$\log_y \sqrt[x]{b} = \frac{y}{x} \quad \text{و شبیه آن:}$$

و بنابراین دستگاه مفروض به صورت زیر در می آید:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = a^2 \\ x + y = \frac{2a}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

که به سادگی به دستگاه زیر منجر می شود:

$$x + y = \frac{2a}{\sqrt{3}} ; xy = \frac{a^2}{3}$$

که تنها جواب آن چنین است:

$$x = y = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\left. \begin{matrix} x=4 \\ y=2 \end{matrix} \right\} \text{ جواب: } \left. \begin{matrix} x=1 \\ y=1 \end{matrix} \right\}$$

۶۹۵. دستگاه مفروض به دستگاه زیر تبدیل می شود:

$$x^2yz = 16 ; y^2xz = 81 ; z^2xy = 256$$

و از آنجا $xyz = 24$ بدست می آید (با توجه به مثبت بودن z و y و x).

$$\text{جواب: } z = \frac{32}{3} , y = \frac{27}{8} , x = \frac{2}{3}$$

۶۹۶. دستگاه به صورت زیر تبدیل می شود:

$$x(x+y) = 70 ; x^2 - y^2 = 40$$

و از آنجا با توجه به شرطهای $x+y > 0$ و $x-y > 0$ بدست می آید:

$$y = 3 \text{ و } x = 7$$

$$\text{جواب: } y = \sqrt{\frac{pq-1}{a \cdot b^p}} ; x = \sqrt{\frac{pq-1}{a^p \cdot b}}$$

۶۹۸. معادله مفروض را می توان چنین نوشت:

$$\frac{\log^2 x - 2 \left(1 + \log a - \left| \log \frac{x}{a} \right| \right)}{\log x} = 0$$

ریشه های این معادله ، همان ریشه های صورت کسر (به شرطی که مخالف واحد

باشند) می‌باشد. به این ترتیب باید معادله زیر را حل کنیم:

$$\log^2 x - 2 \left(1 + \log a - \left| \log \frac{x}{a} \right| \right) = 0$$

$$\log^2 x - 2 - 2 \log a + 2 |\log x - \log a| = 0 \quad (۱) \quad \text{و یا.}$$

حالت اول. $\log x \geq \log a$ ، در اینصورت معادله (۱) به معادله درجه

دوم زیر، نسبت به $\log x$ ، تبدیل می‌شود:

$$\log^2 x + 2 \log x - 2 - 4 \log a = 0 \quad (۲)$$

مبین این معادله $\Delta = 3 + 4 \log a$ است.

$$\log a \geq -\frac{3}{4} \quad \text{یعنی } \Delta \geq 0 \quad \text{وقتی حقیقی است که}$$

باشد.

$$\text{وقتی که } \log a = -\frac{3}{4} \text{ باشد، معادله (۲) دو ریشه مساوی } \log x = -1$$

دارد که در شرط $\log x \geq \log a$ صدق نمی‌کند و بنابراین به ازای $a = 10^{-\frac{3}{4}}$ معادله مفروض جوابی که در شرط $\log x \geq \log a$ صدق کند، ندارد.

$$\text{اگر } \log a > -\frac{3}{4} \text{ باشد، ریشه‌های معادله (۲) حقیقی و متمایزند،}$$

در اینصورت $\log x = \log a$ وقتی جواب معادله است که داشته باشیم:

$$\log^2 a - 2 \log a - 2 = 0 \implies \log a = 1 \pm \sqrt{3}$$

معادله مفروض به ازای $a = 10^{1 - \sqrt{3}}$ ریشه $x = 10^{1 - \sqrt{3}}$ و به

ازای $a = 10^{1 + \sqrt{3}}$ ریشه $x = 10^{1 + \sqrt{3}}$ خواهد داشت.

حالا فرض می‌کنیم $\log a > -\frac{3}{4}$ و $\log a \neq 1 \pm \sqrt{3}$ ، در اینصورت

(و تنها در اینصورت) معادله (۲) دارای ریشه‌های حقیقی و متمایز و مخالف با $\log a$ می‌باشد.

$$\text{معادله (۲) در حالت اول } \left(\log a \neq 1 \pm \sqrt{3} \text{ و } \log a > -\frac{3}{4} \right)$$

دارای دو ریشه بزرگتر از $\log a$ است وقتی که داشته باشیم:

$$\begin{cases} \log^2 a + 2\log a - 2 - 2\log a > 0 \\ 2\log a + 2 < 0 \end{cases}$$

نامساوی دوم شرط $\log a > -\frac{3}{4}$ را نقض می‌کند و بنابراین دو ریشه معادله نمی‌تواند از $\log a$ بزرگتر باشد.

معادله (۲) دارای دو ریشه، یکی بزرگتر از $\log a$ و دیگری کوچکتر از $\log a$ است، وقتی که داشته باشیم:

$$\log^2 a + 2\log a - 2 - 2\log a < 0$$

$$1 - \sqrt{3} < \log a < 1 + \sqrt{3} \quad \text{یعنی:}$$

و بنابراین ریشه معادله مفروض، ریشه بزرگتر معادله (۲) است:

$$\log x = -1 + \sqrt{3 + 4\log a} \Rightarrow x = 10^{-1 + \sqrt{3 + 4\log a}}$$

ولی چون $\log x \neq 1$ است و به ازای $\log x = -1 + \sqrt{3 + 4\log a} = 0$

داریم: $\log a = -\frac{1}{4}$ یعنی $a = \frac{1}{10}$ و این عدد در فاصله $1 - \sqrt{3}$ و

$1 + \sqrt{3}$ قرار دارد، جواب فوق وقتی قابل قبول است که داشته باشیم:

(۱) اگر x_1 و x_2 ریشه‌های حقیقی و متمایز معادله $x^2 + px + q = 0$

باشد، عدد λ وقتی از هر دو ریشه کوچکتر است که $\lambda^2 + p\lambda + q > 0$ و

$\lambda^2 + p\lambda + q < 0$ باشد. عدد λ بین دو ریشه است وقتی که $\lambda^2 + p\lambda + q < 0$ و

باشد و بالاخره λ از دو ریشه بزرگتر است. وقتی که $\lambda^2 + p\lambda + q > 0$ و

$\lambda^2 + p\lambda + q > 0$ باشد.

در حقیقت اگر $\lambda < x_1$ و $\lambda < x_2$ باشد، باید داشته باشیم: $\lambda - x_1 < 0$

و $\lambda - x_2 < 0$ یا: $(\lambda - x_1)(\lambda - x_2) > 0$ و $\lambda - x_1 + \lambda - x_2 < 0$

که از آنجا به دو نامساوی زیر می‌رسیم:

$$\lambda^2 + p\lambda + q > 0; \quad 2\lambda + p < 0$$

برای دو حالت دیگر هم می‌توان به همین ترتیب استدلال کرد.

$$1 - \sqrt{3} < a < \frac{1}{\sqrt{10}} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{\sqrt{10}} < a < 1 + \sqrt{3}$$

حالت دوم. $\log x < \log a$. در اینصورت معادله (۱) چنین می‌شود:

$$\log^2 x - 2 \log x - 2 = 0$$

$$\log x = 1 \pm \sqrt{3} \quad \text{و از آنجا:}$$

یعنی اگر $\log a \leq 1 - \sqrt{3}$ باشد، معادله مفروض جوابهایی که به ازای آنها $\log x < \log a$ باشد ندارد.

اگر $1 - \sqrt{3} < a \leq 1 + \sqrt{3}$ باشد، ریشه معادله $x = 10^{1 - \sqrt{3}}$

و اگر $\log a > 1 + \sqrt{3}$ باشد، ریشه معادله مفروض $x = 10^{1 - \sqrt{3}}$ و $x = 10^{1 + \sqrt{3}}$ خواهد بود.

۶۹۹. تابع $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ وقتی معین است که $x \geq 1$ باشد که در اینصورت $y > 0$ خواهد بود، ابتدا نامعادله $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} < 1$ را حل می‌کنیم، داریم:

$$\sqrt{x+1} < 1 + \sqrt{x-1} \Rightarrow 2\sqrt{x-1} > 1 \Rightarrow x > \frac{5}{4}$$

$$\begin{cases} 2(x-1) < 1 \\ x > 1 \end{cases} \quad \text{و حل نامعادله } \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} > 1 \text{ منجر به دستگاه}$$

می‌شود که از آنجا بدست می‌آید:

$$1 \leq x < \frac{5}{4}$$

و بالاخره از حل معادله $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = 1$ بدست می‌آید: $x = \frac{5}{4}$

(۱) اگر $1 \leq x < \frac{5}{4}$ باشد، نامعادله مفروض تنها وقتی برقرار است

که داشته باشیم:

$$x^2 - 3x + 1 > 1 \Rightarrow x^2 - 3x > 0$$

و چون $x \geq 1$ است، بدست می‌آید: $x \geq 3$

بنابراین نامعادله در فاصله نیم بسته $\frac{5}{۴} < x < ۱$ دارای جواب نیست.

(۲) اگر $x > \frac{5}{۴}$ باشد، نامعادله وقتی برقرار خواهد بود که داشته باشیم:

$$0 < x^2 - 3x + 1 < 1$$

که با توجه به شرط $x > \frac{5}{۴}$ به جوابهای زیر می‌رسیم:

$$\frac{3 + \sqrt{5}}{2} < x < 3$$

که جوابهای نامعادله می‌باشند.

۷۰۰. واضح است که معادله به ازای مقادیر منفی x جواب ندارد، زیرا

$\sin \frac{\pi}{y}$ و $\cos \frac{\pi}{y}$ مقادیری کوچکتر از واحدند و اگر x منفی باشد $\left(\sin \frac{\pi}{y}\right)^x$

و $\left(\cos \frac{\pi}{y}\right)^x$ هر دور از واحد بزرگتر می‌شوند

$x = 0$ هم در معادله صدق نمی‌کند. به این ترتیب $x > 0$ است.

$x = 2$ در معادله صدق می‌کند. اگر $0 < x < 2$ باشد داریم:

$$\left(\cos \frac{\pi}{y}\right)^x > \left(\cos \frac{\pi}{y}\right)^2 \text{ و } \left(\sin \frac{\pi}{y}\right)^x > \left(\sin \frac{\pi}{y}\right)^2$$

و اگر $x > 2$ باشد:

$$\left(\cos \frac{\pi}{y}\right)^x < \left(\cos \frac{\pi}{y}\right)^2 \text{ و } \left(\sin \frac{\pi}{y}\right)^x < \left(\sin \frac{\pi}{y}\right)^2$$

یعنی معادله جوابی غیر از $x = 2$ ندارد.

۷۰۱. شبیه تمرین قبل استدلال کنید. جواب: $x = 2$.

۷۰۲. جواب: $x = 1$

۷۰۳. جواب: $x = 2$

۷۰۴. جواب: $x = 1$

۷۰۵. جواب: $x = 1$

$$x = \frac{\pi}{p} : \text{جواب : } ۷۰۶$$

$$۷۰۷. \text{ دو طرف معادله را بر } ۳۶^x \text{ تقسیم کنید و } y = \left(\frac{4}{9}\right)^x \text{ بگیرید.}$$

$$x = \frac{1}{p} : \text{جواب:}$$

$$۷۰۸. \text{ دو طرف را بر } ۵^x \text{ تقسیم کنید و شبیه مسأله } ۷۰۰ \text{ حل کنید.}$$

$$x = ۲ : \text{جواب}$$

$$۷۰۹. \text{ جواب : } x = ۰$$

$$۷۱۰. \log_3 x = y \text{ می‌گیریم، در این صورت معادله به ترتیب چنین می‌شود:}$$

$$\log_2(1 + \sqrt{3}y) = y \Rightarrow 1 + (\sqrt{3})^y = 2^y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^y + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^y = 1$$

$$\text{که شبیه مسأله } ۷۰۰ \text{ حل می‌شود. جواب : } x = ۹$$

$$۷۱۱. x + 1 = -2z \text{ می‌گیریم، به ترتیب داریم:}$$

$$2^z + 6^z + 1 - \frac{6^z + 1}{2^z} - 1 = 0 ;$$

$$2^z - 1 + 6^z + 1 - 3^z + 1 \times 2^z + 1 = 0 ;$$

$$(2^z - 1)(2^z + 1) + 3^z + 1 \times 2^z + 1(2^z - 1) = 0 ;$$

$$(2^z - 1)(2^z + 1 + 6 \times 18^z) = 0$$

$$\text{و چون } 2^z + 6 \times 18^z + 1 \neq 0, \text{ بنابراین } 2^z - 1 = 0 \text{ و از آنجا}$$

$$x = -1 \text{ و } z = 0$$

$$۷۱۲. \text{ معادله مفروض را تبدیل می‌کنیم:}$$

$$2 \times 9^{\log_2 x - 1} = x^{\log_2 9 \cdot \log_2 x} - 2^{\log_2 x}$$

$$\frac{2}{9} \times 9^{\log_2 x} = 9^{\log_2 x} - 2^{\log_2 x}$$

$$\text{دو طرف این معادله را بر } 9^{\log_2 x} \text{ تقسیم می‌کنیم:}$$

$$2\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_2 x} = 9 - \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_2 x} \times 9$$

اگر $t = \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_2 x}$ بگیریم، بدست می‌آید:

$$2t^2 - 9t + 9 = 0 \Rightarrow t = 3, \frac{3}{2}$$

و از آنجا:

$$x_1 = 2, x_2 = 2^{\frac{1}{1 - \log_2 2}}$$

پایان

بعضی از ترجمه‌های نویسندۀ این کتاب

- | | |
|---|---|
| <p>۱۷. در پی فیثاغورث</p> <p>۱۸. مسائل مسابقات ریاضی (از -
کنکوره‌های شوروی)</p> <p>۱۹. دورۀ اختصاصی جبر مقدماتی</p> <p>۲۰. مثلثات (مستقیم‌الخط و کروی)</p> <p>۲۱. روشهای مثلثات (تألیف)</p> <p>۲۲. روشهای جبر (در دو جلد)
(تألیف)</p> <p>۲۳. نظریۀ مجموعه‌ها</p> <p>۲۴. نامساویها</p> <p>۲۵. اشتباه استدلالهای هندسی</p> <p>۲۶. انعکاس</p> <p>۲۷. ریاضیات در شرق</p> <p>۲۸. مسائل و تمرینهای آنالیز ریاضی</p> <p>۲۹. مسائل جبر برای سال چهارم
ریاضی (تألیف)</p> <p>۳۰. مسائل جبر برای سال پنجم
ریاضی (تألیف)</p> | <p>۱. ریاضیات؛ محتوی، روش و اهمیت
آن</p> <p>۲. تاریخ حساب</p> <p>۳. آنالیز ریاضی</p> <p>۴. هندسۀ غیر اقلیدسی</p> <p>۵. سرگرمیهای ریاضی</p> <p>۶. سرگرمیهای جبر</p> <p>۷. سرگرمیهای هندسه</p> <p>۸. اعداد اول</p> <p>۹. مثلثات</p> <p>۱۰. تقارن در هندسه و جبر</p> <p>۱۱. هندسه در گذشته و حال
(ترجمه و تألیف)</p> <p>۱۲. استقرار ریاضی</p> <p>۱۳. تقارن در جبر</p> <p>۱۴. لگاریتم</p> <p>۱۵. ۲۵۰ مسأله حساب</p> <p>۱۶. در قلمرو ریاضیات</p> |
|---|---|

بعضی از کتابهایی که با کمک دیگران تهیه شده است

- | | |
|---|--|
| <p>ریاضی</p> <p>۱۰. حل مسائل مثلثات برای ششم
ریاضی</p> <p>۱۱. حل مسائل حساب استدلالی
برای ششم ریاضی</p> <p>۱۲. حل مسائل هندسه و مخروطات
برای ششم ریاضی</p> <p>۱۳. حل مسائل هندسه ترسیمی برای
ششم ریاضی</p> <p>۱۴. حل مسائل هندسه رقومی برای
ششم ریاضی</p> <p>۱۵. تست ریاضیات</p> <p>۱۶. مسائل هندسه و راهنمای حل
آنها (برای داوطلبان کنکور)</p> | <p>۱. دورۀ پنج‌ساله ریاضیات ابتدایی</p> <p>۲. دورۀ سه‌ساله ریاضیات راهنمایی</p> <p>۳. نظریۀ اعداد</p> <p>۴. مسائل جبر و راهنمای حل آنها
(برای داوطلبان کنکور)</p> <p>۵. مسائل مثلثات و راهنمای حل
آنها (برای داوطلبان کنکور)</p> <p>۶. حل مسائل حساب برای چهارم
ریاضی</p> <p>۷. حل مسائل هندسه برای چهارم
ریاضی</p> <p>۸. حل مسائل مثلثات برای پنجم
ریاضی</p> <p>۹. حل مسائل هندسه برای پنجم</p> |
|---|--|

تقارن در هندسه و جبر
ترجمه: پرویز شهرباری

درونمایه گفتارهای کتاب حاضر را می‌باید به عنوان مدخلی برای ورود به تقارن برداشت کرد. سه مقاله‌ای که در این کتاب آمده از نشریه مشهور ریاضیات در دبیرستان چاپ اتحاد شوروی سالهای هزار و نهصد و شصت و سه و شصت و چهار برگردانده شده است. مترجم در گوشه‌ای از پیشگفتار می‌نویسد: «در باره تقارن مطالب بسیار می‌توان گفت و ابتدا نظر بر این بود که با توجه به یادداشتهای متعددی که در این زمینه فراهم آورده بودم، مشروح‌تر بحث شود ولی موقع تنظیم دریغ آمد که قالب این مقالات را بر هم بزنم، زیرا این مقالات به همین صورت خود می‌تواند مورد استفاده خاص دانش‌آموزان و دانشجویان واقع شود.»

۷۰۰ مسأله با حل کامل
تنظیم: باقر امامی، پرویز شهریاری، جواد حریرچی

مؤلفان کتاب، در توجیه و معرفی آن اینطور بیان داشته‌اند:
«چند سال قبل قریب به هفتصد مسأله در زمینه جبر و مثلثات، بدون
حل آنها از طرف مؤسسه انتشارات امیرکبیر منتشر شد و در دسترس علاقه‌مندان
قرار گرفت، این جزوه بزودی جای خود را باز کرد و مسائل آن مورد
بحث دانش‌آموزان و دانشجویان قرار گرفت و با وجودی که نسخه‌های
چاپی آن نایاب شد مسائل آن دست به دست می‌گشت و راه حل بعضی از آنها
حتی به مجلات علمی کشیده شد. مؤلفان احساس کردند که حل کامل این
مسائل می‌تواند وسیله جالبی برای کار خارج از کلاس دانش‌آموزان و داو-
طلبان کنکور و دانشجویان باشد و به همین مناسبت به نشر آن همت گماشتند.»

مسائل مسابقات ریاضی شوروی

ترجمه پرویز شهریاری

مسائل مسابقات ریاضی، از کتابهای انگشت شماری است که با شیوه‌ای درست و اصولی مسائل مربوط به جبر، مثلثات، حساب و هندسه را به داوطلبان کنکورهای ریاضی، دانش‌آموزان و دانشجویان علاقه‌مند می‌آموزد. تمامی مسائل همراه با حل آنها است.